Traduction d'un extrait de l'article de H. Bateman, *On the inversion of a definite integral*, Proc. London. Math. Soc. Sér. 2, Vol. 4, Part 2 (1906) (section 7, pages 483-485).

7. Équations de type $3a$ [1]

La formule fondamentale dont dépend la formule d'inversion des équations intégrales de ce type est la suivante :

$$f(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-}^{\infty}\frac{\sin(r-t)}{r-t}f(t)dt. \tag{38}$$

Il est tout de suite évident que cette formule n'est pas satisfaite par une fonction parfaitement arbitraire : on doit par conséquent trouver une description pratique d'une classe de fonctions à laquelle la formule est applicable.

Maintenant, la fonction $\frac{\sin(r-t)}{r-t}$ peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{ir\mu - it}d\mu.$$

De ce fait, si l'on peut changer l'ordre d'intégration, on aura

$$f(r) = \int_{-1}^{+1} e^{ir\mu}\psi(\mu)d\mu \tag{A}$$

où

$$\psi(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\mu}f(t)dt. \tag{B}$$

On va donc supposer que $f(r)$ est une fonction définie au moyen d'une intégrale de la forme (A), et est telle que l'intégrale (B) est uniformément convergente sur le domaine $\mu = (-1, 1)$; de telle façon que l'ordre d'intégration dans notre double intégrale puisse être changé.

Maintenant, pour utiliser cette formule pour résoudre des équations intégrales, on doit exprimer la fonction $\frac{\sin(r-t)}{r-t}$ comme une intégrale définie du type souhaité. La méthode à adopter est similaire à celle utilisée dans le § 6, et est mieux illustrée par un exemple.

La fonction $J_0(x-t)$ satisfait l'équation différentielle

$$(x-t)\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + (x-t)u = 0 \ ;$$

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, avril 2025.

[1] *Note de la traductrice : Type défini à la page 466 de la référence en anglais ici https://denisevellachemla.eu/ref-Bateman.pdf.*

aussi $v = J_0(x-s)$ est un facteur d'intégration de l'équation avec s écrit à la place de t ; on a par conséquent

$$\frac{d}{dx}\left[(x-s)\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)\right] = (t-s)v\left[\frac{d^2u}{dx^2}+u\right].$$

Maintenant, pour de grandes valeurs de x, on a à peu près

$$J_0(x-t) = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x+t\right)}{\sqrt{2\pi(x-t)}}$$

et

$$\frac{d}{dx}(J_0(x-t)) = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x+t\right)}{\sqrt{2\pi(x-t)}}\ ;$$

donc pour $x=\infty$, la quantité dans les crochets devient égale à

$$\frac{2}{\pi}\sin(t-s),$$

et pour $x = s$, elle est nulle.

Donc on a

$$u+\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{x-t}\frac{d}{dx}J_0(x-t) = \frac{J_1(x-t)}{x-t}\ ;$$

et l'équation donne ainsi

$$\int_s^\infty J_0(x-s)\frac{J_1(x-t)}{x-t}dx = \frac{2}{\pi}\ \frac{\sin(s-t)}{s-t}. \tag{39}$$

En combinant cela avec la formule fondamentale, on obtient

$$\int_{-\infty}^\infty\int_s^\infty J_0(x-s)\frac{J_1(x-t)}{x-t}f(t)dx\,dt = 2f(s), \tag{40}$$

une équation qui peut, en général, s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{J_1(x-t)}{x-t}f(t)dt, \\ f(s) = \displaystyle\frac{1}{2}\int_s^\infty J_0(s-x)\phi(x)dx. \end{cases} \tag{41}$$

Cette relation peut être vérifiée directement si l'on suppose pour $\phi(x)$ une expression de la forme

$$\phi(x) = \int_{-1}^{+1} e^{ix\mu}\psi(\mu)d\mu$$

dans laquelle $\psi(\mu)$ est finie et continue le long du chemin d'intégration.

La méthode que nous venons d'expliquer est seulement applicable aux fonctions $\kappa(s,t)$ qui oscillent à l'approche de $s=\infty$ et qui admettent une représentation asymptotique dans laquelle intervient une fonction circulaire, de telle façon que le terme $\sin(t-r)$ peut intervenir. Une méthode similaire peut être utilisée pour les équations de type 2 ; car il est facile de voir que, si $[W]$ est une constante plutôt que zéro, on obtiendra une intégrale définie de la forme souhaitée égale à $\dfrac{1}{t-r}$.