

## La fonction zeta et l'hypothèse de Riemann

A. Selberg

C. R. Dixième Congrès Math. Scandinaves, Copenhague (1946), 187-200  
éd. de juillet des Gjellerups, Copenhague, 1947

L'objet de l'exposé qui va suivre n'est pas d'annoncer de quelconques nouveaux résultats concernant l'hypothèse de Riemann, mais plutôt de donner un aperçu de quelques recherches récentes sur la distribution des zéros de la fonction zeta en lien avec la droite critique. On insistera particulièrement sur les idées principales qui sous-tendent les méthodes. Je conclurai en discutant de la loi dite "loi de Gram", bien qu'elle ne soit pas directement liée à l'hypothèse de Riemann, cette partie peut avoir une certaine importance pour notre vision de l'évidence numérique qui conforte l'hypothèse.

Rappelons d'abord les propriétés principales de la fonction zeta. Pour  $s = \sigma + it$ ,  $\sigma > 1$ , elle est définie par

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

dans ce demi-plan, on a également la formule due à EULER

$$(2) \quad \zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1},$$

$p$  couvrant l'ensemble des nombres premiers. Par prolongement analytique à partir du demi-plan  $\sigma > 1$ ,  $\zeta(s)$  est définie comme une fonction régulière dans le plan entier à part en un pôle simple en  $s = 1$ . De plus, elle satisfait une équation fonctionnelle qui peut s'écrire sous la forme

$$(3) \quad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

De (2) et (3), on déduit que  $\zeta(s)$  n'a pas de zéros dans le demi-plan  $\sigma > 1$ , et dans le demi-plan  $\sigma < 0$ , il y a seulement les zéros "triviaux"  $s = -2 - 4, -6, \dots$ , alors que tous les autres zéros doivent se trouver dans la "bande critique"  $0 \leq \sigma \leq 1$ , symétriquement les uns les autres par rapport à l'axe réel et à la droite "critique"  $\sigma = \frac{1}{2}$ , on peut donc se contenter de considérer le demi-plan supérieur. Ces zéros que dans la suite on dénotera  $\beta + i\gamma$ , sont appelés les zéros non triviaux. Le nombre de zéros non triviaux avec  $0 < \gamma \leq T$ , est donné approximativement par la formule

$$(4) \quad N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

RIEMANN a conjecturé que tous les zéros non-triviaux de  $\zeta(s)$  se trouvaient sur la droite critique, et c'est cette conjecture, dont la vérité n'a jamais été démontrée ou infirmée, qu'on appelle l'"hypothèse de Riemann". Selon cette conjecture, on devrait toujours avoir  $\beta = \frac{1}{2}$ . Qu'est-ce qui peut être dit à propos de  $\beta$  et en particulier à propos de la déviation éventuelle de la partie réelle

des zéros de la valeur  $\frac{1}{2}$  sans aucune hypothèse ?

## I

Laissez-moi tout d'abord mentionner brièvement les résultats qui ont été démontrés, qui donnent une certaine information à propos de la localisation de tous les zéros sans exception. Un théorème classique de HADAMARD dit qu'il n'y a pas de zéro sur la droite  $\sigma = 1$ , et de façon similaire qu'il n'y en a pas non plus sur la droite  $\sigma = 0$ . VALLÉE-POUSSIN a démontré un résultat plus fort qui est qu'il existe une constante positive  $K$ , telle que  $\zeta(s)$  n'a pas de zéro dans le domaine

$$\sigma > 1 - \frac{K}{\log t}, \quad t > 3,$$

un résultat que Littlewood a amélioré d'un facteur  $\log \log t$  dans le dernier terme du côté droit. Plus tard, cela a encore été amélioré par TCHUDAKOFF<sup>1</sup>, et en dernier par TITCHMARSH<sup>2</sup> qui a montré que pour tout  $\delta$  fixé positif, il existe une constante positive  $K(\delta)$ , telle que  $\zeta(s)$  n'a pas de zéros dans le domaine

$$\sigma > 1 - \frac{K(\delta)}{(\log t)^{\frac{1}{2}+\delta}}, \quad t > 3.$$

Pour des applications en théorie des nombres, ces résultats sont les plus importants connus à propos des zéros de  $\zeta(s)$ . Puisqu'en réalité, ils ne nous disent pas grand chose sur la localisation des zéros par rapport à la droite critique, on mentionne simplement ce sujet en passant ici.

## II

Si cependant nous nous contentons d'assertions qui sont vérifiées pour "presque tous" les zéros de  $\zeta(s)$ , c'est-à-dire qui sont vérifiées pour tous les zéros avec  $0 < \gamma \leq T$ , excepté possiblement par un certain nombre d'entre eux qui est de l'ordre de  $o(T \log T)$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ , on peut prouver bien davantage.

