

ENTENDRE LA MUSIQUE DES NOMBRES PREMIERS : COMPLÉMENTARITÉ AUDITIVE ET CHANT DE SIRÈNE DE ZETA

M. V. BERRY

Résumé : Une fonction de comptage des nombres premiers peut être transformée en un signal sonore dont les harmoniques, couvrant toute la gamme des notes de musique, sont les zéros de la fonction zeta de Riemann. Mais les nombres premiers individuels ne peuvent pas être discriminés comme étant des singularités dans cette “musique”, parce que les intervalles qui les séparent sont trop petits. Inversement, si les singularités des nombres premiers sont détectées par une série de clics, les zéros de la fonction de zeta de Riemann correspondent à des fréquences trop basses pour être entendues. Le son engendré par la fonction zeta de Riemann elle-même est très différent : un hurlement de sirène de plus en plus aigu, qui peut être compris en détail à partir de la formule de Riemann-Siegel.

1. Introduction

Riemann [1, 2] a montré que les fluctuations des nombres premiers par rapport à leur densité moyenne pouvaient être décrites par une série d’oscillations, dont les fréquences sont données par les célèbres zéros complexes de sa fonction zeta. L’analogie avec la musique a souvent été évoquée lors d’exposés, dans le titre d’un livre populaire [3], et par Bombieri [4] :

“Pour moi, le fait que la distribution des nombres premiers puisse être représentée si précisément par une analyse harmonique est absolument surprenant et incroyablement beau. Il s’agit d’une musique mystérieuse et d’une harmonie secrète composée par les nombres premiers.”

Comme décrit plus loin, la “musique” est facile à créer sur un ordinateur ; on peut l’écouter en ligne [5], accompagnée de descriptions visuelles du signal qui la sous-tend.

Mon objectif ici est d’explorer cette idée plus profondément, de voir à quel point les nombres premiers, et la fonction zeta de Riemann qui leur est associée, peuvent être représentés par un signal sonore incorporant la gamme complète des notes de musique. Le signal le plus simple pour les nombres premiers est décrit en section 2. Les implications pour entendre la musique sont analysées en section 3. Le résultat principal est que dans un certain sens, les représentations de Fourier et des nombres premiers sont complémentaires : quand la musique des nombres premiers est synthétisée comme une superposition des zéros de Riemann, on peut entendre des harmoniques mais les nombres premiers individuels sont inaudibles ; et si le signal est ralenti pour entendre les nombres premiers, les harmoniques sont en-dessous de seuil d’audition. Le signal a des aspects fractals, discutés en section 4. Les sons très différents engendrés par la fonction zeta de Riemann sont analysés dans la section 5.

2. Signal de comptage des nombres premiers

Laboratoire de Physique H. H. Wills, Avenue Tyndall, Bristol BS8 ITL, Royaume-Uni

Recu le 2 Juillet 2012

Publié le 31 Août 2012

Référence : <https://michaelberryphysics.files.wordpress.com/2013/07/berry454.pdf>,

J. Phys. A : Math. Theor. 45 (2012) 382001 (7 pages).

Traduction : Denise Vella-Chemla, février 2023.

La fonction de comptage des nombres premiers la plus simple semble être l'escalier : $\pi(x)$ = nombre de nombres premiers inférieurs à x . Mais on sait bien [1] que la connexion avec les zéros de Riemann est plus simple avec la fonction de comptage des puissances de nombres premiers p^n , en utilisant la pondération pratique $\log p$, notamment dans la fonction ψ de Riemann

$$(2.1) \quad \psi(x) = \sum_{p^n < x} \log p \quad (p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots).$$

On peut la décomposer en sa partie lisse et sa partie oscillante :

$$(2.2) \quad \psi(x) = \psi_{\text{sm}}(x) + \psi_{\text{fluct}}(x).$$

La partie lisse, proche d'être linéaire, est

$$(2.3) \quad \psi_{\text{sm}}(x) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}).$$

Ici l'accent est mis sur la partie oscillante, définie exactement en fonction des zéros complexes de Riemann ρ par [1]

$$(2.4) \quad \psi_{\text{fluct}}(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\rho}}{\rho} \quad \left(\rho = \frac{1}{2} \pm it_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \right).$$

Les nombres t_n sont les hauteurs des zéros ; si l'hypothèse de Riemann (HR) est vraie, tous les zéros complexes sont sur la droite critique $\Re \rho = 1/2$, donc tous les t_n sont réels.

