Un nouveau principe en géométrie des nombres, avec quelques applications

H. F. Blichfeldt

1. Minkowski a découvert un principe géométrique qu'il a appliqué avec succès à certains problèmes importants de la théorie des nombres. Si on définit les *points d'une grille* comme les points de l'espace à n dimensions dont les coordonnées (rectangulaires) sont des entiers positifs ou négatifs ou zéro, son principe peut être énoncé comme suit :[1]

Un solide dans l'espace n-dimensionnel, nulle part concave, possédant un centre qui coïncide avec l'un des points de la grille du n-espace, et ayant un volume $\geq 2^n$, contient au moins deux points de la grille autres que 0, soit à l'intérieur du solide soit sur sa frontière.

Minkowski a donné à ce théorème la forme analytique suivante : soit $f(x_1, ..., x_n)$ n'importe quelle fonction de $x_1, ..., x_n$, qui s'évanouit quand $x_1 = 0, ..., x_n = 0$, mais qui possède une valeur définie pour tout autre système de valeurs assignées à $x_1, \ldots, x_n$; soient, de plus, les équations fonctionnelles suivantes qui sont vérifiées :

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & f(tx_1, \ldots, tx_n) = tf(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{quand } t > 0, \\ \text{(II)} & f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n) + f(z_1, \ldots, z_n), \\ \text{(III)} & f(-x_1, \ldots, -x_n) = f(x_1, \ldots, x_n). \end{array}$$

Alors le n-uplet intégral $\int dx_1 \ldots dx_n$, pris sur la région

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq 1$$

dans des directions positives le long des chemins d'intégration possède une valeur définie J, et il existe au moins un système de nombres entiers $l_1, \ldots, l_n$, tels que

$$0 < f(l_1, \ldots, l_n) \leq \frac{2}{\sqrt[n]{J}}.$$

2. Parmi les applications données par Minkowski, deux seront mentionnées ci-dessous, et une autre plus tard (§ 12[2]).

(α) Soit

$$[f(x_1, \ldots, x_n)]^2 \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

une forme quadratique définie, positive, en n variables, de déterminant D. Alors les variables peuvent être remplacées par des nombres entiers $l_1, \ldots, l_n$, de telle façon que l'on ait[3]

$$0 < f^2 \leq \frac{4}{\pi} \left[\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)\right]^{2/n} D^{1/n}.$$

Traduction : Denise Vella-Chemla, février 2023.

[1] *Geometrie der Zahlen*, Leipzig et Berlin, 1910, p. 76.

[2] Les paragraphes 1, 2, 3, 6, 7, 8 et 12 de la Géométrie des nombres sont à trouver ici http://denise.vella.chemla.free.fr//Minkowski-sections-1-a-12-auxquelles-fait-reference-Blichfeldt.pdf. Il faudrait avoir la traduction de ce texte de référence en allemand.

[3] *Geometrie der Zahlen*, p. 122.

(β) Soit

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv |v_1| + \dots + |v_n|,$$

où $v_1, \dots, v_n$ sont des formes linéaires homogènes en $x_1, \dots, x_n$, de déterminant Δ ne s'évanouissant pas. Soient s paires de ces formes ayant des coefficients imaginaires conjugués. Alors il existe des entiers $l_1, \dots, l_n$ de telle façon qu'on ait, selon une certaine substitution,[4]

$$0 < f \leq \left[\left(\frac{4}{\pi} \right)^s \Gamma(1+n) \cdot |\Delta| \right]^{1/n}.$$

3. Un nouveau principe géométrique va maintenant être énoncé et démontré. Pour le rendre d'une étendue plus générale, une nouvelle définition des points de la grille sera nécessaire.