Le premier résultat de cette sorte a été obtenu en 1914 par BOHR et LANDAU, qui ont démontré que si le nombre de zéros avec  $0 < \gamma \leq T$  et  $\beta > \sigma$  est noté par  $N(\sigma, T)$ ,

$$N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right) = O(T),$$

pour tout  $\delta$  positif fixé. Ce résultat puisque  $\delta$  est arbitraire montre que presque tous les zéros sont dans le voisinage immédiat de la droite critique. Pourtant le résultat n'est pas très caractéristique de  $\zeta(s)$ , puisqu'il est vérifié par une large classe de fonctions définies par des séries de Dirichlet, sans propriétés analogues à (2) ou (3). En utilisant (2), BOHR et LANDAU ont réussi à améliorer leur résultat en celui-ci

---

<sup>1</sup>TCHUDAKOFF (1)

<sup>2</sup>TITCHMARSH (4)

$$(5) \quad N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right) = o(T),$$

qui est plus remarquable puisque, selon les recherches de BOHR concernant la distribution générale des valeurs de  $\zeta(s)$ , le résultat correspondant n'est pas vérifié par la fonction  $\zeta(s) - a$ , où  $a$  est n'importe quel nombre  $\neq 0$ . La nouvelle idée dans la preuve était de considérer non pas  $\zeta(s)$  elle-même, mais  $\zeta(s)\psi(s)$  où  $\psi(s)$  était une fonction auxiliaire régulière dans le domaine  $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$ ,  $0 < t \leq T$  considéré, qui a été choisie de façon à être telle que  $\zeta(s)\psi(s)$  dans ce domaine est généralement proche de 1 ou, dit de façon plus précise, telle que la valeur moyenne

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(s)\psi(s) - 1|^2 dt$$

était très petite pour  $\sigma \geq \frac{1}{2} + \delta$  et des grandes valeurs de  $T$ , et que pour n'importe quel  $\sigma > 1$  fixé,  $\zeta(s)\psi(s)$  était très proche de 1 pour tout  $t$ . Il est alors possible de déduire que les zéros de  $\zeta(s)\psi(s)$  et a fortiori ceux de  $\zeta(s)$  dans le domaine considéré sont comparativement peu nombreux. BOHR et LANDAU ont utilisé la fonction auxiliaire

$$\psi(s) = \prod_{p < N} (1 - p^{-s}),$$

où  $N$  était amené à tendre vers l'infini par rapport à  $T$  selon une manière adéquate.

CARLSON a plus tard démontré (5) en montrant que pour n'importe quel  $\varepsilon$  positif,

$$(6) \quad N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right) = O(T^{1-4\delta^2+\varepsilon}),$$

pour tout  $\delta > 0$ . Cette avancée a été rendue possible par l'utilisation d'une nouvelle fonction auxiliaire, notamment

$$\psi(s) = \sum_1^s \frac{\mu(n)}{n^s}$$

où  $\mu(n)$  est la fonction de Möbius et où  $z$  est choisie comme étant une puissance convenable de  $T$ . Un résultat encore meilleur a été obtenu par TITCHMARSH, qui a démontré (6) avec l'exposant

$$1 - \frac{\delta}{1 - \delta} + \varepsilon$$

du côté droit. D'autres améliorations ont été faites par INGHAM<sup>3</sup> qui a montré que

$$(7) \quad N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right) = O\left(T^{1-\frac{4\delta}{3-2\delta}} \log^5 T\right)$$

uniformément pour  $\delta \geq 0$ . Cela implique en particulier que si la constante  $c$  est suffisamment grande, presque tous les zéros se trouvent dans le domaine

---

<sup>3</sup>INGHAM (1), (2). Ingham donne aussi une autre estimation de  $N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right)$  qui pour  $\delta > \frac{57}{154}$  est meilleure que (7), ceci n'est pas noté ci-dessus puisque nous nous intéressons principalement au cas où  $\delta$  est petit.

$$(8) \quad \left| \sigma - \frac{1}{2} \right| < c \frac{\log \log t}{\log t}, \quad t > 3.$$

Si  $\delta$  est très petit, disons inférieur à un certain multiple de  $\frac{\log \log T}{\log T}$ , l'assertion (6) est triviale, puisque selon (4), on a toujours

$$N \left( \frac{1}{2} + \delta, T \right) = O(T \log T).$$

En essayant d'améliorer les résultats dans le voisinage immédiat de la droite critique, on verra aisément que ceci n'est pas possible par la définition ci-dessus de  $\psi(s)$ . À la place de cela, on peut commencer avec une expression comme

$$\psi(s) = \sum_{n=1}^x \frac{\lambda_n}{n^s},$$

où  $\lambda_1 = 1$  et les autres  $\lambda$  devront être déterminés ultérieurement. On essaie alors de choisir les  $\lambda$  et  $z$  de telle façon que la valeur moyenne

$$(9) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + \delta + it \right) \psi \left( \frac{1}{2} + \delta + it \right) - 1 \right|^2 dt$$

devienne aussi petite que possible. Pour simplifier, supposons que  $\delta = 0$ .