En supposant HR, chaque terme dans (2.4) représente une oscillation dont la phase est $\arg(x^{\rho}) = t_n \log x$. La fréquence angulaire correspondante $d(\text{phase})/dx = t_n/x$ dépend de x . Ceci est mal-adroit pour un signal sonore, dans lequel il est désirable que chaque zéro de Riemann représente un son pur. Par conséquent, on change pour une variable temporelle τ proportionnelle à $\log x$:

$$(2.5) \quad x = \exp(a\tau).$$

faisant intervenir une constante de mise à l'échelle a . Il est pratique d'enlever le facteur \sqrt{x} in ψ_{fluct} , associé à $\Re \rho = 1/2$, et ainsi de définir le *signal sonore représentant les nombres premiers* comme

$$(2.6) \quad S(\tau) = \exp(-\frac{1}{2}a\tau) \psi_{\text{fluct}}(\exp(a\tau)) = -2\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(2\pi i \nu_n \tau)}{\frac{1}{2} + it_n}$$

En supposant HR, cette fonction a un spectre discret, dont les fréquences - les harmoniques des nombres premiers - sont

$$(2.7) \quad \nu_n = \frac{at_n}{2\pi}.$$

Les amplitudes sont $1/\sqrt{t_n^2 + \frac{1}{4}}$. Si HR était fausse, certains des ??? seraient complexes, et le spectre ne serait pas purement discret. En étendant la définition de la "musique" de façon à y inclure tout signal avec un spectre discret, cela permet un énoncé non technique de HR [6] : les nombres premiers contiennent de la musique.

3. Complémentarité entre les nombres premiers et les zéros de Riemann

Pour implémenter $S(\tau)$ comme une musique, on choisit la fréquence ν_1 , associé avec le zéro de

Riemann le plus bas, comme la note la plus basse du clavier de piano, et on remplace la somme (2.6) par la version tronquée

$$(3.1) \quad S_N(\tau) = -2\Re \sum_{n=1}^N \frac{\exp(2\pi i \nu_n \tau)}{\frac{1}{2} + it_n},$$

incluant N zéros, où t_N est associé à la note la plus haute du clavier du piano. Ainsi, avec τ mesuré en secondes,

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \nu_1 &= 27.5 \text{ Hz (musical note A0)} \\ \nu_N &= 4186.01 \text{ Hz (musical note C8)}. \end{aligned}$$

La constante de mise à l'échelle a dans (2.5), et l'indice N , découlent maintenant de (2.7) :

$$(3.3) \quad a = 12.224, \quad t_N = \frac{\nu_N}{\nu_1} t_1 = 2151.57 \implies N = 1657.$$

Cela donne comme “échelle de Riemann” l'ensemble des fréquences $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$.

Il est facile d'écrire un programme d'ordinateur pour permettre qu'on puisse entendre l'échelle (2.7) et la “musique” (3.1) ¹. Une version incorporant 100 zéros a été postée en ligne [5]. Interpréter le son comme de la musique nécessite quelque imagination : bien que les zéros bas puissent être discernés comme des grognements fantomatiques, le signal est plutôt un bruit, pour les raisons fournies dans la section 4. Des implémentations alternatives sont faciles à explorer. Par exemple, en commençant à une note très aigue rend les harmoniques plus distinctement, au prix d'avoir moins de notes dans la gamme musicale : lorsque $\nu_1 = A2 = 110$ Hz, correspondant à $a = 48.896$, on a $N = 297$.

