

# Compter des flots entiers dans des réseaux.

W. Baldoni-Silva, J. A. De Loera, and M. Vergne

17 février 2003

## Introduction <sup>1</sup>

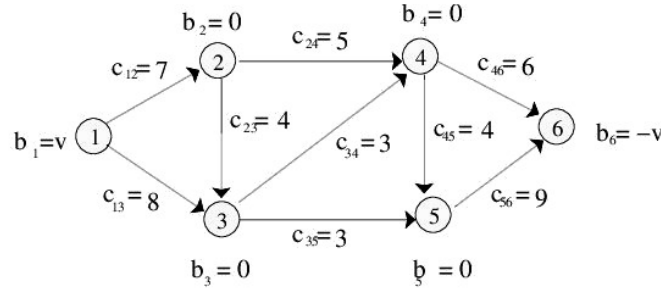
Un *réseau* est un graphe à arêtes orientées, autorisant plusieurs copies d'arêtes, où chaque nœud  $v$  possède une valeur entière, appelée son *excédent*, et chaque arc une valeur entière positive, appelée sa capacité. Un *flot réalisable* est une attribution de valeurs réelles aux arcs du réseau telle que, pour tout nœud  $v$ , la différence entre la somme des valeurs des arcs sortants et la somme des valeurs des arcs entrants soit égale à l'excédent prescrit du nœud  $v$ , sans dépasser les capacités des arcs. Dans cet article, nous étudions le problème du dénombrement efficace du nombre de *flots réalisables entiers* différents dans un réseau. Il est bien connu que ce problème est NP-difficile dans la catégorie des problèmes de dénombrement [13], car il se ramène au problème du dénombrement des couplages parfaits dans les graphes bipartis. Malgré cette complexité, les applications concrètes abondent en théorie des graphes [14], en théorie des représentations [15] et en statistique [12], d'où l'importance de trouver de bonnes méthodes pour traiter des exemples concrets. Notre objectif est de montrer que l'utilisation de la structure algébrique-analytique du problème permet de dénombrer très rapidement les flots dans des instances complexes, surpassant ainsi l'énumération exhaustive traditionnelle. Dans la continuité des travaux entamés dans [2], nous présentons des algorithmes de dénombrement efficaces à partir desquels on peut en déduire des formules de dénombrement lorsque la fonction d'excès possède certains paramètres.

L'ensemble de tous les *flots réalisables*, avec un vecteur d'excédent  $b$  et un vecteur de capacité  $c$  donnés, est un polytope convexe, le bien connu *polytope des flots*, défini par les contraintes  $\Phi_G x = b$ ,  $0 \leq x \leq c$ , où  $\Phi_G$  désigne la matrice d'incidence nœud-arc de  $G$  (une *matrice de réseau*). La matrice d'incidence  $\Phi_G$  possède une colonne par arc et une ligne par nœud. Chaque colonne de  $\Phi_G$  contient autant d'éléments que de nœuds. Pour un arc allant de  $i$  à  $j$ , sa colonne correspondante est nulle, sauf aux éléments  $i$  et  $j$ . L'élément  $j$ , la pointe de la flèche, prend la valeur -1 et l'élément  $i$ , la *queue* de la flèche, la valeur 1. Un exemple célèbre est le problème *du flot maximal et de la coupe minimale* [19]. C'est le cas lorsque  $b$  a pour première entrée  $v$ , pour dernière entrée  $-v$  et 0 ailleurs. Dans la partie (B) de la figure 1, nous listons tous les flots possibles avec  $v = 11$ , la valeur maximale possible d'après les informations du réseau spécifiées dans la partie (A).

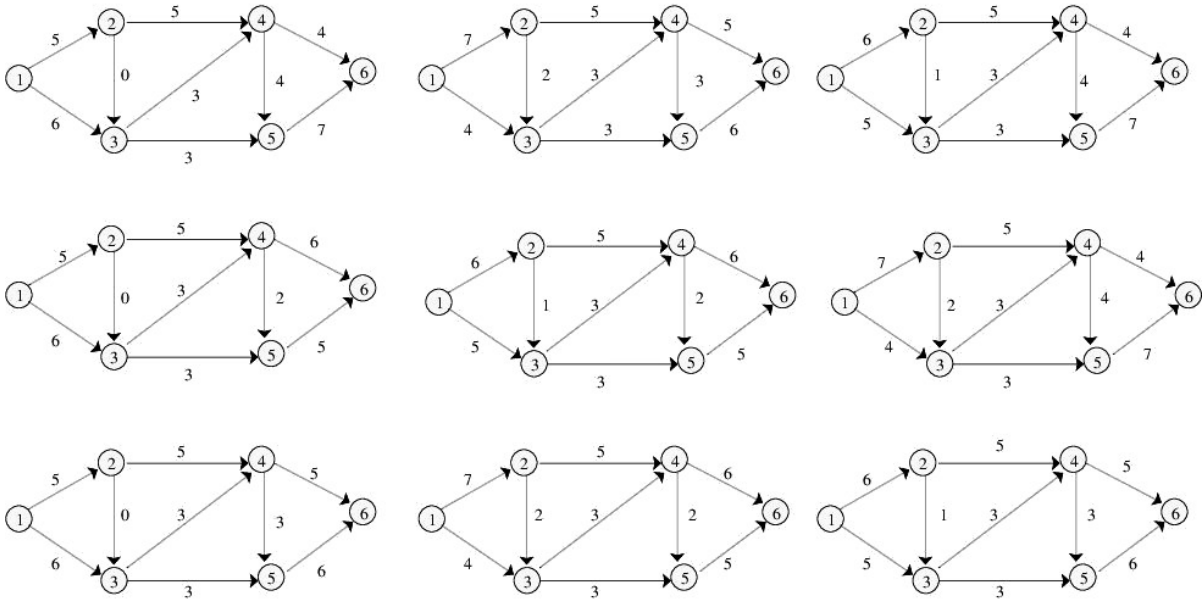
---

1. Référence de l'article : <https://arxiv.org/pdf/math/0303228>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, mai 2026.



(A)



(B)

FIGURE 1 : compter tous les flots maximaux (partie B) d'un réseau particulier (partie A)

Pour nous, une caractéristique importante de la matrice d'incidence du réseau  $\Phi_G$  est son unimodularité. On dit que le système  $\Phi_G$  est *unimodulaire* si ses colonnes engendrent un treillis, noté  $\mathbb{Z}\Phi_G$ , et si, pour tout  $a$  appartenant à ce treillis  $\mathbb{Z}\Phi_G$ , le polytope  $P(\Phi_G, a) = \{x \mid x \geq 0 : \Phi_G x = a\}$  possède des sommets à coordonnées entières. Plus précisément, les matrices de réseau sont en fait des matrices totalement unimodulaires [19], ce qui signifie que le treillis engendré par leurs colonnes est le treillis entier standard  $\mathbb{Z}^n$ . Notons que les flots entiers admissibles sont précisément les points entiers du treillis à l'intérieur du polytope des flots.

Voici un exemple : la matrice d'incidence nœud-arc du graphe  $G_1$  de la figure 2 est définie par :

$$\Phi_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

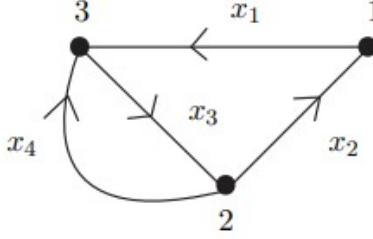


FIGURE 2 : Réseau  $G_1$  avec les nœuds 1, 2, 3, les arêtes  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , la fonction d'excédent  $b_1 = 3, b_2 = -2, b_3 = -1$  et la fonction de capacité  $c_{x_1} = 1, c_{x_2} = 1, c_{x_3} = 2, c_{x_4} = 1$ .

L'équation  $\Phi_{G_1}x = b$  se lit comme la série d'équations  $x_1 - x_2 = b_1, x_2 - x_3 + x_4 = b_2, -x_1 + x_3 - x_4 = b_3$ . Ces 3 équations expriment le fait qu'à chaque nœud  $v \in \{1, 2, 3\}$ , la différence entre la somme des valeurs des arcs sortants et la somme des valeurs des arcs entrants est égale à l'excédent prescrit  $b_i$  du nœud  $v$ . Les flux admissibles sont en outre restreints par les conditions  $0 \leq x_i \leq c_i$ .

L'algorithme et les formules déduites ici sont basés sur la notion de *résidu total* (voir la section 1), le concept principal étant l'étude des fonctions rationnelles dont les pôles se situent sur un arrangement d'hyperplans. La théorie de l'énumération que nous présentons a été étendue aux polyèdres rationnels quelconques dans [23]. La description particulière que nous donnons ici est valable pour toutes les matrices unimodulaires (rappelons qu'une matrice  $A$  est unimodulaire si  $A$  a des coefficients entiers et si le polytope  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}_+^m | Ax = b\}$  ne possède que des sommets entiers lorsque  $b$  appartient au treillis engendré par les colonnes de  $A$ ).

Le lemme suivant implique qu'il suffit de décrire nos formules et techniques de dénombrement pour les réseaux sans capacité restreinte sur les arcs et sans cycle orienté; on les appelle *réseaux acycliques sans capacité*.

**Lemme 1 :** *Étant donné un réseau  $G$  à  $n$  nœuds et  $m$  arcs, de capacité  $c$  et de fonction d'excédent  $b$ , il existe un réseau acyclique sans capacité  $\widehat{G}$  à  $n + m$  nœuds et  $2m$  arcs, de fonction d'excédent  $\widehat{b}$  (une combinaison linéaire de  $b$  et  $c$ ), tel que les flux intégraux des deux réseaux soient bijectifs. Le réseau  $\widehat{G}$  est obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arc par deux nouveaux arcs, comme illustré dans la figure ci-dessous.*

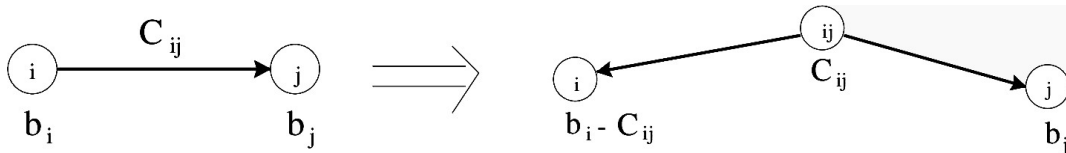


FIGURE 3

**Preuve :** Pour le réseau  $G$  de capacité  $c$ , les flots sont les solutions de  $\Phi_G x = b, 0 \leq x \leq c$  (\*). Il y a une bijection évidente (une projection) entre les solutions du système (\*) et les solutions de

$$\begin{bmatrix} \Phi_G & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad x, y \geq 0.$$

La nouvelle matrice agrandie est notée  $\widehat{\Phi}_G$  et on l'appelle matrice du réseau étendu. Au réseau  $G$ , dont l'ensemble des nœuds est  $V$  et l'ensemble des arcs est  $E$ , on associe le nouveau réseau  $\widehat{G}$ . L'ensemble des nœuds de  $\widehat{G}$  est l'union disjointe des ensembles  $V$  et  $E$ , et le réseau  $\widehat{G}$  est obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arc par deux nouveaux arcs, comme illustré dans la figure ci-dessus : à chaque  $f \in E$  sont associés  $f_1 = [f, j]$  et  $f_2 = [f, i]$ , où  $i$  est la queue de  $f$  et  $j$  son extrémité. Les deux flèches  $f_1$  et  $f_2$  sont orientées de sorte que leur origine commune  $\{f\}$  appartienne à l'ensemble  $E$  et leurs extrémités  $\{i\}$  et  $\{j\}$  à l'ensemble  $V$ . Ainsi,  $\widehat{G}$  est un graphe orienté, avec  $n + m$  nœuds et  $2m$  arcs. Si  $b \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'excédent et  $c \in \mathbb{R}^m$  le vecteur de capacité du réseau  $G$ , on définit un nouveau vecteur d'excédent  $\widehat{b} \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ . La projection de  $\widehat{b}$  sur  $\mathbb{R}^n$  a pour coordonnées  $\widehat{b}_i = b_i - \sum_{f \in E | \text{queue}(f)=i} \text{capacite}(f)$ . La projection de  $\widehat{b}$  sur  $\mathbb{R}^m$  est le vecteur de capacité  $c$ . Soit  $T_G$  la matrice dont une colonne correspond à un arc et une ligne à un nœud, définie comme suit. La colonne correspondant à un arc ne contient qu'une seule valeur non nulle : la base de la flèche reçoit un 1. Alors  $\Phi_G - T_G$  est la matrice dont une colonne correspond à un arc et où seule la *pointe* de la flèche reçoit un  $-1$ . Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} I & -T_G \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_G & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_G - T_G & -T_G \\ I & I \end{bmatrix}$$

est égale par définition à la matrice  $\Phi_{\widehat{G}}$ , les  $m$  premières colonnes correspondant aux nouvelles flèches  $f_1$ , et les dernières colonnes aux nouvelles flèches  $f_2$ . Solutions de

$$\begin{bmatrix} \Phi_G & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

sont solutions de l'équation

$$\Phi_{\widehat{G}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -T_G \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \widehat{b}.$$

On obtient ainsi une bijection entre les flux admissibles du réseau  $G$  et ceux du réseau non contraint  $\widehat{G}$ . Cette correspondance associe à l'arc  $f_1$  la valeur  $x_f$  et à l'arc  $f_2$  la valeur  $y_f = c_f - x_f$ .

**Exemple 2 :** *Considérons le réseau  $G_1$  de la figure 2. En appliquant la transformation du lemme précédent, on passe du réseau contraint au réseau non contraint  $G_2$  illustré dans la figure 4. Les excédents de ses nœuds sont indiqués dans la légende.*

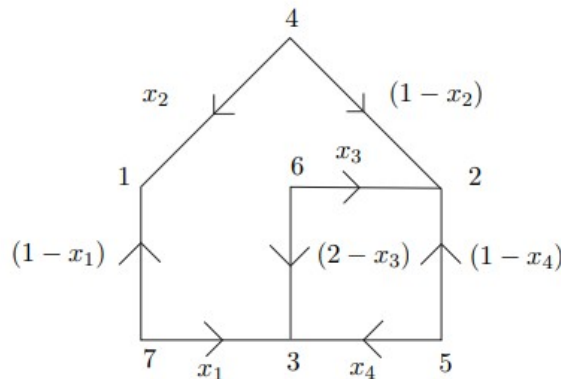


FIGURE 4 : Réseau  $G_2$  avec excès  $\{2, -4, -3, 1, 1, 2, 1\}$  et aucune capacité résultant du réseau capacitif de la figure 2.

En raison du lemme 1 et de ses applications intéressantes en théorie des représentations, il est pertinent de concentrer nos efforts sur le cas particulier des graphes acycliques non capacitifs, ce que nous faisons dans la section 2. Un cas particulier est ce que les théoriciens des représentations appellent les *fonctions de partition de Kostant* associées au graphe complet  $K_n$  à  $n$  nœuds. Il existe de nombreuses façons d'induire une orientation acyclique au graphe complet ; nous adoptons ici la convention d'orientation suivante : lorsqu'il existe une arête du graphe  $G$  entre  $i$  et  $j$ , avec  $i < j$ , alors la flèche est orientée de  $i$  vers  $j$ .

**Exemple 3** : *Considérons le graphe complet  $G$  à sommets  $1, 2, 3, 4$ . Dans ce cas, chaque sommet est relié à tous les autres et la matrice d'incidence du réseau est :*

$$\Phi_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un autre exemple de polytope de flot est le polytope de Pitman-Stanley, construit à partir d'un graphe à arêtes multiples :

**Exemple 4** : *Considérons le graphe à sommets  $(1, \dots, n)$  et aux arêtes issues de  $\{i, i+1\}$  et  $\{i, n\}$ , la dernière arête étant  $\{n-1, n\}$  de multiplicité deux. Dans le cas  $n = 3$ , alors*

$$\Phi_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De plus, au sein de la classe des polytopes de flot, nous étudierons les célèbres *polytopes de transport* [19]. Ces polytopes sont généralement décrits à l'aide de  $m$  matrices réelles  $n$  (notées ici  $M_{m,n}(\mathbb{R})$ ) : fixons  $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_+^n$  et  $d = (d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}_+^m$  tels que  $\sum_{i=1}^m d_i = \sum_{i=1}^n c_i$  et définissons  $T_{m,n}(d, c)$  comme l'ensemble

$$\left\{ X = \{x_{ij}\} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \ ; \ \begin{array}{l} x_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \\ \sum_k x_{ik} = d_i \quad 1 \leq i \leq m \\ \sum_k x_{kj} = c_j \quad 1 \leq j \leq n \end{array} \right\}.$$

Alors,  $T_{m,n}(d, c)$  est un polytope appelé *polytope de transport* associé aux vecteurs  $d, c$ . On constate aisément qu'il s'agit d'un autre polytope de flux sur un réseau biparti complet  $K_{m,n}$  (voir Figure 5), où les  $m$  premiers nœuds reçoivent les valeurs excédentaires  $(d_1, \dots, d_m)$  et les  $n$  nœuds du second bloc reçoivent les valeurs excédentaires  $(-c_1, -c_2, \dots, -c_n)$ . Les arcs sont orientés du premier bloc vers le second. Parmi les polytopes de transport, on trouve un élément remarquable, le *polytope de Birkhoff*, qui a fait l'objet de nombreuses études (voir par exemple les références de l'article récent [4]).