En procédant à une estimation de la valeur moyenne, on trouve une expression dans laquelle dans le terme dominant intervient la forme quadratique <sup>4</sup>

$$(10) \quad \sum_{m, n \leq z} \frac{\lambda_m \lambda_n}{mn} (m, n)$$

Cette forme est toujours positive, et on détermine maintenant les valeurs de  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_z$  qui la rendent minimale. En procédant ainsi, on trouve

$$(11) \quad \lambda_n = \frac{n}{\sum_{\rho \leq z} \frac{\mu^z(\rho)}{\varphi(\rho)}} \cdot \sum_{\rho \leq \frac{z}{n}} \frac{\mu(\rho n) \mu(\rho)}{\varphi(\rho n)},$$

où  $\varphi(\rho)$  est la fonction d'Euler

$$\varphi(\rho) = \rho \prod_{p|\rho} \left( 1 - \frac{1}{p} \right).$$

Il est important de noter que les  $\lambda_n$  définis par (11) ne diffèrent pas beaucoup de

$$(12) \quad \lambda'_n = \mu(n) \left( 1 - \frac{\log n}{\log z} \right)$$

---

<sup>4</sup> $(m, n)$  représente ici le plus grand commun diviseur de  $m$  et  $n$ .

et on peut les utiliser à la place des  $\lambda_n$  donnés par (11) avec le même résultat. L'estimation de la forme quadratique (10) dans ce cas pourtant, ne peut pas être menée avec seulement des méthodes élémentaires. En utilisant maintenant les  $\lambda_n$  donnés par (11) et en choisissant  $z$  comme étant une puissance convenable de  $T$ , on obtient le résultat souhaité pour (9). En procédant de la même manière dans le cas général  $\delta > 0$ , on peut maintenant démontrer que <sup>5</sup>

$$(13) \quad N\left(\frac{1}{2} + \delta, T\right) = O\left(T^{1-\frac{\delta}{4}} \log T\right),$$

uniformément pour  $\delta \geq 0$ , qui est meilleure que (7) quand  $\delta$  est inférieur à un certain multiple de  $\frac{\log \log T}{\log T}$ . À partir de (13), on peut déduire que pour tout  $k$  positif donné, <sup>6</sup>

$$\frac{1}{N(T)} \sum_{0 < \gamma \leq T} \left| \beta - \frac{1}{2} \right|^k = O\left(\frac{1}{(\log T)^k}\right)$$

et de plus que si  $\Phi(t)$  est une fonction positive qui augmente à l'infini avec  $t$ , alors presque tous les zéros sont dans la région<sup>7</sup>

$$\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| < \frac{\Phi(t)}{\log t}, \quad t > 3.$$

Il semble extrêmement difficile d'obtenir des résultats plus précis dans le voisinage immédiat de la droite critique, sans introduire d'idée vraiment nouvelle. Dans tous les cas, il semble certain qu'une preuve éventuelle de l'hypothèse de Riemann ne peut pas être construite dans ces directions. Les méthodes sont en fait trop générales, dans la mesure où elles dépendent en dernier recours du produit eulérien (2), puisqu'elles peuvent être utilisées sur d'autres fonctions ayant un développement en produit similaire à celui de  $\zeta(s)$ , mais sans les autres propriétés caractéristiques de  $\zeta(s)$ , notamment l'équation fonctionnelle.

### III

Les résultats qui viennent d'être mentionnés constituent la part essentielle de ce que nous sommes capables de faire à présent à propos de la distribution générale des zéros de  $\zeta(s)$ . Ils ne disent cependant rien à propos de l'existence de zéros sur la droite critique. Après qu'on ait montré précédemment par des calculs numériques qu'il y a effectivement des zéros sur la droite critique  $\sigma = \frac{1}{2}$ , les premiers progrès importants dans cette direction ont été ceux de HARDY lorsqu'il a

---

<sup>5</sup>SELBERG (2), on devrait noter qu'il est facile d'améliorer l'exposant  $1 - \frac{\delta}{4}$  mais que c'est de peu d'importance puisqu'il devient dans tous les cas plus grand que l'exposant correspondant dans (7) pour  $\delta > 0$ .

<sup>6</sup>*Note de la traductrice : problème de variable  $\gamma$  non liée à gauche.*

<sup>7</sup>En rapport avec cela, il est intéressant de noter qu'il est probablement vrai que  $a \neq 0$  et que  $\Phi(t)$  est une fonction non décroissante, la condition nécessaire et suffisante pour que presque tous les zéros de  $\zeta(s) - a$  soient dans la région

$$\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| < \frac{\Phi(t)}{\log t}, \quad t > 3,$$

est que  $\frac{\Phi(t)}{\sqrt{\log \log t}}$  tende vers l'infini avec  $t$ .

démontré en 1914 que  $\zeta(s)$  a une infinité de zéros sur la droite critique. Je vais donner une brève esquisse de l'idée sur laquelle la preuve est basée.