À partir de sa définition en fonction de $\psi(x)$, le signal (2.6) a des singularités : les discontinuités correspondant aux puissances de nombres premiers p^n , aux instants $\tau = (n/a)\log p$. Ces singularités ne peuvent pas être entendues dans la musique des nombres premiers comme définie ici. Pour comprendre pourquoi, notons d'abord que pendant de très courtes durées, il est possible de discriminer les puissances de nombres premiers individuels dans la série tronquée (3.1), même avec beaucoup moins de zéros N , comme cela est illustré dans la figure 1 (a) pour $0 < \tau < 0.2$ s. Mais cette association se dissout bientôt, comme cela est illustré dans les figures 1 (b)-(d). La raison de cela est que pour résoudre des détails dans $\psi(x)$ ou (τ) sur une échelle $\Delta x = \log x$ correspondant à l'espace entre des nombres premiers vers x , la synthèse doit inclure au moins les M premiers zéros de Riemann, qui sont donnés par le changement de phase

$$(3.4) \quad \Delta(t_M \log x) = t_M \frac{\Delta x}{x} = \frac{t_M \log x}{x} = 2\pi, \quad \text{i.e. } t_M = 2\pi \frac{x}{\log x}.$$

Il découle maintenant de la fonction de comptage connue des zéros [1], notamment $N(t) \approx (t/2\pi)\log(t/2\pi e)$, que

$$(3.5) \quad M \sim x = \exp(a\tau).$$

Cela implique que la discrimination des sauts aux puissances de nombres premiers, même parfois si proche du début du signal qu'on n'entend pas la différence, nécessiterait un nombre de zéros de Riemann si grand que l'expérimentation en serait irréalisable : lorsque $\tau = 1$ s, $M \sim 204\,000$; et

¹introuvable : Un tel programme accompagne cet article comme matériau supplémentaire (téléchargeable à l'adresse <http://stacks.iop.org/JPhysA/45/382001/mmedia>, avec des clips sonores de l'échelle et du signal

lorsque $\tau = 10$ s, $M \sim 1.2 \times 10^{53}$. Avec $M = N = 1657$ zéros, correspondant à la note du piano la plus haute, les premiers cessent d'être discriminables lorsque $\tau > \log(a)/N \sim 0.6$ s. En augmentant la gamme pour inclure la totalité du domaine audible aux humains (de façon optimiste, jusqu'à 20 kHz) n'aide que peu.

Même si le nombre des zéros de Riemann est grandement augmenté au-delà du domaine audible, de telle façon que les nombres premiers individuels pourraient en principe être discriminés, ils resteraient inaudibles, parce que