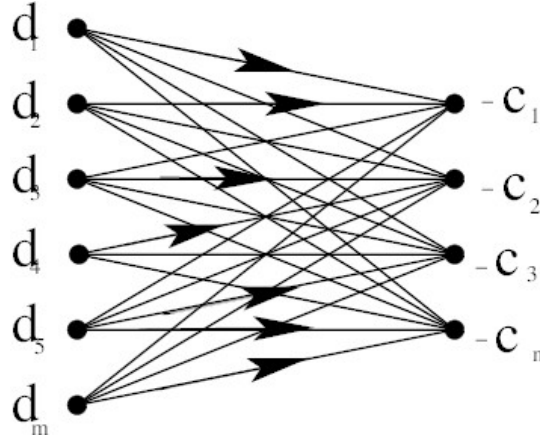


FIGURE 5 : Les polytopes de transport sont des polytopes de réseau de graphes bipartis complets.

Il est bien connu que les formules de dénombrement des flots entiers dans un réseau s'expriment par des fonctions polynomiales par morceaux (voir [8] , [22]). Il est donc important de comprendre les domaines de validité de chaque formule polynomiale, appelés *chambres*. La section [refchambres] s'attache à comprendre la structure des chambres et à déterminer leur nombre. La question du nombre de chambres possibles a été soulevée pour la première fois dans [15]. Les études combinatoires des chambres pour les fonctions de partition ont été initiées par [1]. Voir aussi [10].

## 1 Formules pour le volume et le nombre de points d'intégration des polytopes de flux.

Dans cette section, nous présentons les principes utilisés dans les algorithmes que nous avons implémentés pour le dénombrement des flots entiers. La méthode est valable pour les polytopes convexes généraux [2], [23], aussi la décrivons-nous dans un cadre général lorsque cela est possible. Dans la section 2, nous utiliserons des propriétés particulières des polytopes de flots associés aux graphes pour calculer les formules de dénombrement.

Soit  $\Phi$  une matrice entière  $r \times N$  dont les vecteurs colonnes sont  $\phi_1, \dots, \phi_N$ . Soit  $b$  un vecteur colonne de dimension  $r$  et  $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}_+^N \mid \Phi x = b\}$ , le polytope convexe rationnel associé à  $\Phi$  et  $b$ . On suppose que  $b$  appartient au cône  $C(\Phi)$  engendré par les combinaisons linéaires non négatives des colonnes  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$  de  $\Phi$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\text{rang}(\Phi) = r$ . Dans le cas contraire, on considère le sous-espace de  $\mathbb{R}^r$  engendré par les colonnes de notre matrice et on réécrit le polytope à l'aide d'une matrice de rang  $k$  appropriée et de dimension  $k \times N$ . Par exemple, pour les polytopes de réseau, les matrices ne sont pas de rang maximal, mais la suppression d'une ligne les rend de rang maximal.

Dans la suite, on suppose que  $\text{noyau}(\Phi) \cap \mathbb{R}_+^N = \{0\}$ . Alors  $0$  n'appartient pas à l'enveloppe convexe des vecteurs  $\phi_k$  et le cône  $C(\Phi)$  est un cône aigu dans  $\mathbb{R}^r$ . Pour  $a \in \mathbb{R}^r$ , on note  $P(\Phi, a) = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}_+^N \mid \sum_{j=1}^N x_j \phi_j = a\}$ .

Il est évident que  $P(\Phi, a)$  est un polytope convexe déterminé par la matrice  $\Phi$ . On définit :

$$v(\Phi, a) = \text{volume}(P(\Phi, a)).$$

Si  $\Phi$  engendre un réseau dans  $\mathbb{R}^r$  et si  $a$  appartient à ce réseau, alors on définit :

$$k(\Phi, a) = |P(\Phi, a) \cap \mathbb{Z}^N|.$$

Ainsi,  $k(\Phi, a)$  représente le nombre de solutions  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , parmi les entiers non négatifs  $x_j$ , de l'équation  $\sum_{j=1}^N x_j \phi_j = a$ . La fonction  $k(\Phi, a)$  est appelée la fonction de partition vectorielle associée à  $\Phi$ . Le terme "partition" provient du fait que si  $\Phi = [e_1, e_1, \dots, e_1]$  est la suite de  $N$  fois les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}$ , alors  $P_\Phi(ae_1) \cap \mathbb{Z}^N$  est l'ensemble des solutions de l'équation  $a = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ , c'est-à-dire la partition de l'entier  $a$  en  $N$  entiers. En particulier, la fonction  $a \rightarrow k(\Phi, a)$  dépend fortement des multiplicités dans le système  $\Phi$ . L'observation initiale fondamentale est la suivante :

**Théorème 5** : Soit  $z \in \mathbb{R}^r$  un vecteur du cône dual de  $C(\Phi)$ . Alors,

$$\int_{C(\Phi)} v(\Phi, a) e^{-\langle a, z \rangle} da = \frac{1}{\prod_{\phi \in \Phi} \langle \phi, z \rangle},$$

et

$$\sum_{a \in C(\Phi) \cap \mathbb{Z}^r} k(\Phi, a) e^{-\langle a, z \rangle} = \frac{1}{\prod_{\phi \in \Phi} (1 - e^{-\langle \phi, z \rangle})}.$$

L'objectif est de calculer les inverses de ces deux équations. L'intérêt réside dans la possibilité d'écrire des formules efficaces pour l'inversion des transformées de Laplace en fonction des résidus. Dans la suite, nous noterons indifféremment  $\langle \phi, z \rangle$  ou  $\phi(z)$ .

Soit  $\Delta^+$  l'ensemble  $\{\Phi\}$ , c'est-à-dire que les éléments de  $\Phi$  sont présents sans multiplicité. On définit  $\Delta = \Delta^+ \cup -\Delta^+$ . Un sous-ensemble  $\sigma$  de  $\Delta^+$  est appelé sous-ensemble basique si  $\{\sigma\}$  forme une base vectorielle de  $\mathbb{R}^r$ . Le complexe de chambres est la subdivision polyédrique du cône  $C(\Delta^+)$ , défini comme le raffinement commun des cônes simpliciaux  $C(\sigma)$  parcourant tous les sous-ensembles de base possibles de  $\Delta^+$ . Les éléments de cette subdivision sont appelés chambres. Nous étudierons les chambres en détail, et notamment leur calcul, dans la section "Chambres". Il est important de retenir que chaque chambre possède une formule quasi-polynomiale pour  $k(\Phi, a)$ , et nous expliquons maintenant comment obtenir cette formule pour une chambre donnée.

Chaque  $\phi \in \Delta$  détermine une forme linéaire sur  $\mathbb{C}^r$  et un hyperplan complexe  $\{z \in \mathbb{C}^r \mid \phi(z) = 0\}$  dans  $\mathbb{C}^r$ . Considérons l'arrangement d'hyperplans

$$\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \bigcup_{\phi \in \Delta} \{z \in \mathbb{C}^r \mid \phi(z) = 0\}$$

et soit  $R_{\Delta}$  l'espace des fonctions rationnelles de  $z \in \mathbb{C}^r$  ayant leurs pôles sur  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ . Une fonction de  $R_{\Delta}$  peut s'écrire  $P(z) / \prod_{\phi \in \Delta} \phi(z)^{n_{\phi}}$  où  $P$  est une fonction polynomiale à  $r$  variables complexes et où les  $n_{\phi}$  sont des entiers non négatifs. Un sous-ensemble  $\sigma$  de  $\Delta$  est appelé un sous-ensemble de base de  $\Delta$  si ses éléments  $\phi \in \sigma$  forment une base vectorielle de  $\mathbb{R}^r$ . Pour un tel  $\sigma$ , on définit

$$f_{\sigma}(z) := \frac{1}{\prod_{\phi \in \sigma} \phi(z)}.$$

Après un changement linéaire de coordonnées, la fonction  $f_{\sigma}$  se réduit à  $\frac{1}{z_1 z_2 \dots z_r}$  et on note  $S_{\Delta}$  le sous-espace de  $R_{\Delta}$  engendré par ces éléments "simples"  $f_{\sigma}$ . Les éléments  $f_{\sigma}$  ne sont généralement pas linéairement indépendants, comme on le voit dans l'exemple ci-dessous.

**Exemple 6** Soit  $\Delta^+$  l'ensemble  $\Delta^+ = \{e_1, e_2, (e_1 - e_2)\}$ . Alors, on a la relation linéaire suivante :

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{y(x-y)} - \frac{1}{x(x-y)}$$

entre les éléments  $f_{\sigma_1}, f_{\sigma_2}, f_{\sigma_3}$  avec  $\sigma_1 = \{e_1, e_2\}$ ,  $\sigma_2 = \{e_1, (e_1 - e_2)\}$  et  $\sigma_3 = \{e_2, (e_1 - e_2)\}$  sous-ensembles fondamentaux de  $\Delta^+$ .

La différentiation partielle  $\partial_i$  préserve l'espace  $R_\Delta$ . Le résultat essentiel dont nous avons besoin est l'existence d'une décomposition bien définie de  $R_\Delta$  sous l'action des différentiations partielles : une partie de module libre engendrée par les fonctions rationnelles de base  $f_\sigma$ , et une partie de module de torsion, inutile pour les calculs et négligeable.

**Théorème 7 : (Brion-Vergne [9])** L'espace vectoriel  $S_\Delta$  est inclus dans la composante homogène de degré  $-r$  de  $R_\Delta$  et nous avons la décomposition en somme directe

$$R_\Delta = S_\Delta \oplus \left( \sum_{i=1}^r \partial_i R_\Delta \right).$$

On appelle l'application de projection

$$\text{Tres}_\Delta : R_\Delta \rightarrow S_\Delta$$

selon cette décomposition l'**application de résidu total**.

La projection  $\text{Tres}_\Delta(f)$  d'une fonction  $f$  ayant des pôles sur l'union d'hyperplans  $\mathcal{H}_\mathbb{C}$  ne dépend que du plus petit arrangement d'hyperplans  $\mathcal{H}'_\mathbb{C}$  contenant les pôles de  $f$ . On note donc  $\text{Tres}(f)$  le résidu d'une fonction rationnelle  $f$  dont le dénominateur est un produit de formes linéaires.

**Exemple 8** Remarquons que si l'on travaille dans  $\mathbb{R}^1$  et que  $\Delta = \{\pm e_1\}$ , alors  $R_\Delta$  est l'espace des séries de Laurent

$$L = \left\{ f(z) = \sum_{k \geq -q} a_k z^k \right\}.$$

Le résidu total d'une fonction  $f(z) \in L$  est la fonction  $\frac{a_{-1}}{z}$ . Le résidu usuel, noté  $\text{Res}_{z=0} f$ , est la constante  $a_{-1}$ .

On note  $\widehat{R}_\Delta$  l'extension évidente de  $R_\Delta$ , obtenue en remplaçant l'espace des fonctions polynomiales à  $r$  variables par l'espace des séries formelles à  $r$  variables. Soit  $F : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}^r$  une application analytique telle que  $F(0) = 0$  et préservant chaque hyperplan  $\phi = 0$ . Si  $f \in \widehat{R}_\Delta$ , la fonction  $(F^* f)(z) = f(F(z))$  appartient également à  $\widehat{R}_\Delta$ . Soit  $\text{Jac}(F)$  le jacobien de l'application  $F$ . La fonction  $\text{Jac}(F)$  se calcule comme suit : on pose  $F(z) = (F_1(z_1, z_2, \dots, z_r), \dots, F_r(z_1, z_2, \dots, z_r))$ . Alors  $\text{Jac}(F) = \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_i} F_j\right)_{i,j}\right)$ . On suppose que  $\text{Jac}(F)(0)$  est non nul. Pour toute fonction  $f$  appartenant à  $\widehat{R}_\Delta$ , la formule de changement de variable suivante, qui nous sera utile par la suite, est valable dans  $S_\Delta$  :

$$\text{Tres}(f) = \text{Tres}(\text{Jac}(F)(F^* f)).$$

Notons que le résidu total d'une fonction rationnelle est lui-même une fonction rationnelle. Par définition, cette fonction peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de fractions simples  $f_\sigma(z)$ . Si  $f \in S_\Delta$ , alors  $\text{Tres}(f)$  est égal à  $f$ . On sait également que  $\text{Tres}$  s'annule sur les fonctions rationnelles homogènes de degré  $m$ , dès que  $m \neq -r$ , et que  $\text{Tres}$  s'annule sur les dérivées. Si  $f = \frac{P}{\prod_k \langle \phi_k, z \rangle}$  (où  $P$  est un polynôme à  $r$  variables) a pour dénominateur un produit de formes linéaires  $\langle \phi_k, z \rangle$  qui ne dégènèrent<sup>2</sup> pas, alors il est facile de voir que  $f$  est une dérivée et que le résidu total de  $f$  est égal à 0. Nous pouvons maintenant fixer nos notations et rappeler les formules essentielles.

**Définition 9** : Pour  $a \in \mathbb{R}^r$ , définissons

$$\begin{aligned} J_\Phi(a)(z) &= \text{Tres} \left( \frac{e^{\langle a, z \rangle}}{\prod_{k=1}^N \langle \phi_k, z \rangle} \right) \\ &= \frac{1}{(N-r)!} \text{Tres} \left( \frac{\langle a, z \rangle^{N-r}}{\prod_{k=1}^N \langle \phi_k, z \rangle} \right) \end{aligned}$$

et sa version "périodique"

$$K_\Phi(a)(z) = \text{Tres} \left( \frac{e^{\langle a, z \rangle}}{\prod_{k=1}^N 1 - e^{-\langle \phi_k, z \rangle}} \right).$$

L'égalité :

$$\text{Tres} \left( \frac{e^{\langle a, z \rangle}}{\prod_{k=1}^N \langle \phi_k, z \rangle} \right) = \frac{1}{(N-r)!} \text{Tres} \left( \frac{\langle a, z \rangle^{N-r}}{\prod_{k=1}^N \langle \phi_k, z \rangle} \right)$$

découle immédiatement du fait que le résidu total s'annule pour les fonctions rationnelles homogènes de degré  $m$ , dès que  $m \neq -r$ .

Par définition,  $J_\Phi(a)(z)$  et  $K_\Phi(a)(z)$  sont des fonctions rationnelles de  $z$  homogènes en  $z$  de degré  $-r$ . Ce sont des fonctions polynomiales de  $a$  de degré  $N-r$ , et la partie homogène en  $a$  de degré  $(N-r)$  dans  $K_\Phi(a)(z)$  est  $J_\Phi(a)(z)$ .