De (3), on déduit que pour  $s = \frac{1}{2} + it$ ,  $t$  réel, l'expression

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

est réelle. En écrivant maintenant

$$(14) \quad \vartheta = \arg \left\{ \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right\}$$

on a par cela que la fonction

$$X(t) = e^{i\vartheta} \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

est réelle pour  $t$  réel. On compare alors les intégrales

$$(15) \quad I = \int_0^T X(t) dt$$

et

$$(16) \quad J = \int_0^T |X(t)| dt \geq \left| \int_0^T \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) dt \right| = |J'|.$$

Il est possible de montrer que lorsque  $T$  tend vers l'infini,

$$I = o(T),$$

et

$$J' = T - o(T).$$

De cela, il découle que  $X(t)$  ne peut pas être de signe constant pour toutes les valeurs de  $t$  suffisamment grandes, et donc que  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$  a une infinité de zéros réels.

En comparant à la place de (15) et (16) les intégrales plus générales

$$(17) \quad I = I(t, H) = \int_t^{t+H} X(u) du,$$

et

$$(18) \quad J = J(t, H) = \int_t^{t+H} |X(u)| du \geq \left| \int_t^{t+H} \zeta\left(\frac{1}{2} + iu\right) du \right| = |J'(t, H)| = |J'|,$$

il est possible de montrer que pour tout  $\varepsilon$  positif donné, il existe un  $T_0 = T_0(\varepsilon)$  positif tel que pour  $T > T_0$ ,  $H \geq T^{\frac{1}{4} + \varepsilon}$  et  $0 < t < T$ , on a toujours  $|J'| > |I|$ . En dénotant maintenant par  $N_0(T)$  le nombre de zéros de  $\zeta(s)$  avec  $0 < \gamma \leq T$  et  $\beta = \frac{1}{2}$ , on trouve par conséquent

$$N_0(T) > T^{\frac{3}{4} - \varepsilon}, \quad T > T_0,$$

un résultat qui est dû à HARDY et LITTLEWOOD. Cependant quand  $H$  croît plus lentement qu'une certaine puissance de  $T$ , l'argument échoue puisqu'on n'est pas capable d'obtenir des estimations suffisantes de  $I$  et  $J'$ .

En 1921, HARDY et LITTLEWOOD ont réussi à démontrer qu'il existe des constantes absolues positives  $K$  et  $T_0$  telles que

$$(19) \quad N_0(T) > KT, \quad T > T_0.$$

La preuve est encore basée sur l'idée d'opposer les intégrales  $I$  et  $J'$ , si ce n'est que nous nous contentons maintenant de montrer que l'inégalité  $|J'| > |I|$  est vérifiée relativement fréquemment dans l'intervalle  $0 < t < T$ , c'est-à-dire qu'elle est vérifiée dans un sous-ensemble de mesure  $> \frac{T}{2}$ .

De cela, on peut déduire que  $N_0(T) > \frac{T}{5H}$  et si l'on peut choisir une constante  $H$  alors on a (19). Le point essentiel dans cette démonstration est de montrer que si  $H$  est une constante suffisamment grande, l'inégalité  $|J'| > |I|$  est vérifiée dans un sous-ensemble de l'intervalle  $0 < t < T$  de mesure suffisamment grande. On réalise cela en recherchant les valeurs moyennes quadratiques dans l'intervalle  $0 < t < T$  des expressions  $|I|$  et  $|J' - H|$ .

La preuve de (19) a été considérablement simplifiée par TITCHMARSH. SIEGEL<sup>8</sup> a donné ultérieurement une autre preuve basée sur des idées différentes et il a aussi fourni une estimation numérique de la constante  $K$ .

Il y a un saut par rapport à  $\log T$  entre le côté droit de (19) et  $T \log T$  qui, selon (4), est l'ordre de grandeur  $N(T)$ . Pour réduire ce saut, on doit être capable de choisir  $H$  plus petit. Maintenant, on ne peut pas s'attendre à pouvoir démontrer  $|I| < |J'|$  dans un ensemble de mesure suffisamment grande, à moins que

$$\int_0^T |I|^2 dt < \int_0^T |J'|^2 dt.$$

Ceci est vrai si  $H$  est une constante élevée, mais si  $H$  est inférieur à une certaine constante positive, on a au contraire

$$(20) \quad \int_0^T |I|^2 dt > \int_0^T |J'|^2 dt.$$

C'est la raison pour laquelle l'argument de HARDY et LITTLEWOOD ne fournit pas un meilleur résultat que (19). Il peut sembler vraisemblable que pour  $H$  petit, nous devrions avoir  $|I| > |J'|$  relativement souvent dans l'intervalle  $0 < t < T$ , et qu'ainsi nous pourrions généralement perdre quelque chose en considérant  $|J'|$  à la place de  $J$ . En essayant d'analyser la question plus profondément pourtant, on réalise que ça n'est pas le cas. Ceci peut être illustré par la considération suivante : on sait bien que

$$(21) \quad \int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \sim T \log T$$

