Année 2000 : présentation des prix du Millenium par le Clay Institute (exposant : Michael Atiyah [1])

Arthur Jaffe : Notre prochain intervenant est un phénomène. Il n'a vraiment pas besoin d'être présenté. J'ai eu beaucoup de chance d'avoir Michael Atiyah comme professeur quand j'étais étudiant à Cambridge. Il était alors un jeune maître de conférences à l'université. Il a révolutionné les mathématiques dans les années 1960 en unifiant l'analyse, la topologie et la géométrie. Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer est connu de tout étudiant en mathématiques. Il a été professeur à Oxford, à l'Institute for Advanced Study et à Cambridge. Je ne sais plus où d'autre...Il a été professeur au Trinity College de Cambridge, président de la Royal Society, et a reçu la médaille Fields pour ses travaux en mathématiques, je crois en 1966. Et il vit maintenant à Édimbourg avec sa charmante épouse, mais je ne dirai pas qu'il est à la retraite, car je ne peux pas imaginer Michael Atiyah à la retraite. Michael Atiyah, Sir Michael Atiyah.

Ah, eh bien, je suis très heureux d'être ici pour cette grande occasion, la réunion de l'Institut Clay, et de contribuer au lancement des problèmes pour le prochain siècle. Je suis très heureux de voir autant de jeunes ici dans le public. Je suis bien sûr aussi très heureux de voir de vieux amis. Mais je suis particulièrement heureux de voir des jeunes car c'est une occasion qui marque véritablement le passage du siècle dernier au nouveau siècle. Nous sommes ici pour résumer l'état des mathématiques à la fin d'un siècle et décrire les problèmes sur lesquels les jeunes devront travailler au cours du nouveau siècle.

Mon message est donc un message destiné aux jeunes. Voici vos problèmes. C'est vers vous que nous nous tournons pour trouver les solutions à ces problèmes. Quant aux quatre problèmes qui m'ont été confiés, je précise, au cas où vous ne le sauriez pas, que c'est l'Institut Clay qui a choisi ces problèmes. Nous ne sommes que des porte-paroles. En tout cas, pour ce qui me concerne. Et on m'a demandé de parler de quatre problèmes. Les problèmes sont très variés, couvrent un large éventail de domaines, mais j'ai essayé de ne pas entrer dans trop de détails techniques. Ce n'était pas ma mission. La mission consiste à essayer de replacer le problème dans un certain contexte. Et j'aimerais, dans la mesure du possible, les unifier par des thèmes communs. Souligner que bien que nous identifiions de nombreux problèmes individuels en mathématiques, les mathématiques possèdent une unité globale. Et cette unité est tout aussi importante que leur diversité. Ainsi, les quatre problèmes se situeront tous à la frontière entre la géométrie et l'analyse. Et la géométrie est très étroitement liée à la physique . Et l'analyse englobera bien sûr d'autres parties des mathématiques comme l'algèbre, mais c'est cette interface géométrie-analyse qui les sous-tend toutes.

Alors, au cours des 100 années entre 1900 et l'an 2000, l'un des thèmes que l'on peut observer dans le développement des mathématiques, durant ce siècle, a été le passage, par exemple, du linéaire au non-linéaire. Les théories linéaires ont été progressivement comprises, et le mouvement s'est orienté vers les théories non-linéaires. Il y a également eu un changement similaire dans les dimensions. La géométrie et l'analyse en dimensions un et deux sont bien comprises. Nous sommes passés aux dimensions trois et quatre, et parfois plus élevées. Ce changement de dimension est l'un des phénomènes qui ont eu lieu au cours de ce siècle. Tous les problèmes dont je vais traiter sont

1. https://www.youtube.com/watch?v=trxjCOmg8GYt=4s.
Révision de la traduction ia : Denise Vella-Chemla, octobre 2026.