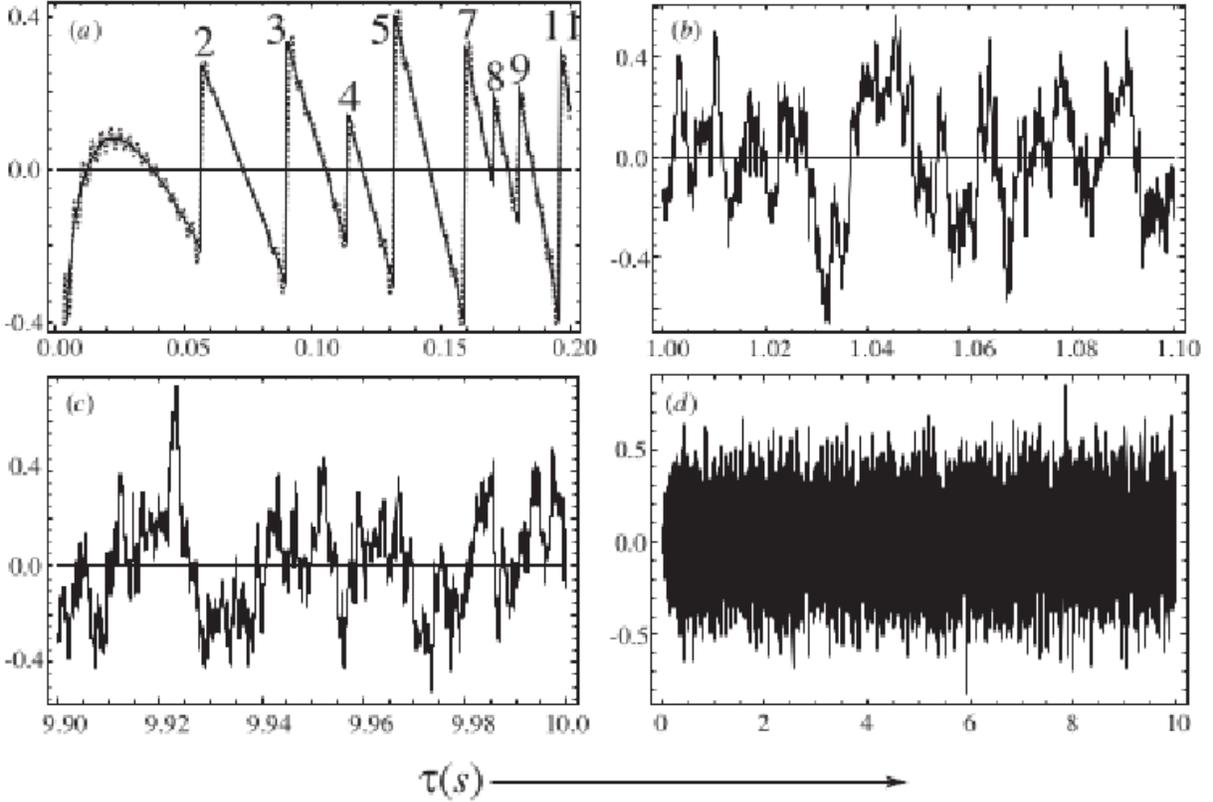


Figure 1. (a) Comparaison du signal tronqué $S_{50}(\tau)$ (équation (3.1)) (courbe en pointillé) avec le $S(\tau)$ exact (équation (2.6)) (courbe pleine), for $0 < \tau < 0.2$ s ; les nombres près des sauts indiquent les puissances de nombres premiers correspondantes dans $\psi(x)$. (b) Signal tronqué $S_{1657}(\tau)$, pour 1.0 s $< \tau < 1.1$ s. (c) Signal tronqué $S_{1657}(\tau)$, pour 9.9 s $< \tau < 10.0$ s. (d) Signal tronqué $S_{1657}(\tau)$, pour $0 < \tau < 10$ s.

les intervalles de temps $\Delta\tau$ entre leurs singularités dans le signal sont trop petites pour être entendues. Car les nombres premiers à l'instant τ ,

$$(3.6) \quad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{ax} = \frac{\log x}{ax} = \tau \exp(-a\tau).$$

Même pour la durée plutôt courte $\tau = 1$ s, $\Delta\tau \sim 5 \mu\text{s}$; et pour $\tau = 10$ s, $\Delta\tau \sim 8 \times 10^{-53}$ s. Comme l'illustrent les figures 1 (b)-(d), à de tels instants, les singularités sur les puissances de premiers sont invisibles. Plutôt, le graphique semble fractale un aspect dont il sera question dans la prochaine section.

Bien sûr, il est possible d'entendre les singularités des puissances de premiers dans $S(\tau)$ comme une série de clics, simplement en ralentissant le signal, c'est-à-dire, en réduisant l'échelle a . Par exemple, pour entendre les puissances 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 de nombres premiers dans l'intervalle de temps $0 < \tau < 10$ s, il est nécessaire de prendre $a = \log(10)/10 = 0.2306$. Mais alors, le zéro de Riemann le plus bas t_1 contribue avec la fréquence $\nu_1 = 0.517$ Hz - loin en-dessous du seuil de l'audition - et la note de piano la plus basse A0 = 25.5 Hz est atteinte seulement au zéro t_{413} .