---

<sup>8</sup>SIEGEL (1). Voir aussi KUZMIN (7)

D'un autre côté, on peut montrer que  $\log t$  qui est l'ordre de grandeur "moyen" de  $\left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2$  n'est pas l'ordre de grandeur "normal" de l'expression puisque

$$\int_0^T \left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt = o(T\sqrt{\log T}).$$

Dans l'intégrale (21), les valeurs normales que prend  $\left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2$ , sont surpassées par les valeurs anormalement grandes que prend  $\left| \zeta \left( \frac{1}{2} + it \right) \right|^2$  dans un certain ensemble exceptionnel de points  $t$ . Maintenant, quand  $H$  est plus petit, un phénomène similaire advient pour les deux intégrales

$$\int_0^T |I|^2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^T |J'|^2 dt$$

notamment que les contributions les plus importantes à leurs valeurs sont dues à un certain ensemble exceptionnel de points  $t$  pour lesquels  $|X(u)|$  prend des valeurs anormalement grandes dans l'intervalle  $t < u < t + H$ . Le fait que (20) soit vraie pour des petites valeurs de  $H$  devrait donc être expliqué de telle façon que  $|I| > |J'|$  soit généralement vrai dans cet ensemble exceptionnel, alors que pour les  $t$  "normaux", il est possible qu'advienne le contraire.

Cette remarque nous montre immédiatement comment on doit modifier les arguments de HARDY et LITTLEWOOD pour améliorer (19). D'un autre côté, on doit empêcher que les "pics" de  $|X(t)|$  ne prédominent quand  $H$  est petit. Ceci peut être obtenu en multipliant  $X(t)$  par une fonction auxiliaire qui dans une certaine mesure neutralise la variation de  $|X(t)|$ , et qui est toujours réelle et non négative de manière à ne pas influencer les changements de signes de  $X(t)$ . Pour atteindre ce but, on utilise une procédure analogue à celle appliquée dans la section précédente. On écrit en analogie avec (12)

$$(22) \quad \eta(t) = \sum_{n \leq z} \frac{a_n}{n^{\frac{1}{2} + it}} \left( 1 - \frac{\log n}{\log z} \right)$$

où les  $a_n$  sont les coefficients dans le développement

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta(s)}} = \prod_p (1 - p^{-s})^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

valides pour  $\sigma > 1$ , et  $a_1 = 1$ . On considère maintenant à la place de  $X(t)$  la fonction

$$X_1(t) = X(t) |\eta(t)|^2,$$

et les intégrales

$$I_1 = \int_t^{t+H} X_1(u) du,$$

et

$$J_1 = \int_t^{t+H} |X_1(u)| du \geq \left| \int_t^{t+H} \zeta \left( \frac{1}{2} + iu \right) \eta^2(u) du \right| = |J'_1|.$$



En choisissant maintenant  $z$  comme une puissance convenable de  $T$ , disons  $z = T^{\frac{1}{20}}$ , on peut montrer que si  $T > T_0$ ,  $H = \frac{A}{\log T}$  où  $A$  est une constante positive suffisamment grande, l'inégalité  $|I_1| < |J_1|$  est vérifiée dans un sous-ensemble de l'intervalle  $0 < t < T$  de mesure  $> \frac{T}{2}$ . De cela, on déduit que <sup>9</sup>

$$(23) \quad N_0(T) > KT \log T, \quad T > T_0.$$

Puisque

$$N_0(T) \leq N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T,$$

l'ordre de grandeur de  $N_0(T)$  est par conséquent complètement déterminé.

La prochaine étape dans cette direction devrait être éventuellement de montrer que  $N_0(T) \sim N(T)$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ , mais il ne semble pas vraisemblable qu'un tel résultat, s'il s'avérait vrai, puisse être démontré par des méthodes similaires à celles que nous avons utilisées ici. Parmi d'autres choses, cela devrait nécessiter une distribution beaucoup plus régulière des zéros de  $\zeta(s)$  que la distribution ne l'est en réalité.