**Exemple 10** Calculons  $J_\Phi(a)(z)$  et  $K_\Phi(a)(z)$  dans le cas du polytope de Pitman-Stanley associé à  $\Phi_G$  de l'exemple 4. La matrice  $\Phi_G$  est une matrice  $3 \times 4$  de rang 2. La suppression de la dernière ligne entraîne

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

2. Note de la traductrice : degenerate (dégénèrent) au lieu de generate ?

Alors on a

$$\begin{aligned}
J_{\Phi}(a_1, a_2)(z_1, z_2) &= \text{Tres} \left( \frac{e^{(a_1 z_1 + a_2 z_2)}}{(z_1 - z_2) z_1 z_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{2!} \text{Tres} \left( \frac{(a_1 z_1 + a_2 z_2)^2}{(z_1 - z_2) z_1 z_2^2} \right) \\
&= \frac{a_1^2}{2} \text{Tres} \left( \frac{z_1^2}{(z_1 - z_2) z_1 z_2^2} \right) + a_1 a_2 \text{Tres} \left( \frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2) z_1 z_2^2} \right) + \frac{a_2^2}{2} \text{Tres} \left( \frac{z_2^2}{(z_1 - z_2) z_1 z_2^2} \right) \\
&= \frac{a_1^2}{2} \text{Tres} \left( \frac{z_1}{(z_1 - z_2) z_2^2} \right) + a_1 a_2 \text{Tres} \left( \frac{1}{(z_1 - z_2) z_2} \right) + \frac{a_2^2}{2} \text{Tres} \left( \frac{1}{(z_1 - z_2) z_1} \right).
\end{aligned}$$

Maintenant  $\frac{1}{(z_1 - z_2) z_2}$  et  $\frac{1}{(z_1 - z_2) z_1}$  sont des éléments simples de sorte qu'ils soient égaux à leur résidu total respectif. Pour calculer le résidu total de  $\frac{z_1}{(z_1 - z_2) z_2^2}$ , on écrit  $z_1$  comme une combinaison linéaire de formes linéaires au dénominateur, afin de réduire le degré du dénominateur :

$$\frac{z_1}{(z_1 - z_2) z_2^2} = \frac{(z_1 - z_2) + z_2}{(z_1 - z_2) z_2^2} = \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{(z_1 - z_2) z_2}.$$

Le résidu total de  $\frac{1}{z_2^2}$  est 0, comme  $\frac{1}{z_2^2} = -\frac{\partial}{\partial z_2} \frac{1}{z_2}$  est une dérivé, par conséquent  $\text{Tres} \left( \frac{z_1}{(z_1 - z_2) z_2^2} \right) = \frac{1}{(z_1 - z_2) z_2}$ . On obtient finalement :

$$J_{\Phi}(a_1, a_2)(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2}{(z_1 - z_2) z_2} + \frac{1}{2} \frac{a_2^2}{(z_1 - z_2) z_1}.$$

On calcule maintenant :

$$K_{\Phi}(a_1, a_2)(z_1, z_2) = \text{Tres} \left( \frac{e^{(a_1 z_1 + a_2 z_2)}}{(1 - e^{-(z_1 - z_2)})(1 - e^{-z_1})(1 - e^{-z_2})^2} \right).$$

Ceci est égal à

$$\text{Tres} \left( \frac{1}{(z_1 - z_2) z_1 z_2^2} e^{(a_1 z_1 + a_2 z_2)} \frac{(z_1 - z_2)}{(1 - e^{-(z_1 - z_2)})} \frac{z_1}{(1 - e^{-z_1})} \frac{z_2^2}{(1 - e^{-z_2})^2} \right).$$

On remplace la fonction analytique

$$e^{(a_1 z_1 + a_2 z_2)} \frac{(z_1 - z_2)}{(1 - e^{-(z_1 - z_2)})} \frac{z_1}{(1 - e^{-z_1})} \frac{z_2^2}{(1 - e^{-z_2})^2}$$

par sa série de Taylor en  $z_1 = 0, z_2 = 0$ , et on ne garde que son terme  $N(a_1, a_2)(z_1, z_2)$  de degré homogène 2 en  $z_1, z_2$  qui est

$$\left( \frac{5}{12} + a_1 + \frac{1}{2} a_1^2 \right) z_1^2 + \left( \frac{7}{12} + a_2 + \frac{1}{2} a_1 + a_1 a_2 \right) z_1 z_2 + \left( \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_2^2 \right) z_2^2.$$

Ainsi,  $K_{\Phi}(a_1, a_2)(z_1, z_2)$  est égal à

$$\text{Tres} \left( \frac{N(a_1, a_2)(z_1, z_2)}{(z_1 - z_2)z_1z_2^2} \right).$$

En raisonnant comme pour  $J_{\Phi}$ , on obtient finalement que  $K_{\Phi}(a_1, a_2)(z_1, z_2)$  est égal à

$$\frac{1}{2} \frac{a_1^2 + 2a_1a_2 + 3a_1 + 2a_2 + 2}{(z_1 - z_2)z_2} + \frac{1}{2} \frac{a_2^2 + a_2}{(z_1 - z_2)z_1}.$$

Nous sommes maintenant prêtes à écrire les formules permettant de calculer le volume et le nombre de points d'intégration. Voir [2], section 2 pour plus de détails. À chaque chambre  $\mathfrak{c}$  de la subdivision de  $C(\Delta^+)$  est associée une forme linéaire  $f \rightarrow \langle\langle \mathfrak{c}, f \rangle\rangle$  sur  $S_{\Delta}$ . Si le système  $\Phi$  est unimodulaire, comme c'est le cas pour les réseaux, il prend la valeur 1 ou 0 sur  $f_{\sigma}$  selon que  $\mathfrak{c}$  est inclus ou non dans  $C(\sigma)$ .

**Théorème 11** : (Baldoni-Vergne) [2] Soit  $\mathfrak{c}$  une chambre de la subdivision de  $C(\Delta^+)$ .

1. Pour  $a \in \bar{\mathfrak{c}}$ , le volume de  $P(\Phi, a)$  est donné par :

$$v(\Phi, a) = \langle\langle \mathfrak{c}, J_{\Phi}(a) \rangle\rangle.$$

2. Si le système  $\Phi$  est unimodulaire, alors pour  $a \in \bar{\mathfrak{c}} \cap \mathbb{Z}\Phi$ , le nombre de points entiers dans  $P(\Phi, a)$  est donné par :

$$k(\Phi, a) = \langle\langle \mathfrak{c}, K_{\Phi}(a) \rangle\rangle.$$

3. La fonction  $a \mapsto v(\Phi, a)$  est polynomiale sur une chambre  $\mathfrak{c}$ .

4. Si le système  $\Phi$  est unimodulaire, comme c'est le cas pour les réseaux, la fonction d'Ehrhart  $a \mapsto k(\Phi, a)$  est polynomiale sur un voisinage spécifié d'une chambre  $\mathfrak{c}$ .

Une formule plus générale pour un  $\Phi$  quelconque engendrant un réseau  $\mathbb{Z}\Phi$  dans  $\mathbb{R}^r$  est donnée dans [23]. La question est maintenant de savoir comment appliquer ces deux formules aux calculs avec des polytopes de flot. Le calcul des résidus totaux sera considérablement simplifié.

## 2 Comptage des flots d'entiers dans les réseaux

Dans cette section, nous nous concentrerons sur les polytopes de flot pour les graphes orientés acycliques. Nous avons déjà justifié dans l'introduction la pertinence de cette approche, car d'autres réseaux peuvent être réduits à des réseaux acycliques non capacitifs. Considérons un espace vectoriel de dimension réelle  $r + 1$ . Soit  $A_r^+$  (le système des racines positives de  $A_r$ ) défini par :

$$A_r^+ = \{(e_i - e_j) | 1 \leq i < j \leq (r + 1)\}.$$

Soit  $E_r$  l'espace vectoriel engendré par les éléments  $(e_i - e_j)$ , alors

$$E_r = \{a \in \mathbb{R}^{r+1} | a = a_1e_1 + \dots + a_re_r + a_{r+1}e_{r+1} \text{ avec } a_1 + a_2 + \dots + a_r + a_{r+1} = 0\}.$$

L'espace vectoriel  $E_r$  est de dimension  $r$  et l'application

$$f : \mathbb{R}^r \longrightarrow E_r \tag{1}$$

définie par

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_r) \longmapsto \mathbf{a} = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r - (a_1 + \dots + a_r) e_{r+1}$$

fournit explicitement un isomorphisme de  $E_r$  avec l'espace euclidien  $\mathbb{R}^r$ . Soit, comme précédemment,  $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  une suite de formes linéaires non nulles appartenant à  $A_r^+$ . Nous supposons que l'espace vectoriel engendré par  $\Phi$  est  $E_r$ . Cette suite est entièrement déterminée par la multiplicité  $m_{i,j}$  du vecteur  $e_i - e_j$  dans  $\Phi$ . Explicitement pour le polytope de transport  $T_{m,n}(d, c)$ , si nous notons  $\Phi_{m,n} \subset A_{m+n-1}^+$  les racines qui lui sont associées, alors on a

$$\Phi_{m,n} = \{(e_i - e_j) \mid 1 \leq i < m, m+1 \leq j \leq m+n\}.$$

On a donc  $m_{i,j} = 1$  si  $1 \leq i \leq m$ ,  $m+1 \leq j \leq m+n$ , et  $m_{i,j} = 0$  sinon.

Il est clair que le polytope  $P(\Phi, a)$  est le polytope associé au réseau non capacitif à  $(r+1)$  nœuds, où l'arc  $i \mapsto j$  ( $i < j$ ) apparaît  $m_{i,j}$  fois ( $m_{i,j}$  peut être 0 pour certains arcs), et avec une fonction d'excès  $a_i$  à chaque nœud  $1, 2, \dots, r$  et  $-(a_1 + a_2 + \dots + a_r)$  au dernier nœud  $r+1$ . Nous avons en effet vu dans la remarque 3 que les colonnes de la matrice correspondant à  $P(\Phi, a)$  sont des vecteurs de la forme  $e_i - e_j$  pour certains  $i$  et  $j$ .

L'arrangement d'hyperplans (en posant  $z_{r+1} = 0$ ) engendré par  $A_r^+$  est donné par l'ensemble d'hyperplans suivant :

$$\{z_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{(z_i - z_j) \mid 1 \leq i < j \leq r\}.$$

Une fonction de  $R_{A_r}$  est donc une fonction rationnelle  $f(z_1, z_2, \dots, z_r)$  sur  $\mathbb{C}^r$ , dont les pôles se situent sur les hyperplans  $z_i = z_j$  ou  $z_i = 0$ . Le résultat suivant est démontré par récurrence dans [2], Proposition 14.

**Lemme 12** : Soit  $\Sigma_r$  l'ensemble des permutations sur  $\{1, 2, \dots, r\}$  et  $f_\pi, f_w, w \in \Sigma_r$  définies par

$$f_\pi(z_1, z_2, \dots, z_r) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3) \cdots (z_{r-1} - z_r) z_r}$$

et

$$\begin{aligned} f_w(z_1, \dots, z_r) &= w \cdot f_\pi(z_1, \dots, z_r) \\ &= \frac{1}{(z_{w(1)} - z_{w(2)})(z_{w(2)} - z_{w(3)}) \cdots (z_{w(r-1)} - z_{w(r)}) z_{w(r)}} \end{aligned}$$

alors  $\dim S_{A_r} = r!$  et  $\{f_w(z_1, \dots, z_r) = w \cdot f_\pi(z_1, \dots, z_r), w \in \Sigma_r\}$  est une base pour  $S_{A_r}$ .

Le cône  $C(A_r^+)$  engendré par les racines positives est le cône

$$a_1 \geq 0, a_1 + a_2 \geq 0, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_r \geq 0$$

On note  $\mathfrak{c}^+$  l'ouvert de  $C(A_r^+)$  défini par

$$\mathfrak{c}^+ = \{a \in C(A_r^+) \mid a_i > 0, i = 1, \dots, r\}.$$

Il s'agit d'une chambre de notre subdivision, que nous appellerons la "belle chambre". L'importance de cette chambre réside dans le fait que ses "permutations" forment une "base" pour les formules qui expriment le volume et le nombre de points entiers. Si  $\mathfrak{c}$  est une chambre de  $C(\Phi)$ , alors il existe une unique chambre de  $C(A_r^+)$  qui contient  $\mathfrak{c}$ .

**Définition 13** : [2] Soit  $m_{i,j}$  ( $i < j$ ) la multiplicité du vecteur  $e_i - e_j$  dans  $\Phi$  (c'est-à-dire le nombre de fois où l'arc  $i, j$  est présent dans le réseau). Soit  $N = \sum_{i,j} m_{i,j}$  le nombre total d'arcs. Nous définissons explicitement les fonctions  $J_\Phi(a)$  et  $K_\Phi(a)$  pour nos choix de  $\Phi$  et  $a$ . Sachant que  $z_{r+1} = 0$ , nous avons que

- $J_\Phi(a)(z_1, \dots, z_r) = \frac{1}{(N-r)!} \text{Tres} \left( \frac{(a_1 z_1 + \dots + a_r z_r)^{N-r}}{z_1^{m_{1,r+1}} z_2^{m_{2,r+1}} \dots z_r^{m_{r,r+1}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{m_{ij}}} \right),$
- $K_\Phi(a)(z_1, \dots, z_r) = \text{Tres} \left( \frac{e^{a_1 z_1} e^{a_2 z_2} \dots e^{a_r z_r}}{\prod_{i=1}^r (1 - e^{-z_i})^{m_{i,r+1}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (1 - e^{-(z_i - z_j)})^{m_{ij}}} \right).$

Nous allons maintenant illustrer ces fonctions par deux exemples précis.

**Exemple 14** Considérons le polytope associé à un graphe biparti complet à 3 nœuds de chaque côté. Rappelons que, dans ce cas, la matrice qui définit le polytope est donnée par les vecteurs  $\Phi = \{e_1 - e_4, e_1 - e_5, e_1 - e_6, e_2 - e_4, e_2 - e_5, e_2 - e_6, e_3 - e_4, e_3 - e_5, e_3 - e_6\}$ . Donc

$$\begin{cases} m_{i,j} = 1 & \text{si } 1 \leq i \leq 3 \text{ et } 4 \leq j \leq 6 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

- $J_\Phi(a)(z_1, \dots, z_5) = \frac{1}{4!} \text{Tres} \left( \frac{(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 + a_5 z_5)^4}{z_1 z_2 z_3 \prod_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 4 \leq j \leq 5}} (z_i - z_j)} \right),$
- $K_\Phi(a)(z_1, \dots, z_5) = \text{Tres} \left( \frac{e^{a_1 z_1} e^{a_2 z_2} e^{a_3 z_3} e^{a_4 z_4} e^{a_5 z_5}}{\prod_{i=1}^3 (1 - e^{-z_i}) \prod_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 4 \leq j \leq 5}} (1 - e^{-(z_i - z_j)})} \right).$

**Exemple 15** Nous considérons le polytope déterminé par le graphe complet  $K_5$ , autrement dit  $\Phi = A_4^+$ . Nous obtenons

- $J_\Phi(a)(z_1, \dots, z_4) = \frac{1}{6!} \text{Tres} \left( \frac{(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4)^6}{z_1 z_2 z_3 z_4 \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (z_i - z_j)} \right),$
- $K_\Phi(a)(z_1, \dots, z_4) = \text{Tres} \left( \frac{e^{a_1 z_1} e^{a_2 z_2} e^{a_3 z_3} e^{a_4 z_4}}{\prod_{i=1}^4 (1 - e^{-z_i}) \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (1 - e^{-(z_i - z_j)})} \right).$

Lorsqu'on traite les formules de calcul du volume et du nombre de points entiers, le premier problème est celui du calcul du résidu total. C'est généralement une tâche très complexe. Cependant, comme nous l'avons vu,  $S_{A_r}$  offre une base très élégante qui nous permettra de réécrire les formules en termes de résidus itérés, ce qui les rend nettement plus faciles à manipuler. Il s'agit de trouver certains cônes simpliciaux contenant la chambre définie par  $a$ , mais pas tous. Cette étape permet de réduire la complexité de l'algorithme. Nous allons maintenant introduire le résidu itéré pour  $A_r$ .

Rappelons que, par identification de  $E_r$  avec  $\mathbb{R}^r$ , une fonction de  $R_{A_r}$  est une fonction rationnelle  $f(z_1, z_2, \dots, z_r)$  sur  $\mathbb{C}^r$ , dont les pôles se situent sur les hyperplans  $z_i = z_j$  ou  $z_i = 0$ . Pour une permutation  $\sigma \in \Sigma_r$ , on définit la forme linéaire sur  $R_{A_r}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ires}_{z=0}^\sigma f &= \text{Res}_{z_{\sigma(1)}=0} \text{Res}_{z_{\sigma(2)}=0} \cdots \text{Res}_{z_{\sigma(r)}=0} f(z_1, z_2, \dots, z_r) \\ &= \text{Res}_{z_1=0} \text{Res}_{z_2=0} \cdots \text{Res}_{z_r=0} f(z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(r)}). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $\sigma = id$ , la forme linéaire  $f \mapsto \text{Ires}_{z=0} f$  définie par

$$\text{Ires}_{z=0} f = \text{Res}_{z_1=0} \text{Res}_{z_2=0} \cdots \text{Res}_{z_r=0} f(z_1, z_2, \dots, z_r)$$

est appelée le *résidu itéré*.

### Remarque

- La forme linéaire  $f \mapsto \text{Ires}_{z=0}^\sigma f$  sur  $R_{A_r}$  induit une forme linéaire sur  $S_{A_r}$ , puisqu'elle s'annule sur l'espace vectoriel des dérivées  $\sum_{i=1}^r \partial_i R_{A_r}$ .
- $\text{Ires}_{z=0}^\sigma f_w = \delta_w^\sigma$ .
- Les  $r!$  formes linéaires  $\text{Ires}_{z=0}^\sigma f, \sigma \in \Sigma_r$ , sur  $S_{A_r}$  sont duales à la base  $f_w$ .

Les résidus itérés sont plus faciles à comprendre, et nous verrons prochainement comment les utiliser avec nos formules. Soit  $w \in \Sigma_r$  et  $n(w)$  le nombre d'éléments  $i$  tels que  $w(i) > w(i+1)$  (on appelle cela le nombre de descentes de la permutation  $w$  dans [20]). On note  $C_w^+ \subset C(A_r^+)$  le cône simplicial engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned} &\epsilon(1)(e_{w(1)} - e_{w(2)}), \\ &\epsilon(2)(e_{w(2)} - e_{w(3)}), \\ &\dots, \\ &\epsilon(r-1)(e_{w(r-1)} - e_{w(r)}), \\ &(e_{w(r)} - e_{r+1}), \end{aligned}$$

où  $\epsilon(i)$  vaut 1 ou -1 selon que  $w(i) < w(i+1)$  ou non. Lorsque  $w = 1$ , alors  $C_1 = C(A_r^+)$ . Le lemme suivant se démontre aisément.