Définition. Soit le n-espace défini par les coordonnées rectangulaires $x_1, ..., x_n$ que l'on divise en parties parallélépipédiques égales par les n systèmes de plans

$$x_1 = a_1 + b_1 t, \quad ..., \quad x_n = a_n + b_n t \qquad (t = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des nombres réels donnés. On appellera ces espaces les *parallélépipèdes fondamentaux.* Dans chacun d'eux, supposons placés, d'une manière arbitraire, un certain nombre donné de points, disons k, aucun d'eux, cependant, ne se trouvant sur les frontières des parallélépipèdes. *Ces points seront appelés points de la grille.*

On observera que cette définition des points de la grille inclut la seconde définition : posons $a_i = \frac{1}{2}, b_i = 1 \quad (i = 1, ..., n)$; et localisons un point de la grille ($k = 1$) au centre de chacun des parallélépipèdes résultant.

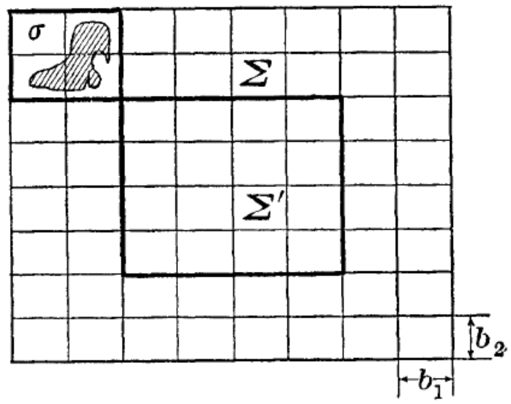
4. Théorème I. *Soit S représentant n'importe quel continuum borné ouvert n-dimensionnel dans le n-espace $x_1, ..., x_n$, ayant le volume (extérieur) V. Par une translation adéquate*

$$x_i' = x_i + \delta_i \qquad (i = 1, ..., n),$$

ce continuum peut être placé dans une telle position par rapport aux parallélépipèdes fondamentaux que le nombre des points de la grille L contenus dans le continuum ou se trouvant aussi près qu'on le souhaite de sa frontière soit plus grand que Vk/W, où W représente le volume, et k le nombre de points de la grille d'un parallélépipède fondamental.

Preuve. On construit un parallélépipède σ dont les arêtes parallèles aux axes des coordonnées $X_1, \dots, X_n$, sont de longueurs $Ab_1, \dots, Ab_n$, A étant un entier fixé (2 sur la figure) pris suffisamment grand pour que S puisse, par une translation, être placé entièrement à l'intérieur de σ.

[4] *Geometrie der Zahlen*, p. 122.



Quand S est ainsi positionné, la surface double obtenue sera dénotée par (S, σ). On construit alors un parallélépipède Σ dont les arêtes, parallèles aux axes, sont de longueurs $Bb_1, ..., Bb_n, B$ étant une variable entière assez grande (8 sur la figure), qui excède $2A$. On peut supposer que Σ contient juste B^n parallélépipèdes fondamentaux. À l'intérieur de Σ, on a un parallélépipède Σ' dont les arêtes sont de longueurs $(B-2A)b_1, \ldots, (B-2A)b_n$, ses faces étant aux distances $Ab_1, \ldots, Ab_n$, de celles de Σ.

Maintenant plaçons (S, σ) dans une telle position à l'intérieur de Σ qu'un des sommets de σ coïncide avec l'un de ceux de Σ, de telle façon que n de ses faces soient sur n des faces de Σ. De cette position on obtient $\{(B-A)C+1\}^n$ positions différentes de (S, σ), toutes à l'intérieur de Σ, au moyen de translations de la forme

$$x'_i = x_i + t_i \frac{b_i}{C} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

où t_i parcourt toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, indépendamment pour chaque indice i, et où C représente un grand nombre entier positif.

5. Chacun des $k(B-2A)^n$ points de la grille à l'intérieur de Σ' sera à l'intérieur ou près de plusieurs des surfaces S, si C est choisi suffisamment grand. On va procéder au comptage de ces points de la grille de telle manière que chacun soit compté aussi souvent qu'il apparaît à l'intérieur, ou aussi près qu'on le souhaite, d'une surface S. Appelons ce nombre N.