en réalité centrés, sous une forme ou une autre, sur les équations aux dérivées partielles. Or, les équations aux dérivées partielles prennent de nombreuses formes. On commence d'abord par les équations linéaires à coefficients constants, que l'on comprend grâce aux transformées de Fourier. Ensuite, on passe à l'étude des équations linéaires à coefficients variables, ou ce qui revient plus ou moins au même, à l'étude des équations linéaires sur un espace courbe. Et à partir de là, on peut commencer à examiner les équations quasi-linéaires où la linéarité est en quelque sorte faible, puis passer aux équations pleinement non-linéaires. Le non-linéaire n'est pas une propriété, c'est l'absence de propriété. Ainsi, on peut avoir une infinité de subdivisions de la non-linéarité, bien sûr. Et derrière toute l'analyse de ces questions, il y a, bien sûr, l'importance croissante de la topologie, qui a été réalisée au cours du siècle dernier et qui exerce une influence prédominante sur les solutions à grande échelle des équations aux dérivées partielles. C'est peut-être la chose qui est devenue la plus importante au XXe siècle, distinguant en quelque sorte l'an 2000 de l'année 1900. Donc, ce sont là les thèmes communs. Maintenant, pour introduire ces problèmes, du moins plusieurs d'entre eux en détail, il est utile de commencer avec un peu de contexte en basses dimensions. Et ici, je voudrais simplement vous rappeler que si l'on commence en deux dimensions, l'étude des surfaces, les surfaces orientables fermées, peut être classifiée : on a d'abord la sphère, puis le tore, la sphère avec un trou, et ensuite les objets avec plusieurs trous, le nombre de trous correspondant au genre.

Et l'unité des mathématiques est très joliment illustrée par le fait que les mêmes schémas ont été dessinés dans la conférence de John Tate lorsqu'il parlait de théorie des nombres. C'est donc un lien avec sa conférence. Le genre 0 est une sphère, le genre 1 est le tore, et ensuite nous avons les objets de genre supérieur. Ensuite, lorsque vous étudiez la géométrie de telles surfaces, vous devez spécifier la classe de fonctions que vous souhaitez étudier : que vous étudiiez ces surfaces du point de vue de la topologie pure, où la classe de fonctions est celle des fonctions continues, ou que vous souhaitiez étudier des aspects combinatoires, des structures linéaires par morceaux, ou lisses, qui sont des structures différentiables. Et dans le cas des deux problèmes qui ont été mentionnés au début, tous ces problèmes sont essentiellement équivalents. Ensuite, vous pouvez passer de la théorie réelle à la théorie complexe, en particulier lorsque vous avez des surfaces de Riemann, vous étudiez les choses du point de vue de l'analyse complexe, vous étudiez les fonctions holomorphes. En particulier, si les éléments sont algébriques, donnés par des équations algébriques, vous les reliez à l'algèbre. Et enfin, bien sûr, en revenant à la conférence de John Tate, vous pouvez aborder l'arithmétique où vos équations ont des coefficients polynomiaux. C'est la classe de fonctions qui décrit les types de géométrie que vous faites, et derrière tout cela, il y a l'image topologique. La classification des surfaces, au-delà de la classification topologique, dans le cas des courbes holomorphes et algébriques, comporte des paramètres continus, appelés modules. C'est le genre de théorie historique, bien comprise au XIXe siècle, et la partie fondamentale de l'histoire est, bien sûr, constituée des cycles qui se trouvent sur les surfaces. Les cycles fermés qui se trouvent sur un tore font le tour des deux axes, et il y a davantage de cycles dans les genres supérieurs, et ceux-ci sont formalisés par la théorie de l'homologie, et ils mènent à des invariants linéaires, ou ce que l'on pourrait appeler des invariants abéliens des surfaces. Et tout cela, bien sûr, est un travail qui remonte à Abel, Jacobi, Riemann, Klein, et ainsi de suite. C'est un grand héritage du XIXe siècle. Voilà pour le contexte.

Alors, permettez-moi maintenant de commencer avec le premier problème. J'ai quatre problèmes. J'ai une heure. Le ministre est parti, nous ne sommes donc plus sous pression. Euh, et le premier problème est ce que l'on appelle la conjecture de Poincaré. Donc, permettez-moi de vous le rappeler