**Lemme 16** : Soit  $a = \sum_{j=1}^{r+1} a_j e_j$  dans  $E_r$ . Le cône  $C_w^+ \subset E_r$  est défini par le système d'inégalités suivant :  $\sum_{j=1}^i a_{w(j)} \geq 0$ , pour tout  $i$  tel que  $w(i) < w(i+1)$ , mais  $\sum_{j=1}^i a_{w(j)} \leq 0$  si  $w(i) > w(i+1)$ .

D'après le théorème 11, on obtient :

**Théorème 17** : [2] Soit  $\mathbf{c}$  une chambre de  $C(\Phi)$ . Considérons l'ensemble des éléments  $w \in \Sigma_r$  tels que  $\mathbf{c} \subset C_w^+$ . Alors, pour  $f \in S_{A_r}$ ,

$$\langle \langle \mathbf{c}, f \rangle \rangle = \sum_{w \in \Sigma_r, \mathbf{c} \subset C_w^+} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0} w^{-1} f.$$

En particulier, pour  $f = J_\Phi(a)$ , on obtient la

**Formule 1** : pour  $a \in \bar{c}$ , on a

$$v(\Phi, a) = \langle \langle \mathbf{c}, J_\Phi(a) \rangle \rangle = \sum_{w \in \Sigma_r, \mathbf{c} \subset C_w^+} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0}^w J_\Phi(a).$$

La formule découle directement du fait que  $\text{Ires}_{z=0}^w$  est la base duale de  $f_w$ . Nous avons vu que pour calculer le nombre de points entiers de notre polytope, il faut calculer  $K_\Phi(a)$ .

Soit  $t_j = m_{j,j+1} + \dots + m_{j,r+1} - 1$ , où l'on rappelle que  $m_{i,j}$  est la multiplicité de la racine  $e_i - e_j$  dans  $\Phi$ . Après un changement de variable pour le résidu total, on obtient :

**Théorème 18** : Soit  $a = \sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i$  dans  $E_r \cap \mathbb{Z}^{r+1}$ . Soit

$$f_\Phi(a)(z) = \frac{(1+z_1)^{a_1+t_1} (1+z_2)^{a_2+t_2} \dots (1+z_r)^{a_r+t_r}}{z_1^{m_{1,r+1}} z_2^{m_{2,r+2}} \dots z_r^{m_{r,r+1}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{m_{ij}}}$$

Alors, on a la **Formule 2** : pour  $a \in \bar{\mathfrak{c}}$ ,

$$k(\Phi, a) = \sum_{w \in \Sigma_r, \mathfrak{c} \subset C_w^+} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0}^w f_\Phi(a).$$

Nous souhaitons maintenant donner une formulation encore plus explicite du résultat précédent, adaptée à une implémentation directe. Pour cela, nous devons introduire quelques notations supplémentaires. Pour  $a \in E_r$ , soit  $\text{def}(a)$  définie par  $\text{def}(a) = a + \epsilon \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha + \epsilon^2 (\sum_{i=1}^r e_i - r e_{r+1})$  avec  $\epsilon = \frac{1}{2mr^2}$  et  $m$  le maximum des multiplicités  $m_{ij}$ .

Un mur de  $A_r^+$  est un hyperplan engendré par  $r - 1$  éléments linéairement indépendants de  $A_r^+$ . Les cellules de  $C(A_r^+) \setminus \mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}$  étant l'ensemble des hyperplans de  $A_r^+$ ) sont des cellules ouvertes, à l'intérieur de cônes polyédriques. Nous appellerons ces cellules ouvertes des *topes*. Nous dirons que  $a \in C(A_r^+)$  est *régulier* si  $a$  n'appartient à aucune paroi de  $A_r^+$ . Les parois de  $A_r^+$  sont facilement caractérisées puisqu'elles sont le noyau d'une forme linéaire de la forme  $\sum_{i \in J} a_i$ , où  $J$  est un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Il est alors facile de déterminer si un vecteur  $a$  est régulier ou non.

Si  $a$  est un élément régulier, nous notons  $\mathfrak{c}$  l'unique chambre de  $C(A_r^+)$  le contenant. L'ensemble  $\text{Sp}(a) = \{w \in \Sigma_r \mid \mathfrak{c} \subset C_w^+\}$  peut alors être calculé sans connaissance explicite de la chambre. En effet, on constate aisément que l'ensemble  $\text{Sp}(a)$  est constitué des  $w \in \Sigma_r$  qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{si } a_{w(1)} \geq 0 & \text{alors } w(1) < w(2) & \text{sinon } w(1) > w(2) \\ \text{si } a_{w(1)} + a_{w(2)} \geq 0 & \text{alors } w(2) < w(3) & \text{sinon } w(2) > w(3) \\ \dots & & \\ \text{si } a_{w(1)} + \dots + a_{w(i)} \geq 0 & \text{alors } w(i) < w(i+1) & \text{sinon } w(i) > w(i+1) \\ \dots & & \\ \text{si } a_{w(1)} + \dots + a_{w(r-1)} \geq 0 & \text{alors } w(r-1) < w(r) & \text{sinon } w(r-1) > w(r) \end{array} \right\}$$

Un élément de  $\text{Sp}(a)$  sera appelé une *permutation spéciale*.

Remarquons que si  $a_i \geq 0$  pour tout  $i \leq r$ , alors  $a = \sum_{i=1}^r a_i e_i - (\sum_{i=1}^r a_i) e_{r+1}$  appartient à l'adhérence de la *belle chambre*  $\mathfrak{c}^+$  et  $\text{Sp}(a) = \{id\}$ .

On peut maintenant énoncer le théorème de la fonction constante comme suit :

**Théorème 19** : Soit  $\Phi \subset A_r^+$  un système engendrant  $E_r$ .

Soit  $a = \sum_{i=1}^{r+1} a_i e_i \in E_r$ ,  $a_{r+1} = -(a_1 + \dots + a_r)$ ,  $a_i \in \mathbb{Z}$  et supposons que  $a \in C(A_r^+)$ .

Écrivons

$$f_\Phi(a_1, a_2, \dots, a_r)(z) = \frac{(1+z_1)^{a_1+t_1}(1+z_2)^{a_2+t_2} \dots (1+z_r)^{a_r+t_r}}{z_1^{m_{1,r+1}} z_2^{m_{2,r+2}} \dots z_r^{m_{r,r+1}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{m_{ij}}}.$$

Alors

- **Formule 2A** : si  $a$  est régulier alors

$$k(\Phi, a) = \sum_{w \in \text{Sp}(a)} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0}^w f_\Phi(a).$$

- **Formule 2B** : si  $a$  n'est pas régulier alors

$$k(\Phi, a) = \sum_{w \in \text{Sp}(\text{def}(a))} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0}^w f_\Phi(a).$$

**Remarque** : la formule 2B du théorème découle de l'observation que la chambre contenant l'élément régulier  $\text{def}(a)$  contient  $a$  dans sa fermeture. La déformation doit être effectuée avec soin pour traiter certains cas limites. Le lemme suivant, énoncé par souci d'exhaustivité, montre que la déformation avec  $a_i$  entiers est suffisamment petite pour prendre en compte de tels cas.

**Lemme 20** : Étant donné  $a \in C(A_r^+) \cap \mathbb{Z}^{r+1}$ , on définit

$$\text{def}(a) := a + \epsilon \sum_{\alpha \in \Phi} \alpha + \epsilon^2 \left( \sum_{i=1}^r e_i - r e_{r+1} \right), \quad \epsilon = \frac{1}{2mr^2}$$

où  $m$  est le maximum des multiplicités  $m_{ij}$ . Alors, on a :

- $\text{def}(a)$  est régulier, c'est-à-dire qu'il appartient à une chambre ;
- Si  $\tau$  est un tore et  $a \in \tau$ , alors  $\text{def}(a) \in \tau$  ;
- $a \in C(A_r^+)$  si et seulement si  $\text{def}(a) \in C(A_r^+)$  ;
- Plus généralement, si  $\Phi$  est un sous-ensemble de  $A_r^+$ ,  $a \notin C(\Phi)$  si et seulement si  $\text{def}(a) \notin C(\Phi)$ .

Par exemple, on obtient la formule suivante pour le réseau complet  $K_{r+1}$  à  $r+1$  nœuds, avec le vecteur d'excès  $a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} = -\sum_{i=1}^r a_i$ . Dans ce cas, la fonction  $k(A_r^+, a)$  est appelée la fonction de partition de Kostant et elle revêt une importance particulière pour la théorie de la représentation du groupe  $\text{GL}(r+1, \mathbb{C})$ .

**Corollaire 21** : pour  $a \in C(A_r^+) \cap \mathbb{Z}^{r+1}$ , la fonction de partition de Kostant est donnée par :

$$k(A_r^+, a) = \sum_{w \in \text{Sp}(a')} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0}^w \frac{(1+z_1)^{a_1+r-1}(1+z_2)^{a_2+r-2} \dots (1+z_r)^{a_r}}{z_1 \dots z_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)}$$

où

$$a' = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ est régulier} \\ \text{def}(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, si if  $a_i \geq 0$  pour  $1 \leq i \leq r$ , on a

$$k(A_r^+, a) = \text{Res}_{z_1=0} \text{Res}_{z_2=0} \cdots \text{Res}_{z_r=0} \left( \frac{(1+z_1)^{a_1+r-1} (1+z_2)^{a_2+r-2} \cdots (1+z_r)^{a_r}}{z_1 \cdots z_r \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)} \right).$$

De façon similaire, on peut écrire une formule pour le polytope de transport  $T_{m,n}(d, c)$ .

**Corollaire 22** : Soit  $a = \sum_{i=1}^m d_i e_i - \sum_{j=1}^n c_j e_{m+j}$ , avec  $d_i$  et  $c_j$  des entiers non négatifs. Alors le nombre de points entiers dans  $T_{m,n}(d, c)$  est égal à

$$\sum_{w \in \text{Sp}(a')} (-1)^{n(w)} \text{Ires}_{z=0}^w \frac{(1+z_1)^{d_1+n-1} (1+z_2)^{d_2+n-1} \cdots (1+z_m)^{d_m+n-1} (1+z_{m+1})^{-c_1-1} \cdots (1+z_{m+n-1})^{-c_{n-1}-1}}{z_1 \cdots z_m \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n-1}} (z_i - z_{m+j})}$$

où

$$a' = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ est régulier} \\ \text{def}(a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

## 2.1 Algorithme de comptage des flots intégraux.

Cette section décrit brièvement les différentes procédures algorithmiques implémentées avec le langage symbolique `Maple` et permettant d'obtenir la formule du nombre de points intégraux décrite dans le théorème 18. Ce logiciel est disponible<sup>3</sup> à l'adresse

<https://www.math.ucdavis.edu/~totalresidue/>.

Les données initiales sont une matrice  $A$  de dimensions  $r \times N$ , dont les colonnes sont les éléments de  $\Phi$  et un élément  $a = \{a_1, \dots, a_r\} \in \mathbb{Z}^r$  qui détermine le polytope. Les éléments à calculer sont :

1. L'élément  $a' = \text{def}(a)$  obtenu par déformation du paramètre initial  $a$  ;
2. L'ensemble des permutations qui apparaissent dans la formule, c'est-à-dire l'ensemble des permutations spéciales  $\text{Sp}(a')$  ;
3. Les résidus qui apparaissent dans la formule 2.

Nous allons détailler les éléments nécessaires à chacune de ces étapes en présentant les différents algorithmes associés à la partie décrite.

Nous voulons tout d'abord vérifier si notre vecteur appartient à  $C(A_r^+)$ , c'est-à-dire au cône engendré par  $\{(e_1 - e_2), (e_2 - e_3), \dots, (e_{(r-1)} - e_r), e_r\}$ , car sinon le polytope est vide et il n'y a rien à faire. Pour appartenir au cône,  $a$  doit satisfaire les conditions suivantes :  $a_1 \geq 0$ ,  $a_1 + a_2 \geq 0$ ,  $\dots$ ,  $a_1 + a_2 + \cdots + a_r \geq 0$ . La procédure `check-vector` vérifie si ces conditions sont remplies. En fait, grâce au lemme de déformation, nous pouvons utiliser  $\text{def}(a)$  au lieu de  $a$ , ce que nous faisons pour simplifier les procédures. Nous calculons l'élément  $\text{def}(a)$  via la procédure `def-vector` de `Maple`. Le vecteur  $\text{def}(a)$  est utilisé dans toutes les formules définissant  $\text{Sp}(a)$  à la place de  $a$ , que  $a$  soit

---

3. Note de la traductrice : attention de ne pas oublier le tilde avant `totalresidue` (éventuellement le taper au clavier).

régulier ou non. Ceci résout la première partie du problème.

Pour trouver le sous-ensemble  $\text{Sp}(a)$  de  $\Sigma_r$ , nous utilisons la procédure `special-permutations`. Il est important de noter que l'utilisation de la fonction `combinat[permute]` de `Maple` est peu pratique et limitée en raison de la mémoire disponible. Notre approche construit récursivement les permutations respectant nos conditions, ce qui nous permet d'économiser beaucoup de mémoire en ne listant que ces permutations. L'ensemble  $\text{Sp}(a)$  dépend fortement de l'élément  $a$ . Nous ne disposons pas d'estimations de la borne supérieure du sous-ensemble  $\text{Sp}(a) \subset \Sigma_r$ , mais il semble que cet ensemble soit petit devant  $\Sigma_r$ . L'un des cas expérimentaux les plus défavorables pour le graphe complet  $K_{10}$  à 10 nœuds (le cas de  $A_9^+$ ) est celui du vecteur

$$a = [30201, 59791, 70017, 41731, 58270, -81016, -68993, -47000, -43001, -20000]$$

où le nombre  $\text{Sp}(a) \subset \Sigma_9$  vaut 9572, nettement inférieur à  $9!$ . Les expériences montrent que le temps de calcul de cet ensemble est relativement court.

Chaque permutation  $w \in \text{Sp}(a)$  engendre le cône simplicial  $C_w^+$  contenant  $a$ , ce qui correspond à un sommet du polytope  $P(A_r^+, a)$ . Cependant, il est clair que la cardinalité de  $\text{Sp}(a)$  est bien inférieure au nombre de sommets du polytope de partition  $P(A_r^+, a)$ . Par exemple, pour  $a = [a_1, a_2, \dots, a_r, -(\sum_{i=1}^r a_i)]$  avec  $a_i > 0$ , nous avons déjà remarqué que la cardinalité de  $\text{Sp}(a)$  est égale à 1, car  $\text{Sp}(a)$  se réduit à la permutation identité.

Enfin, pour la dernière étape, nous devons calculer le résidu. Rappelons que nous devons calculer

$$\text{Ires}_{z=0}^w \frac{(1+z_1)^{a_1+t_1} (1+z_2)^{a_2+t_2} \dots (1+z_r)^{a_r+t_r}}{z_1^{m_{1,r+1}} z_2^{m_{2,r+2}} \dots z_r^{m_{r,r+1}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{m_{ij}}}$$

Soit  $w$  une des permutations spéciales. Notons  $F$  la fonction apparaissant dans la formule ci-dessus. La fonction  $F$  est un produit de plusieurs fonctions. Cela nous permet de calculer les résidus en introduisant progressivement la partie de la fonction  $F$  contenant la variable recherchée. Pour simplifier, supposons que  $w$  est la permutation identité. Nous commençons par calculer le résidu en

$z_r = 0$  de la fonction  $g := \frac{(1+z_r)^{(a_r+t_r)}}{z_r^{m_{r,r+1}} \prod_{j=1}^{r-1} (z_j - z_r)^{m_{jr}}}$ . Supposons que  $g_r(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})$  soit le résultat.

On poursuit en calculant le résidu en  $z_{r-1}$  de la fonction  $g_r$  multipliée par tous les facteurs de la fonction originale  $F$  qui contiennent les variables  $z_{r-1}$ , et ainsi de suite. Le calcul du résidu en une variable  $z$  d'une fonction  $g(z) = F(z)/z^u$ , où  $F$  est analytique, consiste à calculer le développement de Taylor de  $F$  jusqu'à l'estimation de l'ordre  $u$  du pôle de la fonction  $g$ , puis à prendre le coefficient de  $1/z$ . Cette méthode est implémentée par différentes procédures : `coex`, `invi`, `trunc-next-function` et `RRK`. Enfin, la procédure `number-kostant` additionne, avec un signe (calculé à l'aide de `segnop`), tous les résidus issus des différentes permutations spéciales, obtenant ainsi la formule 2. La procédure `polynomial-kostant` calcule le polynôme  $a \mapsto k(\Phi, a)$  sur la chambre déterminée par  $a$ .

Comme nous l'avons indiqué, nous avons besoin d'une estimation uniforme de l'ordre d'apparition des pôles. Le résultat concernant cet ordre est présenté dans la sous-section suivante et est implémenté dans la procédure `E`.