Considérons l'un quelconque nommé P de ces points de la grille. Pour compter le nombre de surfaces S à l'intérieur desquelles il apparaît, on peut regarder S comme stationnaire et P comme étant sujet aux translations (1). Alors P apparaîtra comme les sommets de parallélépipèdes dont les arêtes sont de longueurs $b_1/C, \ldots, b_n/C$. Appelons M_P le plus petit de tels parallélépipèdes qui contient entièrement le continuum S. On peut prendre C si grand que tous les sommets de ces parallélépipèdes M_P sont entièrement dans le continuum S, ou bien aussi proches qu'on le souhaite de ses frontières. En sommant pour tous les points de la grille considérés, on obtient

$$N > k(B-2A)^n M,$$

M étant le plus petit de ces nombres M_P.

6. Puisqu'il y a $\{(B-A)C+1\}^n$ différentes surfaces S à l'intérieur de Σ, il en découle qu'il y a

$$L > k\frac{(B-2A)^n M}{\{(B-A)C+1\}^n}$$

points de la grille à l'intérieur ou près de la surface d'au moins l'un d'eux. Si maintenant, B et C croissent indéfiniment, le membre du côté droit approche

$$\lim_{C=\infty} k\frac{M}{C^n} = k\frac{V}{b_1 \dots b_n} = \frac{k}{W}V$$

de telle façon que pour un ϵ positif donné, on peut prendre

$$L > \frac{k}{W}V - \epsilon.$$

Finalement, puisque L est un entier, l'inégalité du théorème en découle, à moins que Vk/W ne soit également un nombre entier. Dans ce cas pourtant, on considère d'abord un continuum suffisamment et arbitrairement proche de S et contenant S à l'intérieur de lui. Pour ce continuum de volume plus grand que V l'inégalité souhaitée est vérifiée, et il en est ainsi aussi pour S. Le théorème est par conséquent vrai.

7. Quand les différents parallélépipèdes fondamentaux sont congruents par rapport aux points de la grille contenus, l'énoncé du théorème I se lisant "le nombre L de points de la grille contenus dans le continuum ou étant aussi près qu'on le souhaite des points au bord du continuum est plus grand que kV/W..." peut être accentué en se lisant comme suit : "*le nombre L de points de la grille contenus dans le continuum ou appartenant aux points en bordure du continuum est plus grand que Vk/W....*". La preuve ci-dessus peut être modifiée pour couvrir cet énoncé. Pourtant, au lieu de faire cela, nous donnerons une preuve très élégante et indépendante du théorème I, selon les restrictions mentionnées, fournie à l'auteur par le professeur Birkhoff, dont la preuve met en évidence l'énoncé plus étroit du théorème. Nous nous limiterons à un point de la grille dans chaque parallélépipède fondeamental, bien que la preuve, donnée par le Professeur Birkhoff, soit valide pour n'importe quel nombre. L'esprit de la preuve est aussi bien montré également en nous limitant à l'espace à deux dimensions seulement.

Supposons donc le plan divisé en un réseau R de rectangles égaux, avec un seul point de la grille dans chacun d'eux, similairement placés. Soit une courbe fermée C dessinée, ayant une surface (extérieure) V, l'aire d'un rectangle étant égale à W.

On superposera, par une translation, sur un seul rectangle R_1 tous ceux qui sont couverts, en entier ou en partie, par V (sa frontière incluse). Il est alors évident qu'un point P peut être localisé dans R_1 auquel les portions superposées ou adjointes de V sont en nombre $L > V/W$, à moins que V/W qui est un nombre entier et ne fait pas partie de la frontière de V n'apparaisse à l'intérieur de R_1. Mais un tel cas pourrait être évité en faisant subir à C une translation propre au départ. Dans la surface reconstruite V, P apparaîtra comme L points, congruents par rapport aux rectangles R. En appliquant une translation de telle façon que ces points coïncident avec L points A, la surface translatée V contiendra dans son intérieur ou sur sa frontière plus de V/W points de la grille A.