Ainsi, il est possible d'entendre les clics des puissances de nombres premiers, ou bien les harmoniques des zéros de Riemann, mais on ne peut pas faire les deux à la fois. Cette complémentarité reflète les différentes échelles auxquelles les zéros individuels de Riemann et les puissances de nombres premiers adviennent dans le signal $S(\tau)$. Chaque zéro de Riemann décrit une oscillation de période T_n qui est indépendante de τ : $T_n = 1/\nu_n = 2\pi/at_n$ (cf (2.7)). Les puissances de premiers - sauts dans $S(\tau)$ - correspondent à l'échelle exponentielle la plus petite (3.6). La période T_n représente l'échelle d'amas oscillatoire de puissances de nombres premiers dans lesquels chaque amas contient $T_n/\Delta\tau = (2\pi/at_n)\exp(a\tau)/\tau$ puissances de premiers ; le nombre augmente exponentiellement lorsque τ croît.

Sur l'interprétation spectrale des zéros de Riemann comme niveaux d'énergies (valeurs propres) d'un système dynamique chaotique [6-8], les puissances de premiers représentent les répétitions des orbites périodiques. $S(\tau)$ dans (2.6) est une formule de trace, avec des singularités aux puissances de premiers (orbites périodiques) représentées comme des oscillations déterminées par les zéros de Riemann (niveaux d'énergie) ; ceci est complémentaire à une formule de trace de densité spectrale [9-11] dans laquelle les singularités aux niveaux d'énergie (les zéros de Riemann) sont représentés comme des oscillations déterminées par les orbites périodiques (nombres premiers). Discriminer les nombres premiers individuels dans le signal $S(\tau)$ synthétisé à partir des zéros de Riemann est analogue à la notion d'“étude du chaos quantique inverse” [12], dans laquelle les périodes des orbites classiques périodiques sont déterminées à partir de niveaux d'énergie quantique. Il serait intéressant de savoir si la complémentarité auditive identifiée ici s'étend à la “musique” représentant classiquement des systèmes chaotiques dynamiques, dans lesquels les harmoniques sont les niveaux d'énergie quantique.

4. Structure fractale d'un signal de premier

Sur l'échelle la plus fine (3.6), exponentiellement petite lorsque τ croît, $S(\tau)$ consiste en des singularités aux puissances de premiers, illustrées dans la figure 1(a). Sur des échelles plus grossières, le graphique de $S(\tau)$ semble fractale (figures 1 (b)-(d)). La dimension associée D peut être estimée comme suit. Écrivons (2.6) comme

$$(4.1) \quad S(\tau) = \text{constant} \times \Re \sum_n \frac{\exp(i\omega_n \tau)}{(\frac{1}{4} + i\omega_n/a)}$$

avec $\omega_n = t_n/a$, le spectre de la puissance correspondante est $P(\omega)$

$$(4.2) \quad P(\omega) \propto \sum_n \frac{\delta(\omega - \omega_n)}{\omega_n^2 + \frac{1}{4}a^2} \sim \frac{1}{\omega^2} \frac{dn(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\omega^2} \log \left(\frac{a\omega}{2\pi} \right),$$

où la dernière égalité incorpore la densité asymptotique des t_n .

Maintenant on utilise le résultat énonçant que le graphe d'une série de Fourier $S(\tau)$ avec des phases non corrélées et un spectre de puissance obéissant à la loi de puissance $P(\omega) \propto \omega^{-\mu}$ avec $1 < \mu < 3$ est une courbe continue mais non différentiable de dimension fractale $D = (5 - \mu)/2$ [13, 14]. Aux logarithmes près, (4.2) est une loi de puissance avec $\mu = 2$, giving $D = 3/2$. L'observation que ceci est la dimension du graphe d'un mouvement brownien dans une dimension de l'espace quantifie le pseudo-aléa des puissances des nombres premiers sur des échelles plus grossières et explique pourquoi la musique des nombres premiers ressemble à du bruit. Visuellement, la comparaison des figures 1 (b) et (c) avec d'autres courbes fractales [14] d'une variété de dimensions est consistante avec la valeur $D = 3/2$. Une analyse plus précise en théorie de la mesure, faisant intervenir des concepts au-delà de la dimension fractale et incorporant le logarithme, indiquerait probablement une rugosité additionnelle faiblement dépendant de l'échelle dans le graphe de $S(\tau)$.