## 2.2 Estimations de l'ordre des pôles

Soit  $G_r$  un polynôme de Laurent à  $r$  variables  $z = (z_1, z_2, \dots, z_r)$  et soit  $D_r = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)$ . Nous avons vu qu'il est nécessaire de calculer des résidus itérés de la forme :

$$\text{Res}_{z_1=0} \text{Res}_{z_2=0} \cdots \text{Res}_{z_r=0} G_r / D_r^m.$$

Le lemme clé suivant traite les situations qui se présenteront lors du calcul de l'estimation recherchée.

**Lemme 23** : *Supposons que  $G_r = \frac{F(z_1, \dots, z_r)}{(z_1 z_2 \cdots z_r)^{g+m}}$ . Soit  $H_r \left( \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_r} \right)$  une fonction analytique  $F$  et  $H_r$  un polynôme homogène de degré  $h$ .*

$$\text{Res}_{z_r=0} G_r / D_r^m$$

$G_{r-1} / D_{r-1}^m$  est une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $G_{r-1} / D_{r-1}^m$  avec :

$$G_{r-1} = \frac{F(z_1, \dots, z_{r-1})}{(z_1 z_2 \cdots z_{r-1})^{(g+m)}} H_{r-1} \left( \frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_{r-1}} \right)$$

$H_{r-1}$  est un polynôme homogène. Le polynôme est de degré au plus  $g + h - 1$  et  $F(z_1, \dots, z_{r-1})$  est analytique.

**Preuve** : Démontrons le lemme pour un monôme  $H_r = z_1^{i_1} \cdots z_{r-1}^{i_{r-1}} z_r^{i_r}$  où  $i_1, i_2, \dots, i_r$  sont des entiers non négatifs tels que  $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = h$ .

On écrit :

$$\prod_{1 \leq i \leq r-1} (z_i - z_r)^m = (z_1 z_2 \cdots z_{r-1})^m \prod_{1 \leq i \leq r-1} \left(1 - \frac{z_r}{z_i}\right)^m.$$

Le développement de Taylor de  $\frac{1}{\prod_{1 \leq i \leq r-1} (1 - \frac{z_r}{z_i})^m}$  en  $z_r = 0$  est :

$$\sum_{U_1, \dots, U_{r-1}} z_1^{-|U_1|} z_2^{-|U_2|} \cdots z_{r-1}^{-|U_{r-1}|} z_r^{|U_1| + |U_2| + \cdots + |U_{r-1}|}$$

où  $U_s = \{j_1^s, j_2^s, \dots, j_m^s\}$  parcourt les  $m$  tuples d'entiers non négatifs. On écrit également

$$F(z_1, \dots, z_r) = \sum_k F_k(z_1, \dots, z_{r-1}) z_r^k.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_r=0} \frac{G_r}{D_r^m} &= \frac{z_1^{-i_1} \cdots z_{r-1}^{-i_{r-1}}}{(z_1 z_2 \cdots z_{r-1})^{g+m}} \frac{1}{D_{r-1}^m} \text{Res}_{z_r=0} \frac{F(z_1, \dots, z_r)}{z_r^{g+i_r} \prod_{i=1}^{r-1} (1 - \frac{z_r}{z_i})^m} \\ &= \left( \frac{z_1^{-i_1} \cdots z_{r-1}^{-i_{r-1}}}{(z_1 z_2 \cdots z_{r-1})^{g+m}} \frac{1}{D_{r-1}^m} \right) \times \sum_{k=0}^{g-1+i_r} (F_k(z_1, \dots, z_{r-1})) \sum_{U_1, \dots, U_{r-1}: |U_1| + \cdots + |U_{r-1}| = g-1+i_r-k} z_1^{-|U_1|} \cdots z_{r-1}^{-|U_{r-1}|} \end{aligned}$$

Pour  $0 \leq k \leq i_r + g - 1$ , le monôme

$$z_1^{-i_1} \cdots z_{r-1}^{-i_{r-1}} z_1^{-|U_1|} z_2^{-|U_2|} \cdots z_{r-1}^{-|U_{r-1}|}$$

est tel que

$$i_1 + \cdots + i_{r-1} + |U_1| + \cdots + |U_{r-1}| = i_1 + \cdots + i_{r-1} + i_r + g - 1 - k \leq h + g - 1$$

et on obtient le lemme.

Remarquons que si  $F = 1$ , la même démonstration montre que  $H_r$  est homogène de degré précisément  $h + g - 1$ . À partir de  $G_r = \frac{F(z_1, \dots, z_r)}{(z_1 \cdots z_r)^m}$ , nous voulons calculer :

$$\text{Res}_{z_{k+1}=0} \text{Res}_{z_{k+2}=0} \cdots \text{Res}_{z_{r-1}=0} \text{Res}_{z_r=0} G_r / D_r^m.$$

En appliquant le lemme avec  $h = 0$ , on obtient que

$$\text{Res}_{z_r=0} G_r / D_r^m$$

est une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $\frac{G_{r-1}}{D_{r-1}^m}$  où :

$$G_{r-1} = \frac{F(z_1, \dots, z_{r-1})}{(z_1 \cdots z_{r-1})^{2m}} H\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_{r-1}}\right)$$

et  $H$  est homogène de degré au plus  $m - 1$ . Ainsi, au résidu suivant, on obtient à nouveau une combinaison linéaire de fonctions de la forme  $\frac{G_{r-2}}{D_{r-2}^m}$  où

$$G_{r-1} = \frac{F(z_1, \dots, z_{r-1})}{(z_1 \cdots z_{r-1})^{2m}} H\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_{r-1}}\right)$$

avec  $H$  homogène de degré au plus  $2m + m - 1 - 1 = 3m - 2$ , donc finalement le dernier résidu dans  $z_{k+1} = 0$  laisse une combinaison linéaire de fonctions de la forme :

$$\frac{G_k}{D_k^m}$$

avec

$$G_k = \frac{F(z_1, \dots, z_k)}{(z_1 \cdots z_k)^{(r-k+1)m}} H\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_k}\right).$$

Ici,  $H$  est homogène de degré au plus  $\frac{(r-k)(r-k+1)m}{2} - (r-k)$ . En particulier, en considérant  $H\left(\frac{1}{z_1}, \dots, \frac{1}{z_k}\right)$ , nous obtenons l'estimation des pôles que nous recherchions.

**Corollaire 24 :**

1. Soit  $G_r = \frac{F(z_1, \dots, z_r)}{(z_1 \cdots z_r)^m}$ , avec  $F$  analytique. Alors la fonction

$$\text{Res}_{z_{k+1}=0} \text{Res}_{z_{k+2}=0} \cdots \text{Res}_{z_{r-1}=0} \text{Res}_{z_r=0} G_r / D_r^m$$

admet un pôle en  $z_k$  d'ordre au plus  $\frac{m(r-k)(r-k+1)}{2} - (r-k)$ .

2. En particulier, avec la notation du théorème 18, si  $m = \text{maximum}_{ij} m_{ij}$ , alors le pôle dans  $\sigma(z_k)$  de la fonction

$$\text{Res}_{z_{\sigma(k+1)}=0} \cdots \text{Res}_{z_{\sigma(r)}=0} f_{\Phi}(a_1, a_2, \dots, a_r)(z)$$

$$= \text{Res}_{z_{\sigma(k+1)}=0} \cdots \text{Res}_{z_{\sigma(r)}=0} \frac{(1+z_1)^{a_1+t_1} (1+z_2)^{a_2+t_2} \cdots (1+z_r)^{a_r+t_r}}{z_1^{m_{1,r+1}} z_2^{m_{2,r+2}} \cdots z_r^{m_{r,r+1}}} \prod_{1 \leq i < j \leq r} (z_i - z_j)^{m_{ij}}$$

a au plus l'ordre de  $\frac{m(r-k)(r-k+1)}{2} - (r-k)$  indépendamment de  $\sigma \in \Sigma_r$ .

### 3 Le complexe de chambres

Dans cette section, nous abordons la notion de chambres et leur calcul. Il est important de souligner que tout ce qui est présenté ici est valable pour des matrices générales, non nécessairement unimodulaires. Ces concepts sont implémentés dans le programme Maple dénommé **chambers** disponible<sup>4</sup> à l'adresse

<https://www.math.ucdavis.edu/~totalresidue/>.

Soit  $\Delta^+$  l'ensemble des vecteurs distincts  $\{\Phi\}$ . Rappelons que le *complexe de chambres* est la subdivision polyédrique du cône  $C(\Delta^+)$  des combinaisons linéaires non négatives de  $\Delta^+$ . On définit  $\Delta^+$  comme le raffinement commun des cônes simpliciaux  $C(\sigma)$  parcourant tous les sous-ensembles de base  $\sigma$  possibles de  $\Delta^+$ . Pour plus de précision, nous introduisons maintenant les notations et les définitions clés. Dans ce qui suit, lorsqu'on considère un sous-ensemble  $I = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ , où les éléments  $s_i$  de  $I$  sont des sous-ensembles d'un ensemble  $X$ , on suppose qu'il existe un ordre partiel sur  $I$  par inclusion. Ainsi, l'ensemble des éléments minimaux de  $I$  est noté  $\text{minimalise}(I)$ . On adopte la convention selon laquelle l'intersection d'une famille vide de sous-ensembles de  $X$  est  $X$  lui-même.

Soit  $\Delta^+$  l'ensemble  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N\}$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^r$ . Rappelons qu'un mur est un hyperplan de  $\mathbb{R}^r$  engendré par  $(r-1)$  vecteurs de  $\Delta^+$ . Chaque mur  $W$  partitionne l'ensemble des indices  $\{1, 2, \dots, N\}$  en trois ensembles :  $\text{zeros}(W) = \{i \mid \phi_i \in W\}$ , et deux sous-ensembles disjoints  $\text{pos}(W)$  et  $\text{neg}(W)$  dont l'union  $\text{pos}(W) \cup \text{neg}(W)$  est précisément le sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, N\} \setminus \text{zeros}(W)$ . On considère l'ensemble  $\{\text{pos}(W), \text{neg}(W)\} = \{\text{neg}(W), \text{pos}(W)\}$ . On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des sous-ensembles  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, N\}$  tels que  $\sigma$  soit de cardinalité  $r$  et que l'ensemble des vecteurs  $\{\phi_i \mid i \in \sigma\}$  soient linéairement indépendants. Par commodité, on continue d'appeler un tel  $\sigma$  un *sous-ensemble de base* de  $\Delta^+$ , en considérant  $\sigma$  comme un sous-ensemble d'entiers ou comme un sous-ensemble d'éléments de  $\Phi$  indexés.

<sup>4</sup> Note de la traductrice : attention de ne pas oublier le tilde avant *totalresidue* (éventuellement le taper au clavier).

Pour  $\sigma \in \mathcal{B}$ , on considère le cône fermé  $C(\sigma)$  engendré par  $\sigma$ . Si  $I$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{B}$ , on note  $F(I) = \bigcap_{\sigma \in I} C(\sigma)$  l'intersection des cônes  $C(\sigma)$  lorsque  $\sigma$  parcourt  $I$ . On dit que  $I$  est un sous-ensemble admissible de  $\mathcal{B}$  si l'intérieur de  $F(I)$  est non vide. Une chambre combinatoire  $I$  est un sous-ensemble admissible maximal de  $\mathcal{B}$ . Le cône polyédrique  $F(I)$  est appelé une chambre géométrique. La chambre effective  $\text{Chambre}(I)$  est l'intérieur de  $F(I)$ . Réciproquement, l'ensemble  $I$  est entièrement déterminé par  $F(I)$ . On a  $I = \{\sigma \in \mathcal{B} \mid F(I) \subset C(\sigma)\}$ . L'ensemble de toutes les chambres géométriques et de leurs faces forme un complexe polyédrique qui partitionne le cône  $C(\Delta^+)$ , appelé complexe de chambres [1], [5], [10].

La figure 3 en donne un exemple : le complexe de chambres du cône associé au graphe complet acyclique  $K_4$  présenté dans la section précédente. Cette figure représente une coupe bidimensionnelle de la décomposition conique (le cône est tridimensionnel et pointé à l'origine). Les six points étiquetés  $(e_i - e_j)$  sur le dessin correspondent aux intersections des rayons  $\mathbb{R}^+(e_i - e_j)$  avec l'hyperplan  $(3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4) = 2$ . Sept chambres, numérotées de 1 à 7, sont présentes. La configuration vectorielle de la figure 3 comporte sept parois, une pour chacune des lignes distinctes obtenues à partir de ces vecteurs.

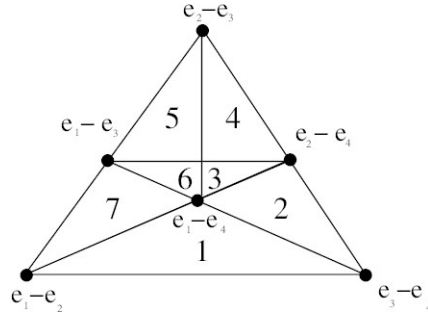


FIGURE 6 : Une tranche du complexe de chambres pour  $K_4$

Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des hyperplans constitués de toutes les parois.  $\mathcal{H}$  contient, parmi ses sous-ensembles, les parois des chambres. Les cellules de  $C(\Delta^+) \setminus \mathcal{H}$  sont des cellules ouvertes, à l'intérieur de cônes polyédriques. Nous appellerons ces cellules ouvertes des topes (en suivant la terminologie des matroïdes orientés [7]). Notons que l'ensemble des topes est (typiquement) une subdivision beaucoup plus fine de  $C(\Delta^+)$  que ses chambres. Voir la figure 3 pour une comparaison entre le complexe des chambres et le complexe des topes de l'ensemble des hyperplans  $\mathcal{H}$  associé à l'exemple de la figure 3.

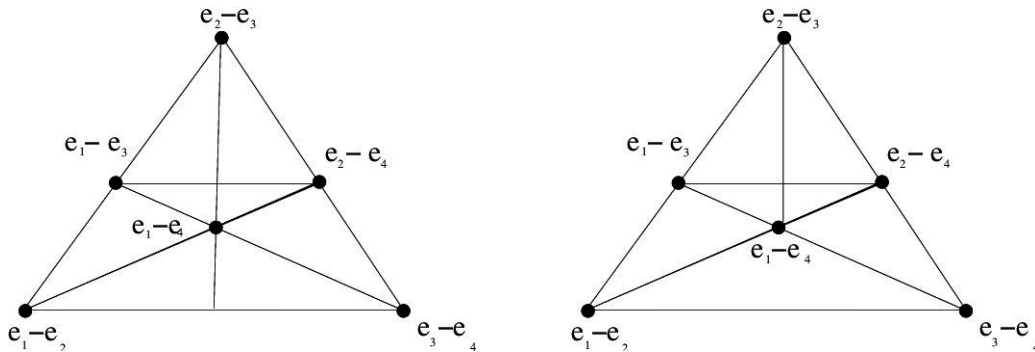


FIGURE 7 : 8 topes (gauche) contre 7 chambres (droite)

Un tope  $\tau$  de  $C(\Delta^+)$  ne touche aucune paroi de  $\Delta^+$ . Alors, pour chaque paroi  $W$ , on note  $\text{pos}(W, \tau)$  l'ensemble des éléments  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  tels que  $\phi_i \in \Delta^+$  appartienne au même demi-espace ouvert déterminé par  $W$  que le tope  $\tau$ . On dit que  $\text{pos}(W, \tau)$  est une *non-face* (cette terminologie est justifiée car il s'agit des non-faces d'un certain complexe simplicial au sens du chapitre deux de [21]). On note  $\text{Chambre}(\tau)$  la chambre contenant le sommet  $\tau$ .

À chaque tope  $\tau$ , on associe la famille des non-faces positives déterminée par ce tope  $\tau$  (il y a une non-face pour chaque mur). Appelons cette famille  $\text{polarise}(\tau)$ . Considérons la famille  $\text{MNF}(\tau)$  des éléments minimaux de  $\text{polarise}(\tau)$ . Il s'agit de la famille  $\text{MNF}(\tau) = \text{minimalise}(\text{polarise}(\tau))$ . La première observation importante est que l'on peut reconstruire la chambre  $\text{Chambre}(\tau)$  contenant le tope  $\tau$  à partir de l'ensemble  $\text{MNF}(\tau)$ . Ceci est très utile pour construire une chambre initiale. Toutes les autres seront ensuite obtenues à partir de celle-ci.