8. **Extension du théorème I.** *Soient donnés ici un nombre fini de continua* $S_1, \ldots, S_m$, *se chevauchant ou pas, formant un réseau* S, *et soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *des constantes arbitraires positives. Alors par une translation adéquate,* $\overline{S}$ *peut être amené à une position telle que, si* L_i *désigne le nombre des points de la grille à l'intérieur de ou aussi près que l'on veut de la surface de* S_i, *et* V_i *le volume extérieur de* S_i, *alors* $\alpha_1 L_1 + ... + \alpha_m L_m > (\alpha_1 V_1 + \ldots + \alpha_m V_m)k/W$. La démonstration découle du théorème I, après que l'on ait remplacé S dans le terme (S, σ) par $\overline{S}$. En considérant chaque continuum S_i à son tour, on prouve (en utilisant les notations correspondantes N_i, M_i) :

$$\sum \alpha_i N_i > k(B - 2A)^n \sum \alpha_i M_i,$$

et le divisons alors par $\{(B - 2A)C + 1\}^n$. Finalement, $\sum \alpha_i L_i$ n'étant pas une grandeur continue, l'argument à la fin du § 6 est valide ici.

9. Le théorème analytique général de Minkowski (§ 1), pour autant que les dernières inégalités soient concernées, découle immédiatement du théorème I. Soient les symboles $f(x_1, \ldots, x_n)$, J définis comme dans le théorème de Minkowski, et soit S représentant le continuum des points $(x_1, \ldots, x_n)$ satisfaisant la condition

$$f(x_1, \ldots, x_n) < J^{-1/n}. \tag{2}$$

Alors $V = 1$, et si les "points de la grille" sont définis comme dans le § 1, on a $k/W = 1$ (cf. § 3). En appliquant le théorème I, on a $L \geq 2$. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ et $(-z_1, \ldots, -z_n)$ deux points de la grille à l'intérieur de S ou sur sa frontière (§ 7), dans sa nouvelle position. Posons $y_1 + z_1 = l_1, ..., y_n + z_n = l_n$.

Maintenant, si $(x'_1, \ldots, x'_n)$ est un point de la grille qui après une translation est à l'intérieur ou sur la frontière du continuum défini par (2) et si $\delta_1, ..., \delta_n$ sont les composantes de la translation, on a

$$f(x'_1 - \delta_1, \ldots, x'_n - \delta_n) \leq \frac{1}{J^{1/n}}.$$

Par conséquent, on obtient

$$0 < f(l_1, \ldots, l_n) = f(y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$$
$$\leq f(y_1 - \delta_1, \ldots, y_n - \delta_n) + f(-z_1 - \delta_1, \ldots, -z_n - \delta_n) \leq 2J^{-1/n}.$$

10. **Formes quadratiques.** Soit F désignant une forme quadratique définie positive en n variables $x_1, \ldots, x_n$. On peut écrire

$$F \equiv v_1^2 + \ldots + v_n^2,$$

où les $v_1, \ldots, v_n$ sont linéaires en les n variables et de déterminant Δ. Alors le déterminant de F sera $D = \Delta^2$.

Pour appliquer le théorème du § 8, construisons le réseau $\overline{S}$, constitué des points respectivement à l'intérieur des surfaces $S_1, \ldots, S_m$; S_λ ayant pour son équation

$$F = (\lambda\phi)^{2/n}, \qquad \text{où} \qquad \phi = \frac{n+2}{2mJ} \ ;$$

ici m est un grand entier (variable), et

$$J = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Delta\Gamma(1+\frac{1}{2}n)}$$

est le volume de $F = 1$. Soient les "points de la grille" ces points ayant des coordonnées entières, tels que $k/W = 1$. Alors, après une translation adéquate,

(3) $$\alpha_1 L_1 + \ldots + \alpha_m L_m > \alpha_1 V_1 + \ldots + \alpha_m V_m \ = \ \phi J(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m).$$