5. La musique de zeta

La façon naturelle de transformer la fonction zeta $\zeta(s)$ sur la droite critique $s = 1/2 + it$ en un son, c'est par la version mise à l'échelle $Z(at)$ de la fonction réelle [1]

$$(5.1) \quad Z(t) = \exp(i\theta(t))\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

dans laquelle la phase $\theta(t)$ is

$$(5.2) \quad \theta(t) = \Im \log \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}it\right) - \frac{1}{2}t \log \pi.$$

Le son engendré par $Z(at)$, comme on l'entend dans le matériau supplémentaire ² est très différent de la musique des nombres premiers, dans la manière dont il dépend de la mise à l'échelle a . Pour $a = 1000$, il ressemble à la note montante d'une sirène ; pour $a = 2500$, c'est un hurlement de banshee ; et pour $a = 5395$ (un choix qui sera expliqué ultérieurement), c'est un cri énervant.

Ces sons peuvent être compris en représentant $Z(t)$ comme une série d'oscillations. À une précision suffisante elles sont données par la "somme principale" de l'expansion de Riemann-Siegel [1, 15] - une version de la série de Dirichlet incorporant l'équation fonctionnelle pour $\zeta(s)$:

$$(5.3) \quad Z_{\text{RS}}(t) = 2 \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{t/2\pi} \rfloor} \frac{\cos\{\theta(t) - t \log n\}}{\sqrt{n}}.$$

À cause de la fonction floor (partie entière) $\lfloor \sqrt{t/2\pi} \rfloor$, c'est une somme finie dans laquelle le nombre de termes croît lentement avec t . Les discontinuités faibles correspondantes sont à peine audibles quand $Z_{\text{RS}}(t)$ est transformé en un son (et dans tous les cas pourrait être éliminées en incluant les termes de correction de Riemann-Siegel [15] ou en lissant les discontinuités [16]).

Les oscillations dans (5.3) font intervenir $\theta(t)$, dont la forme asymptotique pour les grandes valeurs de t est

$$(5.4) \quad \theta(t) \approx \frac{1}{2}t \log\left(\frac{t}{2\pi e}\right) - \frac{1}{8}\pi.$$

Ainsi les fréquences instantanées des oscillations avec pour indices n sont

²introuvable : téléchargeable à l'adresse <http://stacks.iop.org/JPhys A/45/382001/mmedia>.

$$(5.5) \quad \nu_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\text{phase})}{dt} \approx \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right).$$

Ceux-ci peuvent être regardés comme des tonalités montantes, quasi-monochromatiques parce que les fréquences varient à peine sur une période d'oscillation :

$$(5.6) \quad \frac{\nu_n(t + 1/\nu_n(t)) - \nu_n(t)}{\nu_n(t)} \approx \frac{1}{\nu_n(t)^2} \frac{d\nu_n(t)}{dt} = \frac{\pi}{t \log^2 \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \right)} \ll 1$$

pour tous les t et n pertinents. Le spectre logarithmique (5.5) contraste avec le spectre exponentiel $\nu_n = \nu_1 2^{n/12}$ des demi-tons de l'échelle musicale.

Dans la version mise à l'échelle $Z_{RS}(at)$ de la somme (5.3), la plus haute fréquence correspond à $n = 1$:

$$(5.7) \quad \nu_{\max}(t) = \frac{a \log \left(\frac{at}{2\pi} \right)}{4\pi}.$$

Pour un son joué pour l'intervalle de temps $0 \leq t \leq t_{\max}$, a peut être déterminé pour correspondre à n'importe quel choix de la plus haute fréquence $\nu_{\max}(t_{\max})$ dans la musique correspondant à zeta. Pour $t_{\max} = 20$ s, et la note la plus haute $C8 = 4186$ Hz sur le clavier du piano (l'équation (3.2)), cela donne $a = 5395$; $a = 2500$ correspond à $\nu_{\max}(20) = 1787$ Hz, et $a = 1000$ correspond à $\nu_{\max}(20) = 642$ Hz.