Il est naturel de se demander dans quelle mesure les résultats étendus correspondant peuvent être vérifiés par d'autres séries de Dirichlet ayant une équation fonctionnelle similaire, mais n'ayant pas la propriété d'avoir un développement en produit similaire à (2). Par exemple, il a été montré que la fonction zeta d'Epstein <sup>10</sup>

$$Z_Q(s) = \sum'_{m,n} \{Q(m,n)\}^{-s}$$

où  $Q(x,y)$  est une forme quadratique définie positive, a toujours une infinité de zéros sur la ligne  $\sigma = \frac{1}{2}$  bien qu'elle n'ait pas de produit eulérien, sauf dans certains cas particuliers. Il a aussi été démontré que  $Z_Q(s)$  peut avoir des zéros dans le demi-plan  $\sigma > \frac{1}{2}$ . On peut même construire une classe étendue de séries de Dirichlet avec équation fonctionnelle, pour lesquelles le résultat

$$N_0(T) > KT, \quad T > T_0,$$

est vérifié, bien qu'elles n'aient pas de produit eulérien et qu'elles n'aient même pas de zéros dans leur demi-plan de convergence absolue. Dans la preuve de (23) au contraire, le produit eulérien de  $\zeta(s)$  joue un rôle important, puisqu'il est basé sur des propriétés spéciales des coefficients  $a_n$ . D'un autre côté, on ne peut certifier que les remarques faites ci-dessus en lien avec (21) ne s'appliquent pas également dans certains cas lorsque la fonction n'a pas de produit eulérien. Il peut par conséquent sembler vraisemblable que  $N_0(T) > KT$  ne représente pas toujours la vérité finale même dans ces cas-là.

Selon tous ces éléments, il semble justifié d'être sceptique et de ne pas regarder (23) comme un argument particulièrement fort en faveur de l'hypothèse de Riemann.

---

<sup>9</sup>SELBERG (1). La preuve de ce théorème a été considérablement simplifiée par TITCHMARSH (à paraître dans le *Quarterly Journal of Mathematics*).

<sup>10</sup>Le caractère "prime" (apostrophe)  $\sum'$  indique que le terme avec  $m = n = 0$  est omis.

## IV

Des investigations numériques ont été menées par différents auteurs pour déterminer la localisation des premiers zéros de  $\zeta(s)$ . Ces calculs, les plus complets étant dus à TITCHMARSH<sup>11</sup>, montrent que  $\zeta(s)$  a 1041 zéros dans la région  $0 < t < 1468$  et qu'ils sont tous sur la droite critique. Ceci est sans doute l'argument le plus fort en faveur de l'hypothèse de Riemann apporté à ce jour. Mais aussi convaincant que cela puisse sembler, on doit en mathématiques être prudent lorsqu'on généralise à partir de données numériques, et dans ce cas, les expériences à partir d'un domaine aussi lié que celui de la théorie de la distribution des nombres premiers devrait être un appel à la prudence.

Rappelons par exemple que l'on croyait autrefois que la différence

$$\pi(x) - \text{li } x,$$

était toujours négative, une conjecture qui était corroborée par une forte évidence numérique. Malgré cela, il a été démontré par LITTLEWOOD qu'il existe une infinité de valeurs entières de  $x$  pour lesquelles

$$\pi(x) > \text{li } x.$$

Dans le même ordre d'idée, il est d'un intérêt certain de rechercher théoriquement une autre "loi" empirique pour la distribution des zéros  $\zeta(s)$ , qui soit vraie sans exception dans la région  $0 < t \leq 280$ , et avec relativement peu d'exceptions dans la région  $0 < t \leq 1468$ . C'est ce qu'on appelle la "loi de Gram"<sup>12</sup>.

La fonction  $\vartheta(t)$  définie par (14), quand  $t$  croît de 0 à l'infini, décroît d'abord vers un minimum entre  $-2\pi$  et  $-\pi$ , et est à partir de ce point en constante augmentation. Pour les grandes valeurs de  $t$ , on a

$$\vartheta = \frac{t}{2} \log \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

On détermine maintenant pour  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ , le nombre positif  $t_\nu$  par les conditions  $\vartheta'(t_\nu) > 0$  et  $\vartheta(t_\nu) = (\nu - 1)\pi$ . Alors

$$(24) \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right) = (-1)^{\nu-1} X(t_\nu),$$

de telle façon que  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  est réel. La formule de RIEMANN-SIEGEL<sup>13</sup>

$$(25) \quad X(t) = \sum_{n \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\cos(\vartheta - t \log n)}{\sqrt{n}} + O\left(t^{-\frac{1}{4}}\right),$$

donne

<sup>11</sup>TITCHMARSH (2), (3).

<sup>12</sup>Aussi loin que je le sache, cette question a été traitée précédemment seulement par TITCHMARSH, qui prend le même point de vue que le mien ici. Voir TITCHMARSH (1), (2), (3).