On posera $\alpha_i = (i+1)^{2/n} - i^{2/n}$ quand $i < m$,

$$\alpha_m = \frac{(n+2)g}{nm} - m^{2/n},$$

où $g = 1 + 2^{2/n} + \ldots + m^{2/n}$, et on dénotera $L_i - L_{i-1}$ par p_i. Alors (3) devient[5]

(4) $$\frac{(n+2)g}{nm} L_m - (p_1 + 2^{2/n} p_2 + \ldots + m^{2/n} p_m) > \frac{(n+2)g}{nm}.$$

Maintenant, si $x'_1, \ldots, x'_m$ est un point de la grille à l'intérieur ou proche de S_λ, et si on indique le résultat du fait de substituer $x'_1 - \delta_1, \ldots, x'_n - \delta_n$ aux $x_1, \ldots, x_n$ dans v_i par v'_i alors

$$(v'_1)^2 + \ldots + (v'_n)^2 < (\lambda\phi)^{2/n} + \epsilon,$$

où ϵ est une quantité aussi petite que désiré. Si $x''_1, \ldots, x''_n$ est n'importe quel autre point de la grille, alors les différences $v'_1 - v''_1$, etc., sont égales aux résultats obtenus en substituant les nombres entiers $x'_1 - x''_1$, etc., aux x_1, etc., dans $v_1, ..., v_n$. Par conséquent

(5) $$(v'_1 - v''_1)^2 + \ldots + (v'_n - v''_n)^2$$

sera la valeur numérique de F, pour des valeurs entières des variables impliquées.

En ajoutant toutes les expressions (5) pour toute paire de points de la grille contenus dans le réseau $\overline{S}$, et en dénotant la somme $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = L_m$ par P, on obtient

$$P\sum_{j=1}^{P}\{(v_1^{(j)})^2 + \ldots + (v_n^{(j)})^2\} - \left(\sum_{j=1}^{P} v_1^{(j)}\right)^2 - \ldots - \left(\sum_{j=1}^{P} v_n^{(j)}\right)^2$$

$$< P\{p_1\phi^{2/n} + p_2(2\phi)^{2/n} + \ldots + p_m(m\phi)^{2/n}\} + \epsilon P^2$$

$$< P\phi^{2/n}(P-1)\frac{(n+2)g}{nm} + \epsilon P^2,$$

par (4). Si on divise maintenant par $\frac{1}{2}P(P-1)$, en substituant la valeur de ϕ et en passant à la limite, on obtient le

[5]Note de la traductrice : ?? pour l'inégalité ci-dessous, ci-dessous, en soustrayant un positif à un nombre, on ne devrait pas obtenir du supérieur à ce nombre.

Théorème II. *Soit F une forme quadratique définie positive en n variables et de déterminant D. Alors les nombres entiers $l_1, \ldots, l_n$, non tous nuls, peuvent être substitués aux n variables de telle façon que la valeur numérique de F ne soit pas plus grande que*

$$\frac{2}{\pi}\left[\Gamma\left(1+\frac{n+2}{2}\right)\right]^{2/n} D^{1/n}.$$

On observera que la valeur asymptotique $nD^{1/n}/\pi e$ de cette expression est la moitié de la valeur de la limite de Minkowski (§ 2). Minkowski[6] a démontré que la valeur asymptotique ne peut tomber en-dessous de $nD^{1/n}/2\pi e$. La limite effective pour $n = 2$ a d'abord été déterminée par Hermite[7], et pour $n = 3, 4$ et 5 par Korkine et Zolotareff[8]. Les quotients de ces limites divisées par $D^{1/n}$ sont respectivement $2/\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{8}$.