L'ensemble  $\text{MNF}(\tau)$  est un ensemble de non-faces. Soit  $f$  la cardinalité de l'ensemble  $\text{MNF}(\tau)$ . Soit  $\text{MNF}(\tau) := \{p_1, p_2, \dots, p_f\}$ . Chaque  $p_i$  est une non-face. On construit la famille  $\mathcal{P}(\tau)$  d'ensembles  $\mathbf{nu}$  de la forme  $\mathbf{nu} := \{i_1, i_2, \dots, i_f\}$  avec  $i_1 \in p_1, i_2 \in p_2, \dots, i_f \in p_f$ . Ces ensembles sont appelés *transversales* de la famille. Cette famille est notée  $\text{transversal}(\text{MNF}(\tau))$  dans le programme informatique présenté. De même,  $\mathcal{P}(\tau)$  est un ensemble dont les éléments sont des ensembles d'indices, ces éléments étant des sous-ensembles de  $\{1, 2, \dots, N\}$ . La cardinalité d'un ensemble  $\mathbf{nu} \in \mathcal{P}(\tau)$  peut être inférieure à  $f$ , car la famille  $\text{MNF}(\tau)$  n'est pas constituée d'ensembles disjoints. Il est important de noter que si  $\mathbf{nu}$  appartient à  $\mathcal{P}(\tau)$ , alors pour tout mur  $W$ , l'intersection  $\mathbf{nu} \cap \text{pos}(W, \tau)$  n'est pas vide. Nous avons le théorème suivant :

**Théorème 25** : *Les éléments minimaux de la famille  $\mathcal{P}(\tau) := \text{transversal}(\text{MNF}(\tau))$  sont précisément les sous-ensembles de base  $\sigma$  de  $\Delta^+$  tels que  $\tau \subset C(\sigma)$ .*

En d'autres termes, étant donné l'ensemble  $\text{MNF}(\tau)$  associé à un tope  $\tau$ , la famille des sous-ensembles de base  $\sigma$  de  $\Delta^+$  tels que  $\tau$  soit inclus dans  $C(\sigma)$  est précisément l'ensemble

$$\text{minimalise}(\text{transversal}(\text{MNF}(\tau))).$$

Nous allons démontrer ce théorème. Commençons par un lemme.

**Lemme 26** : *Tout  $\mathbf{nu} \in \mathcal{P}(\tau)$  est tel que l'ensemble des vecteurs  $\{\phi_i | i \in \mathbf{nu}\}$  engendrent  $\mathbb{R}^r$ .*

**Preuve** : Montrons qu'un ensemble  $\mathbf{nu} \in \mathcal{P}(\tau)$  engendrent  $\mathbb{R}^r$ . En effet, si ce n'était pas le cas, l'ensemble des vecteurs  $\{\phi_i | i \in \mathbf{nu}\}$  serait contenu dans une paroi  $W$ . Considérons l'ensemble  $\text{pos}(W, \tau)$  et un élément minimal  $p$  de la famille  $\text{MNF}(\tau) := \text{minimalise}(\text{polarise}(\tau))$  inclus dans  $\text{pos}(W, \tau)$ . Alors  $p$  (c'est-à-dire l'ensemble des éléments  $\phi_i$  indexés par  $p$ ) est inclus dans l'un des demi-espaces ouverts déterminés par  $W$ . Ainsi, contrairement à notre hypothèse, nous aurions  $\mathbf{nu} \cap p = \emptyset$ .  $\square$

Poursuivons la démonstration du théorème 25. Soit  $\sigma$  un sous-ensemble de base de  $\Delta^+$  ( $\sigma$ , dont les éléments sont indexés par  $\sigma$ , engendrent un cône simplicial). Nous démontrons maintenant que si  $\tau \subset C(\sigma)$ , alors  $\sigma \in \mathcal{P}(\tau)$  est un élément minimal de la famille des ensembles transversaux  $\mathcal{P}(\tau)$ .

Pour chaque paroi  $W$ , l'ensemble  $\sigma \cap \text{pos}(W, \tau)$  est non vide. Sinon,  $\sigma$  serait inclus dans le demi-espace fermé déterminé par  $W$ , mais serait opposé à  $\tau$  par rapport à  $W$ , et le cône  $C(\sigma)$  ne

contiendrait pas  $\tau$ . Choisissons, pour chaque  $p \in \text{MNF}(\tau)$ , un élément  $\phi_p \in \sigma \cap p$ . Il s'ensuit que  $\sigma$  contient nécessairement l'ensemble  $\mathbf{nu} := \{\phi_p \mid \phi_p \in \sigma \cap p; p \in \text{MNF}(\tau)\}$ , appartenant à la famille  $\mathcal{P}(\tau)$ . Or,  $\sigma = \mathbf{nu}$ , car  $\sigma$  est un sous-ensemble élémentaire de  $\Delta^+$  et  $\mathbf{nu}$  indexe un ensemble de générateurs de  $\mathbb{R}^r$  d'après le lemme 26. De plus,  $\sigma$  est minimal, car tous les ensembles appartenant à la famille  $\mathcal{P}(\tau)$  ont une cardinalité au moins égale à  $r$ .

Nous démontrons maintenant la réciproque. Soit  $\mathbf{nu}$  un ensemble minimal de  $\mathcal{P}(\tau)$ . Nous affirmons que  $\tau$  est inclus dans le cône  $C(\mathbf{nu})$ . Sinon, il existerait une paroi  $W$  séparant  $\tau$  et  $C(\mathbf{nu})$ . Or, par construction de  $\mathbf{nu}$ , il existe un élément  $p \in \mathbf{nu}$  inclus dans  $\text{pos}(W, \tau)$ ; ce qui contredit le fait que  $W$  sépare  $C(\mathbf{nu})$  et  $\tau$ . Il nous reste à démontrer que  $\mathbf{nu}$  est de cardinalité  $r$ .

Soit  $x$  un point de  $\tau$ . D'après le théorème de Carathéodory, il existe un sous-ensemble de base  $\sigma$  inclus dans  $\mathbf{nu}$  tel que  $x \in C(\sigma)$ . Alors le tope  $\tau$  est entièrement inclus dans  $C(\sigma)$ , car un tope n'est, par définition, séparé en deux par aucun hyperplan. L'ensemble  $\sigma$  appartient à  $\mathcal{P}(\tau)$  d'après ce qui précède. Mais  $\sigma \subset \mathbf{nu}$  et  $\mathbf{nu}$  est minimal, donc  $\mathbf{nu} = \sigma$ .

On en conclut que l'ensemble  $\text{Chambre}(\tau)$  des sous-ensembles élémentaires  $\sigma$  de  $\Delta^+$  tels que  $\tau \subset C(\sigma)$  est l'ensemble  $\text{minimalise}(\mathcal{P}(\tau))$  des éléments minimaux de  $\mathcal{P}(\tau) = \text{transversal}(\text{MNF}(\tau))$ .  $\square$

Le *tope lexicographique* est le tope contenant le vecteur  $\xi = \phi_1 + \epsilon\phi_2 + \epsilon^2\phi_3 + \dots$ , où  $\epsilon$  est un petit nombre. La *chambre lexicographique* est la chambre qui contient le tope lexicographique.

**Corollaire 27** : *L'algorithme suivant détermine les cônes  $r$ -simpliciaux  $C(\sigma)$  contenant la chambre lexicographique associée à un étiquetage particulier des éléments de  $\Delta^+$ , en trouvant les ensembles de base  $\sigma$  qui les définissent.*

1. Créer la liste  $L$  des non-faces lexicographiques  $\text{pos}(W, \tau)$ , où  $\tau$  est le tope lexicographique et  $W$  parcourt toutes les parois possibles de  $\Delta^+$ .
2. Soit  $F = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  l'ensemble minimal des non-faces de  $L$ .
3. Déterminez les ensembles transversaux à la famille  $F$ , puis minimisez l'ensemble des transversaux. Le résultat est  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ , les ensembles de base recherchés.

Nous nous intéressons maintenant à la production de toutes les autres chambres à partir d'une chambre initiale, telle que la chambre lexicographique. Pour cela, il est nécessaire de comprendre le polyèdre  $F(I)$ . Il s'agit d'un cône polyédrique pointu. Rappelons, par exemple d'après le chapitre 8 de l'ouvrage [19], que pour un polyèdre  $P$  (par exemple  $F(I)$ ) défini par un ensemble fini d'inégalités  $Ax \leq b$ , un hyperplan d'appui est un hyperplan affine  $\{x \mid cx = d\}$  tel que  $d = \max\{cx \mid Ax \leq b\}$ . Un sous-ensemble de  $P$  est une face si  $F = P$  ou si  $F$  est l'intersection de  $P$  avec un hyperplan d'appui de  $P$ . Une facette de  $P$  est une face maximale distincte de  $P$ . On dit qu'une paroi  $W$  est une paroi essentielle de la chambre géométrique  $F(I)$  si  $F(I) \cap W$  est une facette du cône polyédrique pointu  $F(I)$ . Cela équivaut à ce que  $W$  soit un hyperplan support de  $F(I)$  et que  $\dim(F(I) \cap W) = r - 1$ . On dit que deux chambres géométriques  $F(I)$  et  $F(I')$  sont  $W$ -adjacentes si elles partagent une paroi essentielle commune  $W$  et que  $\dim(F(I) \cap F(I') \cap W) = r - 1$ . En particulier, la paroi  $W$  est une paroi intérieure. Dans la suite, sauf si cela s'avère nécessaire pour éviter toute ambiguïté, nous parlerons simplement de "chambres adjacentes" sans préciser la paroi

qu'elles partagent. Nous présentons maintenant une opération qui permet de passer, sous certaines conditions, d'une chambre géométrique à une autre chambre géométrique adjacente. Puisque les chambres géométriques forment un complexe polyédrique connexe, on peut alors appliquer une procédure de recherche standard, telle qu'une recherche en profondeur, pour énumérer et lister toutes les chambres.

On note  $\mathcal{W}$  l'ensemble des sous-ensembles  $\mathbf{nu}$  de  $\{1, 2, \dots, N\}$  tels que  $\mathbf{nu}$  soit de cardinalité  $r - 1$  et que l'ensemble des vecteurs  $\{\phi_i | i \in \mathbf{nu}\}$  soient linéairement indépendants. Autrement dit, si  $\mathbf{nu}$  appartient à  $\mathcal{W}$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathbf{nu})$  engendré par les vecteurs  $\{\phi_i | i \in \mathbf{nu}\}$  est une paroi  $W$ . Si  $W$  est un mur, nous désignons par  $\mathcal{W}(W)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{W}$  avec des éléments qui sont les  $\mathbf{nu}$  tels que  $\mathcal{L}(\mathbf{nu}) = W$ .

Si  $\mathbf{nu}$  appartient à  $\mathcal{W}$ , on considère les sous-ensembles  $\text{zeros}(\mathbf{nu})$ ,  $\text{pos}(\mathbf{nu})$  et  $\text{neg}(\mathbf{nu})$ . Si  $i$  n'appartient pas à  $\text{zeros}(\mathbf{nu})$ , alors  $\mathbf{nu} \cup \{i\}$  appartient à  $\mathcal{B}$ . On note  $\delta^+(\mathbf{nu})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  constitué des éléments  $\sigma = \mathbf{nu} \cup \{i\}$  où  $i$  parcourt  $\text{pos}(\mathbf{nu})$ . On note  $\delta^-(\mathbf{nu})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  constitué des éléments  $\sigma = \mathbf{nu} \cup \{i\}$  où  $i$  parcourt  $\text{neg}(\mathbf{nu})$ .

Si  $W$  est un mur et  $\sigma$  un sous-ensemble de  $\{1, 2, \dots, N\}$ , on note  $\sigma \cap W = \sigma \cap \text{zeros}(W)$ . On note  $\mathcal{B}(W|\text{facet})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  constitué des éléments  $\sigma$  tels que  $\sigma \cap W$  soit de cardinalité  $(r - 1)$ . Autrement dit,  $W$  est engendré par une facette du cône  $C(\sigma)$ . On note  $\mathcal{B}(W|\text{coupe})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{B}$  constitué des éléments  $\sigma$  tels que les ensembles  $\sigma \cap \text{pos}(W)$  et  $\sigma \cap \text{neg}(W)$  soient non vides. Pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\mathcal{B}$ , on note  $I(W|\text{facet}) = I \cap \mathcal{B}(W|\text{facet})$  et  $I(W|\text{coupe}) = I \cap \mathcal{B}(W|\text{coupe})$ .

Soit  $I$  une chambre combinatoire, qui est un sous-ensemble maximal admissible de  $\mathcal{B}$ . Soit  $W$  un mur, on définit  $B(W, I) = \{\sigma \cap W | \sigma \in I(W|\text{facet})\}$ . Il s'agit d'un sous-ensemble de  $\mathcal{W}(W) = \{\mathbf{nu} \in \mathcal{W} | \mathcal{L}(\mathbf{nu}) = W\}$ . Si  $W$  est une paroi essentielle de  $F(I)$ , alors (comme nous le verrons plus loin) pour chaque sous-ensemble  $\mathbf{nu} \in B(W, I)$ , soit  $\delta^+(\mathbf{nu})$  est inclus dans  $I$ , soit  $\delta^-(\mathbf{nu})$  est inclus dans  $I$ , mais pas les deux.

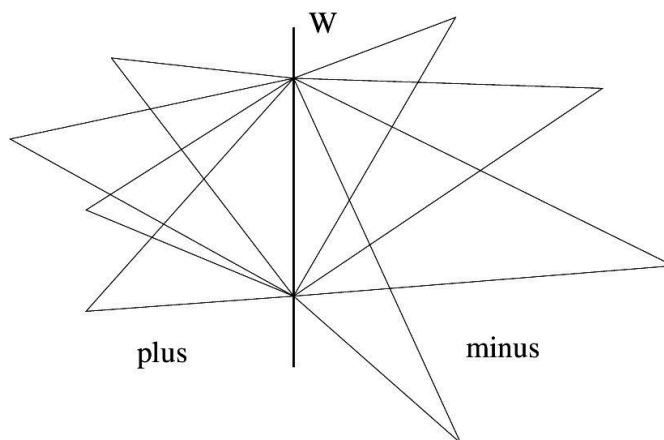


FIGURE 8 : Une réflexion échange les cônes simpliciaux supportés de part et d'autre d'une paroi.

Si  $W$  est une paroi intérieure, on définit l'opération de réflexion, qui constitue une nouvelle chambre combinatoire notée  $\text{reflexion}(I, W)$ . On conserve dans  $\text{reflexion}(I, W)$  tous les éléments  $\sigma \in I(W|\text{coupe})$ , et on remplace chaque sous-ensemble  $\delta^+(\mathbf{nu}) \subset I(W|\text{facet})$  par son opposé  $\delta^-(\mathbf{nu})$ . L'opération de réflexion est également appelée "retournement" par certains auteurs. Appliquer une réflexion sur

une paroi quelconque ne produit pas nécessairement une chambre adjacente, comme le montre l'exemple de la figure 3.

Le point important est que si l'on effectue les réflexions sur les parois essentielles, le résultat est celui recherché :

**Lemme 28** : *Si  $W$  est une paroi intérieure essentielle de  $F(I)$ , et soit  $\text{reflexion}(I, W)$  la chambre géométrique obtenue par réflexion de  $I$  le long de la paroi essentielle  $W$ , alors l'ensemble  $\text{reflexion}(I, W)$  est la chambre combinatoire associée à la chambre adjacente à  $W$  partageant  $W$  avec  $F(I)$ .*

Il est clair que tous les éléments  $\sigma \in I(W|\text{coupe})$  et les éléments de  $\delta^-(\mathbf{nu})$ , lorsque  $\mathbf{nu}$  parcourt  $B(W, I)$ , donnent lieu à des cônes simpliciaux contenant la chambre adjacente à  $W$ . Réciproquement, tout  $\sigma$  de  $\mathcal{B}$  tel que le cône  $C(\sigma)$  contienne la chambre adjacente à  $W$  appartient soit à  $I(W|\text{coupe})$ , soit à un ensemble de la forme  $\delta^-(\mathbf{nu})$ , avec  $\mathbf{nu} \in B(W, I)$ .

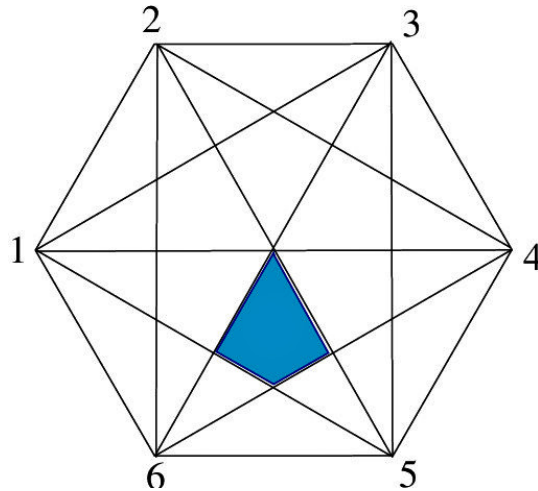


FIGURE 9 : Une réflexion utilisant la paroi 1,4 ne produit pas de chambre.

Le lemme précédent souligne l'importance de déterminer les parois essentielles, ce que nous allons décrire ci-après. Chaque paroi essentielle  $W$  est décrite par une inégalité linéaire qui atteint l'égalité en  $F(I) \cap W$ . La chambre est contenue dans le demi-espace correspondant. La représentation que nous en avons est celle de l'intersection de cônes simpliciaux, dont les facettes nous fournissent un système d'inégalités dont la solution est précisément la chambre. Le problème est que ce système contient des inégalités redondantes. Une inégalité est redondante si elle est impliquée par les autres contraintes du système ; les inégalités redondantes peuvent donc être éliminées.