<sup>13</sup>SIEGEL (1)

$$(25') \quad \zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right) = 1 + \sum_{1 < n \leq \sqrt{\frac{t_\nu}{2\pi}}} \frac{\cos(t_\nu \log n)}{\sqrt{n}} + O\left(t_\nu^{-\frac{1}{4}}\right),$$

qui semble suggérer que  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  est généralement positif, et qu'en conséquence  $X(t_{\nu-1})$  et  $X(t_\nu)$  devraient généralement être de signes différents, de telle façon que  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$  devrait en général avoir au moins un zéro réel dans l'intervalle  $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ . Les résultats numériques de GRAM et BACKLUND ont montré que pour  $t_\nu < 200$ , les  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  étaient toujours positifs et que l'on avait toujours  $t_{\nu-1} < \gamma_\nu < t_\nu$ <sup>14</sup>, de telle façon que les  $\gamma$  étaient séparés par les  $t_\nu$ . C'est la propriété à laquelle il est fait référence par les termes "loi de Gram". Les derniers résultats de HUTCHINSON montrent que la loi de Gram est vraie sans exception jusqu'à  $t = 280$ , c'est-à-dire pour plus de 120 des premiers  $t_\nu$ , et les résultats de TITCHMARSH montrent que parmi les 1042 premiers  $t_\nu$ , qui sont inférieurs à 1468, il y a seulement 43 cas pour lesquels  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  est négatif, de plus pour  $\nu = 1, 2, \dots, 1041$ , on a que  $t_{\nu-1} < \gamma_\nu < t_\nu$  excepté dans 43 cas, quand les  $\gamma_\nu$  étaient dans des intervalles adjacents qui contenaient par conséquent exactement deux  $\gamma$ .

TITCHMARSH<sup>15</sup> a montré que  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  est négatif pour une infinité de nombres  $\nu$ . De plus, si on dénote par  $\Delta_n$  la différence  $m - n$  si  $\gamma_n$  est dans le  $m^{\text{ième}}$  intervalle  $(t_{m-1}, t_m)$ , il a démontré que lorsque  $n$  tend vers l'infini

$$\overline{\lim} \Delta_n = \infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim} \Delta_n = -\infty.$$

Par une recherche plus poussée sur la variation de l'amplitude de  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ , j'ai réussi à démontrer qu'il existe des constantes positives absolues  $K$  et  $N_0$  telles que pour  $N > N_0$ ,  $1 \leq \nu \leq N$ , les nombres  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_{\nu-1}\right)$  et  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  sont de signes différents dans plus de  $KN$  cas, et du même signe dans plus de  $KN$  cas. De cela il découle en particulier qu'il y a plus de  $KN$  intervalles  $(t_{\nu-1}, t_\nu)$  qui ne contiennent aucun  $\gamma$ , et plus de  $KN$  intervalles qui contiennent plus d'un  $\gamma$ . Également parmi les nombres  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$ , il doit y en avoir plus de  $KN$  qui sont des nombres négatifs, et plus de  $KN$  qui sont des nombres positifs.

Par conséquent, par exemple,  $\zeta\left(\frac{1}{2} + it_\nu\right)$  n'est même pas positif pour presque tout  $\nu$ .

Un autre résultat nouveau est que pour tout entier positif fixé  $k$ ,

$$(26) \quad \sum_{n=1}^N \Delta_n^{2k} = \frac{2k!}{k!(2\pi)^{2k}} N (\log \log N)^k + O(N(\log \log N)^{k-\frac{1}{2}})$$

et

<sup>14</sup> $\gamma_\nu$  dénote le  $\nu^{\text{ième}}$   $\gamma$  quand ils sont rangés par ordre croissant de grandeur.

<sup>15</sup>TITCHMARSH (2).

$$(26') \quad \sum_{n=1}^N \Delta_n^{2k-1} = O(N(\log \log N)^{k-1}).$$

Il est probablement vrai, bien que je n'aie pas été capable de le démontrer rigoureusement, que  $\sqrt{\log \log n}$  est l'ordre "normal" de grandeur de  $\Delta_n$  au sens où si  $\Phi(n)$  est une fonction positive de  $n$  qui tend vers l'infini avec  $n$ , les inégalités <sup>16</sup>

$$\frac{\sqrt{\log \log n}}{\Phi(n)} < |\Delta_n| < \Phi(n)\sqrt{\log \log n},$$

sont vérifiées pour presque tout  $n$ . En particulier, cela devrait impliquer que  $\gamma_\nu$  "n'est presque jamais" dans l'intervalle  $(t_{\nu-1}, t_\nu)$ .

Lorsque  $1 \leq n \leq 1041$ , on a  $|\Delta_n| = 0$  excepté dans 43 cas quand  $|\Delta_n| = 1$  alors que dans (26), le terme dominant du côté droit pour  $k = 1$ , est

$$\frac{N}{2\pi^2} \log \log N$$

on devrait par conséquent s'attendre à ce que  $\Delta_n$  s'évanouisse dans la plupart des cas dès que  $\log \log n$  est petit comparativement à  $2\pi^2$ .