11. **Formes linéaires.** Soit $f \equiv |v_1| + \ldots + |v_n|$, où $v_1, \ldots, v_n$ sont des formes linéaires homogènes en $x_1, \ldots, x_n$, de déterminant $\Delta \neq 0$. Dans le cas de coefficients imaginaires, on suppose que les formes ayant de tels coefficients apparaissent dans des paires d'imaginaires conjugués. On peut alors utiliser le théorème II. Car, de la valeur de $|v_1|^2 + |v_2|^2$, la valeur maximum de $|v_1| + |v_2|$ est obtenue en mettant $|v_1| = |v_2|$. On trouve le théorème suivant :

Théorème III. *Des nombres entiers $l_1, \ldots, l_n$, non tous nuls peuvent être substitués aux variables $x_1, ..., x_n$ tels que*

$$0 < |v_1| + \ldots + |v_n| \leq \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\left[\Gamma\left(1+\frac{n+2}{2}\right)\right]^{1/n} |\Delta|^{1/n}.$$

La valeur asymptotique

$$\frac{n}{\sqrt{\pi e}}|\Delta|^{1/n}$$

de cette limite est plus petite que celle (§ 2) de Minkowski

$$\frac{n}{e}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{s/n} |\Delta|^{1/n},$$

d'autant plus que le nombre de paires s de formes imaginaires conjuguées contenues dans $v_1, \ldots, v_n$ est grand. D'un autre côté, pour les petites valeurs de n, la limite donnée ci-dessus est plus grande que celle donnée par Minkowski.

12. **Approximation de nombres irrationnels au moyen de fractions.** Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ représentant $n-1$ nombres réels positifs. Le problème de trouver $n-1$ fractions rationelles $x_1/z, \ldots, x_{n-1}/z$, ayant un dénominateur commun, qui sont de proches approximations des quantités α, a été résolu par Hermite[9], Kronecker[10], et Minkowski[11], et pour $n = 2$ par Hurwitz[12]. Nous

[6] Journal für Mathematik, vol. 129 (1905), pp. 268-9.

[7] Journal für Mathematik, vol. 40 (1850), p. 263. Les limites pour $n = 2$ et $n = 3$ avaient été déterminées virtuellement par Gauss et Seeber. Cf. Gauss' Werke, Bd. 1, p. 307, ff. et Bd. 2, p. 192, ff. Göttingen, 1876.

[8] *Sur les formes quadratiques positives*, Mathematische Annalen, vol. 11 (1877), p. 242, ff.

[9] Journal für Mathematik, vol. 40 (1850), p. 266.

[10] *Werke*, Bd. I, p. 636.

[11] *Geometrie der Zahlen*, p. 108 et suiv.

[12] Mathematische Annalen, vol. 39 (1891), p. 279.

démontrerons un théorème donnant des limites légèrement plus proches, excepté pour $n = 2$, que celles obtenues par ces auteurs. Considérons les formes linéaires

$$y_1 \equiv x_1 - \alpha_1 z, \quad y_2 \equiv x_2 - \alpha_2 z, \quad \dots, y_{n-1} \equiv x_{n-1} - \alpha_{n-1} z.$$

Dans le n-espace $(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ construisons les points de la grille obtenus en substituant tous les nombres entiers possibles aux $x_1, \dots, x_{n-1}, z$. Construisons également tous les plans

$$y_1 = a_1 + h_1, \dots, \quad y_{n-1} = a_{n-1} + h_{n-1}, \quad z = \tfrac{1}{2} + kh_n.$$

Ici k est un nombre entier positif donné ; $a_1, \dots, a_{n-1}$ n'importe quel ensemble de $n-1$ nombres *non* représentables par les formes $y_1, \dots, y_{n-1}$; alors que $h_1, \dots, h_{n-1}$ parcourent, indépendamment les uns des autres, tous les nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$. Ces plans divisent le n-espace en parallélépipèdes, chacun de volume $W = k$, et chacun contenant juste k points de la grille. Car il y a juste k ensembles d'entiers $x_1, \dots, x_{n-1}, z$ qui satisfont les inégalités

$$a_i + h_i < x_i - \alpha_i z < a_i + h_i + 1 \qquad ;(i = 1, \dots, n-1),$$

$$\tfrac{1}{2} + kh_n < z < \tfrac{1}{2} + k(h_n + 1).$$

On applique maintenant le théorème I, où S représente le continuum de points satisfaisant les conditions