Notre algorithme de recherche des parois essentielles repose sur l'énoncé suivant, qui correspond essentiellement au théorème 8.1 de la page 101 de [19]. Nous l'énonçons ici pour les polyèdres de dimension maximale (donc sans contrainte d'égalité) :

**Théorème 29** : *Si aucune inégalité du système  $Ax \leq b$  définissant le polyèdre de dimension maximale  $P$  n'est redondante, alors il existe une bijection entre les facettes d'un polyèdre et les inégalités de  $Ax \leq b$  définies par  $F = \{x \in P | a_i x = \beta_i\}$ , pour toute facette  $F$  de  $P$  et toute inégalité  $a_i x \leq \beta_i$  du système  $Ax \leq b$ .*

Ainsi, si nous parvenons à éliminer les inégalités redondantes du système d'inégalités initial associé à  $F(I)$ , nous aurons trouvé les facettes essentielles du cône polyédrique pointu  $F(I)$ . Pour ce faire, décrivons une méthode directe. Soit  $Ax \leq b, s^T x \leq t$  un système donné de  $m + 1$  inégalités à  $d$  variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ . Nous voulons vérifier si le sous-système des  $m$  premières inégalités  $Ax \leq b$  implique la dernière inégalité  $s^T x \leq t$ . Si tel est le cas, l'inégalité  $s^T x \leq t$  est redondante et peut être supprimée du système. Une formulation de programmation linéaire de ce problème est relativement simple :

$$\begin{aligned} f^* = \quad & \text{maximiser} && s^T x \\ & \text{sous la contrainte} && Ax \leq b \\ & && s^T x \leq t + 1. \end{aligned}$$

L'inégalité  $s^T x \leq t$  est alors redondante si et seulement si la valeur optimale  $f^*$  est inférieure ou égale à  $t$ . En résolvant successivement ce programme linéaire pour chaque inégalité non testée par rapport aux inégalités restantes, on obtient finalement un système équivalent non redondant. L'algorithme permettant de retrouver toutes les parois essentielles est donc le suivant :

1. Trouver les inégalités de chacun des cônes simpliciaux de  $F(I)$ .
2. Éliminer les inégalités redondantes par programmation linéaire jusqu'à ce qu'il n'en reste plus aucune. D'après le théorème précédent, la paroi est déterminée de manière unique en égalisant les inégalités.

Ainsi, pour trouver toutes les chambres, nous avons :

**Corollaire 30** : *L'algorithme suivant trouve toutes les chambres de l'ensemble vectoriel  $\Delta_+$  :*

1. *Trouver la chambre lexicographique  $I_{\text{initial}}$ . La placer comme premier élément d'une liste de chambres  $L$ .*
2. *Choisir un élément  $I$  de  $L$  pour lequel nous n'avons pas encore trouvé ses chambres adjacentes. Déterminer ses parois essentielles  $W$  à l'aide de la méthode ci-dessus.*
3. *Effectuer les réflexions  $\text{reflexion}(I, W) = I(W)$  pour chaque paroi intérieure essentielle  $W$ .*
4. *Ajouter  $I(W)$  à la liste  $L$  des chambres existantes si elle n'y figure pas déjà, et continuer jusqu'à ce que nous ayons trouvé les chambres adjacentes de tous les éléments de  $L$ .*

Bien que nous disposions désormais d'un algorithme concret pour générer toutes les chambres, il est, pour des raisons pratiques, hautement souhaitable d'améliorer la vitesse de reconnaissance des parois essentielles. Pour cela, nous démontrons certaines conditions nécessaires sur les parois essentielles d'une chambre :

**Proposition 31** : *Soit  $I$  une chambre combinatoire (un sous-ensemble maximal admissible de  $\mathcal{B}$ ). Soit  $W$  une paroi de  $\Delta^+$ . Si  $W$  est une paroi essentielle de  $F(I)$ , alors les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  $I = I(W|\text{facet}) \cup I(W|\text{coupe})$ .
2.  $I(W|\text{facet}) \neq \emptyset$ .
3. *Pour chaque  $\mathbf{nu} \in \mathcal{W}$ , soit  $\delta^+(\mathbf{nu}) \cap I \neq \emptyset$ , alors  $\delta^+(\mathbf{nu}) \subset I$  et  $\delta^-(\mathbf{nu}) \cap I = \emptyset$ ; soit  $\delta^-(\mathbf{nu}) \cap I \neq \emptyset$ , alors  $\delta^-(\mathbf{nu}) \subset I$ , et  $\delta^+(\mathbf{nu}) \cap I = \emptyset$ ;*

4. Supposons que  $I(W|\text{coupe})$  est non vide. Alors  $\bigcap_{\sigma \in I(W|\text{coupe})} \overset{\circ}{C}(\sigma)$  intersecte  $W$  dans un ensemble  $(r-1)$ -dimensionnel.

*Preuve* : Soient  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$  des vecteurs indépendants dans  $\mathbb{R}^r$ , générant un cône contenu dans  $F(I) \cap W$ . Si  $\sigma = \{\phi_1, \dots, \phi_r\} \in I$ , nous notons  $A_\sigma$  la matrice exprimant  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$  en fonction de  $\sigma$ , c'est-à-dire  $v_i = \sum_{j=1}^r a_{ji} \phi_j$ . La matrice  $a_{ji}$  a des coefficients non négatifs pour tout  $\sigma \in I$ .

On note :

$$A_{i,\sigma} = [a_{i,1}, \dots, a_{i,r-1}]$$

les composantes de  $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$  sur  $\phi_i$ . Ce sont les vecteurs colonnes de  $A_\sigma$ .

**Lemme 32** : Supposons que  $W$  soit une paroi essentielle de  $F(I)$ . Supposons que  $W$  soit engendré par l'ensemble de vecteurs  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ . Alors, pour chaque  $\sigma \in I$ , soit

- a)  $A_{i,\sigma} \neq 0$  pour tout  $i$ , soit
- b) il existe un indice  $k$  tel que  $A_{k,\sigma} = 0$  tandis que  $A_{s,\sigma} \neq 0, s \neq k$ .

Si  $\sigma$  vérifie la condition a), alors  $\sigma \in I(W|\text{coupe})$ .

Si  $\sigma$  vérifie la condition b), alors  $\sigma \in I(W|\text{facet})$ .

**Preuve** : En effet, supposons qu'en réarrangeant les indices  $A_{1\sigma} = 0, \dots, A_{q\sigma} = 0$ , les vecteurs  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$  appartiennent à l'espace vectoriel engendré par  $\{\phi_{q+1}, \dots, \phi_r\}$ , ce qui impose  $r-q \geq r-1$ , c'est-à-dire  $q = 1$ . Ainsi, si  $\sigma \in I$ ,  $\sigma$  vérifie soit a), soit b). Supposons que l'on soit dans le premier cas. Nous allons maintenant démontrer que  $\sigma \in I(W|\text{coupe})$ . Supposons que si tous les vecteurs  $A_{i,\sigma}$  sont non nuls, alors il existe un élément  $X \in W \cap \overset{\circ}{C}(\sigma)$

qui impose que  $\sigma \in I(W|\text{coupe})$ . Soit  $X = \sum_{i=1}^{r-1} f_i v_i$  avec  $f_i > 0$ , alors  $X \in W$ . Par ailleurs,

$$X = \sum_{i=1}^{r-1} f_i \sum_{j=1}^r a_{ji} \phi_j = \sum_{j=1}^r \left( \sum_{i=1}^{r-1} f_i a_{ji} \right) \phi_j = \sum_{j=1}^r b_j \phi_j.$$

Puisque tous les vecteurs  $A_{i,\sigma}$  sont non nuls, alors  $b_j > 0$  pour tout  $j$ , et donc  $X$  appartient au cône simplicial ouvert engendré par  $\sigma$ .

Considérons le second cas. Supposons, par souci de simplicité, que  $i_0 = 1$ . Alors  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$  est un sous-ensemble de l'espace vectoriel engendré  $\mathcal{L}\{\phi_2, \dots, \phi_r\}$ , donc  $W = \mathcal{L}\{\phi_2, \dots, \phi_r\}$  et par conséquent  $\sigma \in I(W|\text{facet})$ .

**Lemme 33** : Soit  $W$  une paroi essentielle de  $F(I)$ . Alors, l'intérieur relatif du cône engendré par  $F(I) \cap W$  (dans  $W$ ) est inclus dans  $\bigcap_{\sigma \in I(W|\text{coupe})} \overset{\circ}{C}(\sigma) \cap W$ .

**Preuve** : Pour  $X$  appartenant à l'intérieur relatif du cône  $F(I) \cap W$ , nous choisissons, comme dans la démonstration précédente, des vecteurs indépendants  $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$  dans  $\mathbb{R}^r$ , engendrant un cône inclus dans  $F(I) \cap W$  et tels que  $X = \sum_{i=1}^{r-1} f_i v_i$ , avec  $f_i > 0$ . En raisonnant comme précédemment, on constate que  $X$  appartient à l'intérieur de  $C(\sigma)$  pour tout  $\sigma \in I(W|\text{coupe})$ .

**Lemme 34** : Soit  $W$  une paroi essentielle de  $F(I)$ . Alors  $I(W|\text{facet})$  n'est pas vide.

Si  $I(W|\text{facet})$  était vide, alors la chambre ouverte correspondante  $\text{Chambre}(I)$  serait  $\text{Chambre}(I) = \bigcap_{\sigma \in I(W|\text{coupe})} C(\sigma)$  et intersecterait  $W$  d'après le lemme précédent ; elle ne serait donc pas contenue dans un demi-espace de  $W$ .

Si  $W$  est une paroi essentielle de  $F(I)$ , alors  $F(I)$  est d'un côté de  $W$ , et nous avons donc une face non distincte  $\text{pos}(W, I)$ . Pour chaque  $\mathbf{nu} \in \mathcal{W}$  engendrant  $W$ , on a un ensemble distingué  $\delta^+(\mathbf{nu}) = \{\mathbf{nu} \cup \{i\} \mid i \in \text{pos}(W, I)\}$  d'éléments de  $\mathcal{B}$ , tandis que  $\delta^-(\mathbf{nu}) = \{\mathbf{nu} \cup \{i\} \mid i \in \text{neg}(W, I)\}$  est disjoint de  $I$  :

**Lemme 35** : *Si  $W$  est une paroi essentielle de  $F(I)$ , alors pour tout  $\mathbf{nu} \in \mathcal{W}$  tel que  $\mathcal{L}(\mathbf{nu}) = W$ , alors :*

1. *On a  $\delta^-(\mathbf{nu}) \cap I = \emptyset$ .*
2. *Si  $\delta^+(\mathbf{nu}) \cap I \neq \emptyset$ , alors  $\delta^+(\mathbf{nu}) \subset I$ .*

**Preuve** : La condition 1 est claire, sinon  $F(I)$  serait du mauvais côté de  $W$ . Soit  $x \in \text{Chambre}(I)$  un point très proche de  $W \cap F(I)$ , et  $X$  à l'intérieur de  $W \cap F(I)$ . Supposons que  $\sigma = \mathbf{nu} \cup \{i\}$  appartienne à  $I$ . Alors le point  $X$  est à l'intérieur de  $C(\mathbf{nu})$ . La droite  $[x, X]$  est à l'intérieur de la chambre  $\text{Chambre}(I)$ , sauf au point  $X$ . Elle ne peut traverser aucune frontière d'un cône simplicial. Ainsi, on constate que  $\mathbf{nu}$  reste entièrement à l'intérieur de tout cône simplicial engendré par  $\mathbf{nu}$  et un vecteur  $\phi_k$  tel que  $\phi_k$  soit du même côté que  $x$ , puisque son origine  $(1 - \epsilon)X + \epsilon x$  est clairement à l'intérieur de ce cône simplicial.

Ainsi, nous avons démontré que si  $W$  est une paroi essentielle de  $F(I)$ , alors la paroi  $W$  satisfait les conditions 1, 2, 3 et 4 de l'énoncé de la Proposition 31.

**Corollaire 36** : *Si  $W$  est une paroi de  $F(I)$  satisfaisant les conditions 1), 2) et 3) mais pas la condition 4) ; alors  $\text{reflexion}(I, W)$  n'est pas un sous-ensemble admissible de  $\mathcal{B}$ .*

**Preuve** : Supposons que  $W$  vérifie 1), 2) et 3). Soit  $I' = \text{reflexion}(I, W)$ . Si  $W$  ne satisfait pas 4), l'ensemble  $F(\text{coupe}) = \bigcap_{\sigma \in I(W|\text{coupe})} C(\sigma)$  ne coupe pas  $W$  dans un ouvert. Ainsi,  $I(W|\text{coupe})$  est contenu d'un côté de l'hyperplan  $W$ . L'ensemble  $I(W|\text{coupe})$  est stable par la procédure de réflexion. Clairement, l'autre cône  $F'(\text{facet}) = \bigcap_{\sigma \in I'(W|\text{facet})} C(\sigma)$  est de l'autre côté de l'hyperplan  $W$ . Ainsi, l'ensemble  $I'$  n'est pas réalisable.

Le résultat suivant justifie la difficulté de trouver la chambre combinatoire contenant un vecteur fourni en entrée :

**Proposition 37** : *Soit  $A$  une matrice entière. Soit  $b$  un vecteur du cône  $C(A)$  engendré par les colonnes de  $A$  et  $F$  une liste de cônes simpliciaux dont les rayons appartiennent aux colonnes de  $A$ , tels que tous les éléments de  $F$  contiennent  $b$ . Déterminer si  $F$  contient tous les simplexes contenant  $b$ , c'est-à-dire si  $F$  détermine la chambre combinatoire contenant  $b$ , est un problème NP-difficile.*

**Preuve** : Un problème NP-complet bien connu consiste à déterminer, étant donné un graphe complet dont les arêtes ont des poids entiers positifs, s'il existe un cycle hamiltonien de coût inférieur à  $\beta$ . Nous allons maintenant expliquer pourquoi ce problème peut être transformé en celui de

déterminer si une liste de cônes simpliciaux suffit à définir une chambre.

Nous utiliserons un théorème de K. Murty (voir le théorème 2.1 dans [16]) : considérons un graphe biparti complet  $K_{n,n}$ . Orientons toutes les arêtes dans la même direction et attribuons la valeur 1 aux nœuds de queue et -1 aux nœuds de tête de chaque arc. Il est bien connu que le polytope de réseau associé est le célèbre polytope de Birkhoff-Von Neumann des matrices doublement stochastiques, vu dans l'introduction. Ce polytope est plongé dans  $R^{n^2}$  et ses coordonnées correspondent aux arcs du réseau biparti. La matrice de réseau associée est de rang  $2n - 1$ , avec  $2n$  lignes et  $n^2$  colonnes, une par arc du réseau. Ces colonnes sont notées  $(1, 1), (1, 2), \dots, (n - 1, n), (n, n)$ .

On étend la matrice de réseau ci-dessus en ajoutant une ligne de coûts, où  $c_{i,j}$ ,  $i \neq j$ , représente le coût pour aller de  $i$  à  $j$ , à l'exception de l'élément associé à l'arc  $i, i$  où l'on peut inscrire un très grand entier  $M$ , bien supérieur à la somme des  $n$  plus grands  $c_{i,j}$ . On ajoute ensuite un élément de valeur  $\beta$  au membre de droite de l'équation matricielle. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_{i,j} &= 1, \quad j = 1..n \\ \sum_{j=1}^n -x_{i,j} &= -1, \quad i = 1..n \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} &= \beta \\ x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j. \end{aligned}$$

Ce système est de rang égal à  $2n$ . Le point important est le suivant : si l'ensemble des colonnes  $\{(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n), (i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_n, j_n)\}$  définit un cône simplicial contenant le vecteur  $b = (1, 1, 1, \dots, -1, -1, -1, \beta)$ , alors  $(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)$  doit être un parcours du voyageur de commerce de coût inférieur ou égal à  $\beta$ . Ainsi, si nous prenons comme  $F$  l'ensemble de tous les cônes simpliciaux de bases qui n'utilisent pas toutes les colonnes  $\{(1, 1), (2, 2), \dots, (n, n)\}$  et contiennent  $b = (1, 1, \dots, -1, -1, \beta)$ , le travail restant de décider si un autre cône contient le vecteur  $b$  est alors au moins aussi difficile que la solution du problème du voyageur de commerce.  $\square$

Pour conclure cette section, il convient de mentionner que l'on peut appliquer abstraitement des réflexions aux parois non essentielles satisfaisant les conditions 1), 2) et 3). L'intérieur de la "chambre" ainsi obtenue peut être vide et, par conséquent, ne nous est pas utile ici. Néanmoins, ce phénomène joue un rôle important dans la théorie sous le nom de chambres virtuelles. En fait, il existe une autre caractérisation des chambres utilisant les triangulations du diagramme de Gale des vecteurs originaux (voir [25] pour une introduction aux diagrammes de Gale et aux triangulations).