Le son très différent de la musique de zeta $Z(t)$ comparé avec la musique des nombres premiers $S(\tau)$ (équation (2.6)) est reflété dans le spectre de puissance. En fonction de la fréquence angulaire $\omega = 2\pi\nu$, inverser (5.5) donne

$$(5.8) \quad n(\omega) = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} \exp(-\omega).$$

Ainsi le spectre de puissance correspondant à (5.3) est

$$(5.9) \quad P(\omega) = \frac{1}{n(\omega)} \left| \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right| = \Theta \left(\log \sqrt{\frac{t}{2\pi}} - \omega \right).$$

En ignorant la fonction étagée Θ , c'est un spectre plat, correspondant à un bruit blanc. Cela a été noté dans une étude précédente [17, pp 253-260], en insistant sur les spectres très différents de $\zeta(\sigma + it)$ sur et en dehors de la droite critique $\sigma = 1/2$. Pourtant, le cutoff est important parce qu'il indique que la musique de zeta est de largeur de bande limitée. Sur des temps suffisamment longs, la fréquence du cutoff ν_{\max} dans (5.7) grimpera au-dessus des domaines audibles. Même alors, la distribution logarithmique des fréquences (5.5) résonne différemment d'un bruit blanc simulé dans lequel les fréquences ($\sqrt{t/2\pi}$ d'entre elles) sont uniformément distribuées sur toute l'étendue du domaine $0 < \nu < \nu_{\max}$. Et bien sûr, le spectre plat de largeur de bande limité de zeta est très différent du spectre fractal de la musique des nombres premiers, comme cela a été évoqué dans la section 4.

Références

- [1] Edwards H. M., 2001, *Riemann's Zeta Function* (Mineola, NY : Dover).
- [2] Borwein P., Choi S., Rooney B., Weirathmueller A., 2008, *The Riemann Hypothesis : A Resource for the Aficionado and Virtuoso Alike* (Berlin : Springer).
- [3] du Sautoy M., 2003, *The Music of the Primes* (New York : Harper Collins).
- [4] Bombieri E., 1992, Prime territory : exploring the infinite landscape at the base of the number system *The Sciences* **32** : pp 30-6.
- [5] Stopple J., 2004, Riemann zeta function and explicit formula (<http://www.math.ucsb.edu/stopple>).
- [6] Berry M. V., Keating J. P., 1999, The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics *SIAM Rev.* **41** pp 236-66.
- [7] Berry M. V., 1986, Riemann's zeta function : a model for quantum chaos ? *Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics (Lecture Notes in Physics vol 263)* ed. T. H. Seligman, H. Nishioka (New York : Springer) pp 1-17.
- [8] Berry M. V., 2008, Three quantum obsessions *Nonlinearity* **21** pp 19-26.
- [9] Gutzwiller M. C., 1971, Periodic orbits and classical quantization conditions *J. Math. Phys.* **12** pp 343-58.
- [10] Balian R., Bloch C., 1972, Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain : III. Eigenfrequency density oscillations *Ann. Phys.*, NY **69** pp 76-160.
- [11] Selberg A., 1956, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly Riemannian spaces with applications to Dirichlet series *J. Indian Math. Soc.* **20** pp 47-87.
- [12] Aurich R., Steiner F., 2001, Orbit sum rules for the quantum wave functions of the strongly chaotic Hadamard billiard in arbitrary dimensions *Found. Phys.* **31** pp 569-92.
- [13] Mandelbrot B. B., 1982, *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco, CA : Freeman).
- [14] Berry M. V., Lewis Z. V., 1980, On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function *Proc. R. Soc. A* **370** pp 459-84.
- [15] Berry M. V., 1995, The Riemann-Siegel formula for the zeta function : high orders and remainders *Proc. R. Soc. Lond.* **450** pp 439-62.
- [16] Berry M. V., Keating J. P., 1992, A new approximation for $\zeta(1/2+it)$ and quantum spectral determinants *Proc. R. Soc. Lond.* **437** pp 151-73.
- [17] Crandall R. E., 1996, *Topics in Advanced Scientific Computation* (New York : Springer).