$$(6) \qquad \begin{aligned} &|z| < a \; ; \qquad \left|\frac{y_i}{b}\right| + \left|\frac{2^n(n-1)^{n-1}z}{n^n a}\right| < 1 \qquad \text{quand} \qquad \left|\frac{z}{a}\right| \le \left(\frac{n}{2(n-1)}\right)^{n-1}, \\ &\left|\frac{z}{a}\right| \left(\left|\frac{y_i}{b}\right| + 1\right)^{n-1} < 1 \qquad \text{quand} \qquad 1 > \left|\frac{z}{a}\right| > \left(\frac{n}{2(n-1)}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$(i = 1, \dots, n-1).$$

Ici a et b sont deux nombres réels positifs respectant les restrictions

$$(7) \qquad ab^{n-1} \left\{ \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} - \frac{(n-2)^n}{(n-1)^{n-1}n} + 2^n(n-1) \int_0^{1-2/n} \frac{v^{n-1}dv}{(1+v)^n} \right\} = 1, \quad b < \frac{1}{2}.$$

Le volume de S est $V = 1$ par (7). On peut par conséquent appliquer une translation

$$y_1' = y_1 + \delta_1, \quad \dots, \quad y_{n-1}' = y_{n-1} + \delta_{n-1}, \qquad z' = z + \delta_n$$

à S qui l'amènera dans une position telle que deux points de la grille, $(y_{11}, \dots, y_{1\,n-1}, z_1), (y_{21}, \dots, y_{2\,n-1}, z_2)$ sont contenus dans S, ou s'approchent aussi près que l'on veut de sa frontière.

Les deux nombres entiers z_1, z_2 ne peuvent être égaux. Car sinon

$$|x_{1i} - x_{2i}| = |y_{1i} - y_{2i}| = |(y_{1i} - \delta_i) - (y_{2i} - \delta_i)| < 2b + \epsilon < 1$$

par (6) et (7), i. e., $x_{1i} - x_{2i} = 0$ pour tout indice i, et par conséquent les deux points de la grille ne devraient pas être distincts. Si l'on pose par conséquent

$$X_1 = x_{11} - x_{21}, \quad \dots, \quad X_{n-1} = x_{1\,n-1} - x_{2\,n-1}, \quad Z = z_1 - z_2,$$

on a $Z \geq 1$, et on peut prouver que

$$|X_i - \alpha_i Z| < 2b + \epsilon_1, \qquad |X_i - \alpha_i Z||Z|^{1/n-1} < a^{1/n-1}b + \epsilon_2,$$

où ϵ_1 et ϵ_2 sont des quantités aussi petites que souhaité. Si maintenant on note qu'à partir de (7)

$$ab^{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left[1+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n-2}\right] \leq 1,$$

et que z peut être supposé positif, ces résultats donnent d'un coup :

Théorème IV. *Étant donnés $n-1$ quantités positives $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, et une quantité arbitrairement petite $b < \frac{1}{2}$, on peut trouver n nombres entiers $X_1, \ldots, X_{n-1}, Z$ tels que les $n-1$ différences*

$$\left|\frac{X_i}{Z} - \alpha_i\right|$$

ne sont pas plus grandes que $2b$, et en même temps sont toutes non plus grandes que

$$\frac{\gamma}{Z^{n/n-1}} = \frac{(n-1)Z^{-(n/n-1)}}{n\left[1+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n+2}\right]^{1/n-1}}.$$

Le dénominateur commun Z n'a pas besoin d'être pris plus grand que $2a \leq 2(\gamma/b)^{n-1}$.

Pour $n = 2$, Hurwitz a démontré (l. c.) que $\gamma = 1/\sqrt{5}$, et Minkowski[13] a démontré que, pour $n \geq 2, \gamma < (n-1)/n$. Pour de grandes valeurs de n, cela peut s'écrire $\gamma = e^{-1/n}$, alors que l'expression pour γ dans le théorème IV devient $(e + 1/e)^{-1/n}$.

[13] *Geometrie der Zahlen*, p. 112.