Un autre résultat qui montre que la distribution des  $\gamma$  est irrégulière est qu'il existe une constante positive absolue  $\Theta$  telle que pour tous les entiers positifs  $r$ ,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{2\pi r} \log \gamma_n > 1 + \Theta \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+r} - \gamma_n}{2\pi r} \log \gamma_n < 1 - \Theta.$$

Des résultats comme ceux-ci montrent que pour de grandes valeurs de  $t$ , la loi de Gram n'est pas souvent respectée, et il en est ainsi des exemples qu'on a étudiés dans le domaine couvert par les calculs numériques. On peut expliquer cela par le fait que la somme intervenant dans (25) pour  $t = 1468$  contient encore seulement 15 termes, de telle façon que dans (25'), le premier terme du côté droit est généralement prédominant pour  $t_\nu < 1468$ .

Cela suggère qu'en dépit de l'évidence numérique par laquelle elle est corroborée, il y a encore des raisons de regarder l'hypothèse de Riemann avec quelque suspicion. Car, dans le domaine couvert par les calculs, les exceptions à la loi de Gram sont peu nombreuses et elles sont du type le plus simple possible, plus loin des exceptions à la loi de Gram doivent advenir et il semble que les irrégularités dans la variation de  $\zeta(s)$  qui sont nécessaires pour faire que des zéros se retrouvent en dehors de la droite  $\sigma = \frac{1}{2}$ , doivent être bien plus éloignées que ces premières exceptions à la loi de Gram<sup>17</sup>.

<sup>16</sup>C'est la première inégalité qui est le point difficile, et que je n'ai pas été capable de démontrer complètement.

<sup>17</sup>Cf. TITCHMARSH (2) et (3), où les mêmes opinions sont exprimées, soutenues par des arguments supplémentaires.

---

Références

---

sont seulement données les références à des articles qui ont été publiés après l'édition du livre de TITCHMARSH : *The zeta-function of Riemann* (Cambridge 1930).

INGHAM, A. E. (1) : On the difference between consecutive primes, *Quart. Journ. of Math.* 8 (1937), 255-266.

\_\_\_\_\_ (2) : On the estimation of  $N(\sigma, T)$ , *Quart. Journ. of Math.* 11 (1940), 291-292.

KUZMIN, R. (1) : Sur les zéros de la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann, *C. r. Acad. sci. U. R. S. S.* 2 (1934), 398-400.

SELBERG, A. (1): On the zeros of Riemann's zeta-function, *Skr. utg. av Vid. Akad. i Oslo. Mat. Nat. Kl.* 1942 No. 10.

\_\_\_\_\_ (2): Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, *Arch. f. Math. og Nature.* 48 (1946), Nr. 5.

SIEGEL, C. L. (1): Über Riemanns Nachlass zur Analytischen Zahlentheorie, *Quell. u. Stud. z. Geschichte d. Math.* 2 (1932), 45-80.

TCHUDAKOFF, N. (1): On the zeros of the function  $\zeta(s)$ , *C. r. Acad. sci. U. R. S. S.* 1 (1936), 201-204.

TITCHMARSH, E. C. (1): On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann. IV. *Quart. Journ. of Math.* 5 (1934), 98-105.

\_\_\_\_\_ (2): The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Roy. Soc. A*, 151 (1935), 234-255.

\_\_\_\_\_ (3): The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Roy. Soc. A*, 157 (1936), 261-263.

\_\_\_\_\_ (4): On  $\zeta(s)$  and  $\pi(x)$ , *Quart. Journ. of Math.* 9 (1938), 97-108.

---

**Commentaires et corrections de l'article  
"La fonction zeta et l'hypothèse de Riemann"**

---

1. p. 199 en haut de la page : Concernant les assertions énoncées après les équations (26) et (26') ; il découle de ces équations par la théorie standard que la quantité  $\frac{\Delta_n}{\sqrt{\log \log n}}$  a une distribution gaussienne simple. En particulier, cela répond par l'affirmative à la question posée ici. En 1946, je ne savais pas que ces résultats à propos des moments de  $\Delta_n$  permettaient de déterminer la fonction de distribution.

2. p. 199 en bas de la page : comme le manuscrit de l'article "La fonction zeta et l'hypothèse de Riemann" a été rapidement écrit, ces inégalités ont été mal énoncées. Ce que j'avais démontré était que ces inégalités sont vraies si on remplace  $\theta$  par  $\theta r^{-\alpha}$ , où on peut prendre pour  $\alpha$  la fraction  $\frac{2}{3}$ , et si l'on suppose vraie l'hypothèse de Riemann, on peut prendre la fraction  $\frac{1}{2}$ .