**Lemme 38** : [Voir [5], [10]] *Le réseau des faces du complexe de chambres d'une configuration vectorielle  $A$  est anti-isomorphe au réseau des faces du polyèdre secondaire de la transformée de Gale de  $A, \hat{A}$ . Les sommets du polyèdre sont les triangulations régulières de  $\hat{A}$ .*

Ainsi, générer les chambres d'un cône de réseau revient à générer les triangulations régulières distinctes du diagramme de Gale d'une matrice de réseau étendue. Ces calculs peuvent également être effectués à l'aide du logiciel [18].

## 4 Expérimentations calculatoires

Nous présentons maintenant quelques expériences de calcul. Toutes les expériences ont été réalisées sur un ordinateur Pentium 1 GHz sous Linux avec Maple 7. Nos logiciels sont disponibles<sup>5</sup> à l'adresse

<https://www.math.ucdavis.edu/~totalresidue/>.

Nos expériences sont présentées dans trois tableaux. Nous commençons par les tableaux TABLEAU 1 et TABLEAU 2, qui traitent de la fonction de partition de Kostant, dans le cas des graphes complets acycliques. Comme nous l'avons vu dans le lemme 1, tous les autres réseaux peuvent être inclus dans ce cas. Le premier tableau présente des exemples pour les cas  $K_4(A_3^+)$  et  $K_5(A_4^+)$ , tandis que le second tableau propose des exemples plus importants pour les cas  $A_6^+, A_7^+, A_8^+, A_9^+$  et  $A_{10}^+$ . Nous présentons les temps de calcul dans les deux tableaux, et le tableau 4 indique également la cardinalité des ensembles de permutations spéciaux. Les calculs montrent que la méthode des résidus totaux est plus rapide que l'énumération exhaustive et que l'implémentation actuelle du logiciel **LatTE** [11] d'un ou deux ordres de grandeur. **LatTE**, par ailleurs, est le seul logiciel capable de traiter des polyèdres convexes rationnels arbitraires.

Comme le montrent clairement les deux premiers tableaux, le temps de calcul n'augmente pas significativement lorsque les poids des nœuds sont très élevés. En revanche, il devient rapidement très important lorsque le nombre de nœuds du graphe augmente. Le second tableau met en évidence que, pour un nombre de nœuds donné, le temps de calcul dépend fortement de la cardinalité de l'ensemble  $\text{Sp}(a)$ , c'est-à-dire du signe des poids des nœuds (lorsque tous les poids sont positifs, sauf le dernier, la cardinalité de  $\text{Sp}(a)$  est égale à 1).

Il convient de souligner que l'une des caractéristiques de notre méthode est sa capacité à calculer directement le polynôme  $k_\Phi(a)$ , qui donne le nombre de points du réseau dans le polytope  $P(\Phi, a)$  de la chambre déterminée par  $a$ . En particulier, le polynôme d'Ehrhart du polytope  $P(\phi, a)$ , c'est-à-dire la fonction  $t \mapsto k_\Phi(ta)$ , se calcule également aisément grâce à notre algorithme. Par exemple, correspondant à la première ligne du tableau 2 :

$$k_{A_7^+}(t, 2t, 3t, 4t, 5t, -15t) = \frac{1}{120960}(6t+1)(t+4)(t+3)(t+2)(t+1)(64921t^5 + 233897t^4 + 307649t^3 + 184639t^2 + 50574t + 5040)$$

qui a été calculé en 0.55 seconde. En revanche, la fonction polynomiale  $k_\Phi(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$  (avec  $a_5 = -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ ) dans la chambre  $\{a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0\}$  est calculée en 0.48 seconde.

---

5. Note de la traductrice : attention de ne pas oublier le tilde avant totalresidue (éventuellement le taper au clavier).

Les polynômes d'Ehrhart pour les deuxième, troisième et quatrième exemples du tableau 2, c'est-à-dire  $k_{A_r^+}(21128 t, 45716 t, 79394 t, -76028 t, -31176 t, 66462 t)$ ,

$$k_{A_r^+}(82275t, 33212 t, 91868 t, 57457 t, 47254 t, 64616 t, 94854 t),$$

et

$$k_{A_r^+}(31994 t, -12275 t, 55541 t, 72295 t, 26697 t, -3212 t, -38225 t, 6916 t)$$

et

$$k_{A_r^+}(31994 t, -12275 t, 55541 t, 72295 t, 26697 t, -3212 t, -38225 t, 6916 t)$$

ont été calculées respectivement en 1.36 seconde, 18.54 secondes et 93.36 secondes. Il est également intéressant de tester le programme sur la valeur de la partition de Kostant pour  $A_r^+$  sur le vecteur  $a = [1, 2, 3, 4, \dots, r, -r(r+1)/2]$ . Comme l'a démontré Zeilberger [24], cette valeur est égale à  $\prod_{i=1}^r \frac{(2i)!}{i!(i+1)!}$ .

Le dernier tableau est consacré aux matrices de transport  $4 \times 4$ . Dans le cas des polytopes de transport, c'est-à-dire des graphes bipartis complets, nous pouvons comparer notre vitesse d'exécution à celle du programme C++ dédié, écrit par Beck et Pixton [4]. Les logiciels `LattE` et `Beck-Pixton` sont tous deux plus rapides que notre implémentation `Maple`, celui de Beck-Pixton étant nettement plus rapide. Il convient toutefois de souligner que nos calculs pour les polytopes de transport exploitent le fait qu'ils sont inclus dans le graphe complet pour un nombre suffisamment grand de nœuds. Par exemple, le cas des polytopes de transport  $4 \times 4$  est traité via le graphe complet  $K$ . Le même type d'intégration peut être réalisé pour d'autres réseaux.

Si nous considérons le cas de matrices 4 fois 5 avec les poids sur les nœuds

$$[3046, 5173, 6116, 10928], [182, 778, 3635, 9558, 11110],$$

le nombre de points du réseau est  $23196436596128897574829611531938753 \approx 2.10^{34}$  calculé en 11.15 secondes. Le nombre de permutations spéciales pour ce vecteur est de 540, tandis que le polytope correspondant possède 912 sommets. Ce même exemple prend 7.8 secondes avec `LattE` et 0.1 seconde avec le programme `Beck-Pixton`.

Le polynôme d'Ehrhart

$$k_{\Phi_{4,5}}((3046 t, 5173 t, 6116 t, 10928 t, -182 t, -778 t, -3635 t, -9558 t, -11110 t))$$

est calculé en 30.72 secondes. Considérons le cas de matrices  $5 \times 5$  avec les poids sur les nœuds.  $[30201, 59791, 70017, 41731, 58270], [81016, 68993, 47000, 43001, 20000]$ , le nombre de points du réseau est

$$24640538268151981086397018033422264050757251133401758112509495633028 \approx 2.10^{67}$$

que nous avons calculé en 23 minutes. Le nombre de permutations spéciales nécessaires est de 9 572, tandis que le nombre de sommets du polytope correspondant est de 13 150. Cet exemple a nécessité 20 minutes avec `LattE` et seulement 4 secondes avec le programme `Beck-Pixton`.

Les polytopes de transport ont été traités par Beck et Pixton [4] dans un programme C++ dédié à cette famille particulière de polytopes de flux. Leur calcul, également basé sur les résidus, est actuellement le plus rapide. Il est important de noter que leur utilisation des résidus diffère sensiblement de la nôtre ; notre théorème principal peut être vu comme un analogue multidimensionnel du fait que la somme des résidus d'une fonction rationnelle sur  $P_1(\mathbb{C})$  est nulle. On peut s'attendre à ce que, dans une future implémentation C++, les temps d'exécution présentés ici soient considérablement plus rapides que ceux de cette implémentation préliminaire en Maple. Outre les gains de vitesse évidents en matière d'implémentation, les idées présentées dans cet article pourraient encore être améliorées lorsque la méthode du résidu total est appliquée directement au graphe biparti, et non comme un sous-réseau de  $K_n$ .

Poids sur les nœuds	# de flots	secs
[6, 8, -5, -9]	223	0.1
[9, 11, -12, -8]	330	0.1
[1000, 1, -1000, -1]	3002	0.009
[4383, -886, -2777, -720]	785528058	0.1
[4907, 2218, -3812, -3313]	20673947895	0.1
[47896, 30744, -46242, -32398]	19470466783680	0.01
[69295, 62008, -28678, -102625]	179777378508547	0.1
[3125352, 6257694, -926385, -8456661]	34441480172695101274	0.01
[6860556, 1727289, -934435, -7653410]	91608082255943644656	0.1
[12, 8, -9, -7, -4]	14805	0.081
[125, 50, -75, -33, -67]	6950747024	0.020
[763, 41, -227, -89, -488]	222850218035543	0.019
[11675, 88765, -25610, -64072, -10758]	563408416219655157542748	0.011
[78301, 24083, -22274, -19326, -60784]	1108629405144880240444547243	0.029
[52541, 88985, -1112, -55665, -84749]	3997121684242603301444265332	0.010
[71799, 80011, -86060, -39543, -26207]	160949617742851302259767600	0.010
[45617, 46855, -24133, -54922, -13417]	15711217216898158096466094	0.21
[54915, 97874, -64165, -86807, -1817]	102815492358112722152328	0.060
[69295, 62008, -28678, -88725, -13900]	65348330279808617817420057	0.010
[8959393, 2901013, -85873, -533630, -11240903]	6817997013081449330251623043931489475270	0.010
[2738090, 6701290, -190120, -347397, -8901863]	277145720781272784955528774814729345461	0.010
[6860556, 1727289, -934435, -818368, -6835042]	710305971948234346520365668331191134724	0.060

TABLEAU 1 : Test des graphes complets  $K_4$  et  $K_5$ . Le temps est indiqué en secondes. Les vecteurs excédentaires se trouvent dans la première colonne.

Poids sur les nœuds	# des flots	secs	Sp(a)
[1,2,3,4,5, -15 ]	5880	0.02	1
[21128,45716,79394,-76028,-31176,66462,-105496]	587335485609117026711678082146694056843 2553474831987566395925	0.22	8
[82275,33212, 91868, -57457,47254,-64616,94854,-227390]	226040494681135377722281761934040091356 424181	2.14	26
[31994,-12275, 55541, 72295,26697,-3212,-38225,6916,-139731]	114468474792557042228704224522320677922 601568734727431018393069006356672309031 382519845190693994796326644137066000	7.94	24
[12275,55541, 72295, 26697,-3212,-38225,6916,92409,9528, -234224]	129700477294765311665832688168594911836 716319862924094634125278564144584873562 586647420645188292325341990044115208492 74758896993761880000897382293730	21.31	16
[1,2, 3,4,5,6,7,8,9,10, -55]	38883505145515430400	5	1
[46398,36794, 92409,-16156,29524,-68385,93335,50738,75167, -54015, -285809 ]	208898678951168320602857837344142371212 250684806890637191792335907657807560535 099223718482359026217629560725791309259 479210778424216688326915440468802215597 798234585056426719876125028873152	2193.23	322

TABLEAU 2 : Test pour les graphes complets  $K_n$  avec  $n = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ . Le temps est donné en secondes.

Marges	# de points du treillis	secs
[220, 215, 93, 64], [108, 286, 71, 127]	1225914276768514	5.04
[109, 127, 69, 109], [119, 86, 108, 101]	993810896945891	10.43
[72, 67, 47, 96], [70, 70, 51, 91]	25387360604030	6.5
[179909, 258827, 224919, 61909], [190019, 90636, 276208, 168701]	13571026063401838164668296635065899923152079	5.87
[229623, 259723, 132135, 310952], [279858, 170568, 297181, 184826]	646911395459296645200004000804003243371154862	16.1
[249961, 232006, 150459, 200438], [222515, 130701, 278288, 201360]	319720249690111437887229255487847845310463475	16.1
[140648, 296472, 130724, 309173], [240223, 223149, 218763, 194882]	322773560821008856417270275950599107061263625	11.7
[65205, 189726, 233525, 170004], [137007, 87762, 274082, 159609]	6977523720740024241056075121611021139576919	9.0
[251746, 282451, 184389, 194442], [146933, 239421, 267665, 259009]	861316343280649049593236132155039190682027614	15
[138498, 166344, 187928, 186942], [228834, 138788, 189477, 122613]	63313191414342827754566531364533378588986467	19.4
[20812723, 17301709, 21133745, 27679151], [28343568, 18410455, 19751834, 20421471]	665711555567792389878908993624629379187969880179721169068827951	15.6
[15663004, 19519372, 14722354, 22325971], [17617837, 25267522, 20146447, 9198895]	63292704423941655080293971395348848807454253204720526472462015	27.4
[13070380, 18156451, 13365203, 20567424], [12268303, 20733257, 17743591, 14414307]	43075357146173570492117291685601604830544643769252831337342557	14.8

TABLEAU 3 : Tests pour des polytopes de transport de  $4 \times 4$ .

## Références

- [1] Alekseyevskaya T.V., Gel'fand I.M., and Zelevinsky A., *Arrangements of real hyperplanes and the associated partition function*, Soviet Math. Doklady 36, 1988, 589-593.
- [2] Baldoni-Silva W., Vergne M., *Residues formulae for volumes and Ehrhart polynomials of convex polytopes*. manuscript 81 pages, 2001. <https://arxiv.org/pdf/math/0103097>.
- [3] Barvinok A., Pommersheim J., *An algorithmic theory of lattice points in polyhedra*, in : *New Perspectives in Algebraic Combinatorics* (Berkeley, CA, 1996-1997), 91-147, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 38, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [4] Beck M., Pixton, D., *The Ehrhart polynomial of the Birkhoff polytope*, to appear in *Discrete and Computational Geometry*. <https://arxiv.org/pdf/math/0202267>.
- [5] Billera L.J., Gel'fand I.M, Sturmfels B., *Duality and minors of secondary polyhedra J. of Comb. Theory, Ser. B*, 57, 1993, 258–268.
- [6] Schmidt J.R., Bincer A.M., *The Kostant partition function for simple Lie algebras. J. Math. Phys.* 25 (1984), no. 8, 2367–2373.
- [7] Björner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., N. White, G. Ziegler, *Oriented Matroids*, Cambridge University Press, 1992.
- [8] Brion M., Vergne M., *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes*, *J. Amer. Math Soc.* 10,4 (1997), 797-833.

- [9] Brion M., Vergne M., *Arrangements of hyperplanes I : Rational functions and Jeffrey-Kirwan residue* <https://arxiv.org/pdf/math/9903178>.
- [10] De Loera J.A, Hosten S, Santos F., Sturmfels B., *The polytope of all triangulations of a point configuration*, Doc. Math. J. DMV 1 (1996) 103–119.
- [11] De Loera J.A., Hemmecke R., Tauzer J., Yoshida R., *Effective lattice point enumeration in rational convex polytopes*, <https://www.math.ucdavis.edu/latte/software.php> ou <https://www.math.ucdavis.edu/~deloera/> (*copier/coller l'adresse*).
- [12] Diaconis P., Efron B., *Testing for independence in two-way tables : New interpretations of the chi-square statistic*, *Annals of Statistics* 13, 845-847.
- [13] Garey M.R., Johnson S.J., *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [14] Jaeger F., *Flows and generalized coloring theorem in graphs*, *J. Combin. Theory Ser. B*, 26, (1979), 205–216.
- [15] Kirillov A. N., *Ubiquity of Kostka polynomials* <https://arxiv.org/pdf/math/9912094>.
- [16] Murty K., *A fundamental problem in linear inequalities with applications to the traveling salesman problem*. *Mathematical Programming* vol 2. 1972, 296-308.
- [17] Pitman J., Stanley R.P., *A polytope related to empirical distributions, plane trees, parking functions, and the associahedron* *Discrete and Computational Geometry*, 27 (2002), 603-634.
- [18] Rambau J., *TOPCOM (triangulations of point configurations and oriented matroids)*, [https://macaulay2.com/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/\\_topcom.html](https://macaulay2.com/doc/Macaulay2/share/doc/Macaulay2/Macaulay2Doc/html/_topcom.html).
- [19] Schrijver A., *Theory of Linear and Integer Programming* Wiley series in Discrete Mathematics and Optimization, 1982.
- [20] Stanley R. P., *Enumerative Combinatorics* volume I, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [21] Stanley R. P., *Combinatorics and Commutative Algebra* Birkhäuser Boston, second edition 1996.
- [22] Sturmfels B., *On vector partition functions*, *J. of Combinatorial Theory, Ser. A*, 72 (1995) 302-309.
- [23] Szenes A., Vergne M., *Residue formulae for vector partitions and Euler-MacLaurin sums*, preprint (2002), 52 pages. <https://arxiv.org/pdf/math/0202253>.

- [24] Zeilberger D., *A conjecture of Chan, Robbins, and Yuen.*  
<https://arxiv.org/pdf/math/9811108>, (1998).
- [25] Ziegler G., *Lectures on Polytopes*, Springer Verlag Graduate Texts, Berlin, 1995.