un petit peu. Euh, nous passons maintenant des surfaces de dimension deux à la dimension trois. C'était la première étape dans l'augmentation de la dimension, et là encore, vous regardez des variétés orientables fermées, pas des surfaces, mais de dimension trois maintenant. Alors, cherchez-vous l'analogue tridimensionnel de la classification des surfaces, dans un certain sens ? Eh bien, vous commencez par la toute première question : comment caractériser la sphère topologiquement ? Et la première condition est que vous voulez que la variété sphère n'ait aucune homologie, aucune première homologie. Et la question est : est-ce suffisant pour en faire une sphère ? Dans le cas d'une surface, c'est vrai. Et dans le cas de trois dimensions, Poincaré pensait que c'était vrai. Et il a fait une erreur. Et il est très salutaire de se rappeler que même les meilleurs mathématiciens, les plus célèbres, font des erreurs. Habituellement, ils découvrent l'erreur eux-mêmes. Mais néanmoins, on apprend beaucoup de ces erreurs. Et Poincaré a fait cette erreur, il a découvert que quelque chose n'allait pas, et son contre-exemple a conduit à une nouvelle découverte : le fait qu'on puisse associer à une variété ce qu'on appelle le groupe fondamental, le groupe formé de chemins fermés où l'on compose des chemins dans le groupe par composition et où deux chemins sont équivalents par déformation. On obtient ainsi un groupe, un groupe abstrait, en général non abélien. C'est donc un invariant non linéaire, mais un invariant non linéaire, non abélien. Et le contre-exemple à l'erreur de Poincaré est donné par ce bel exemple : le fait que la sphère tridimensionnelle puisse subir l'action du célèbre groupe icosaédrique binaire issu des symétries de l'icosaèdre. C'est un groupe qui, lorsqu'on le rend abélien, devient trivial. Ainsi, le premier groupe d'homologie est nul, mais la variété n'est pas topologiquement une sphère car elle possède ce groupe fondamental comme invariant.

Et donc, Poincaré a découvert la notion de groupe fondamental en même temps qu'il réalisait son erreur. Et puis bien sûr, la conjecture de Poincaré raffinée était, si l'on énonce maintenant la bonne proposition, que si la variété n'a pas seulement une homologie nulle, mais que son premier groupe d'homotopie est trivial, et si elle est simplement connexe, alors est-elle topologiquement la sphère tridimensionnelle ? C'est donc le problème numéro un de l'Institut Clay sur ma liste. Il date de 1904. Et nous l'appelons simplement P, à ne pas confondre avec P et NP de la conférence précédente.

Encore une fois, vous pouvez poser cette question dans différentes classes de fonctions : les fonctions topologiques, c'est-à-dire fonctions continues, linéaires par morceaux, ou différentiables. Et il est connu, bien que cela soit beaucoup plus difficile à prouver en dimension trois, que tout cela revient au même. Nous avons donc un problème en trois versions différentes si vous voulez, mais le problème reste irrésolu. Il a été formulé par Poincaré, de nombreux mathématiciens célèbres ont travaillé dessus pendant ce siècle, et il n'est toujours pas résolu. Il y a eu beaucoup de fausses preuves. Beaucoup de gens ont essayé et ont commis des erreurs. Parfois, ils ont découvert l'erreur eux-mêmes. Parfois, leurs amis ont découvert les erreurs. Henry Whitehead était un topologue célèbre qui a également commis une erreur très subtile, qu'il a découverte et qui a aussi conduit à certains progrès. C'est donc le premier problème. Maintenant, quand les mathématiciens ont des problèmes difficiles, que font-ils ? Eh bien, une chose à faire est, bien sûr, d'offrir une grosse récompense, comme nous le faisons aujourd'hui.

Un autre procédé célèbre pour les mathématiciens consiste à généraliser le problème. Si vous ne pouvez pas le résoudre, généralisez-le. Mais cette généralisation n'est bien sûr pas totalement inutile. Vous espérez qu'en généralisant le problème, vous apprendrez quelque chose qui finira par vous aider à résoudre le problème original. Et très souvent, ce processus fonctionne. Nous sommes

maintenant passés à la géométrie moderne. Il existe les travaux très célèbres de Bill Thurston, appelés le programme de Thurston. Un programme est quelque chose qui n'est pas encore totalement achevé, mais dont une grande partie l'est. Beaucoup de travail a été accompli. C'est une vaste industrie. Et le programme de Thurston tente, en gros, d'aller au-delà du cas de la 3-sphère. Nous ne pouvons pas résoudre la conjecture de Poincaré pour la 3-sphère. La 3-sphère était censée être l'analogue de la 2-sphère. Mais dans le cas des surfaces, il existait cette belle classification des surfaces selon le genre. Le genre 0 est la sphère, le genre 2 est le tore, et les genres supérieurs ou égaux à 2 sont les genres supérieurs. Et il est bien connu en géométrie bidimensionnelle que ces trois types sont classés selon leur type de courbure : courbure positive, courbure nulle, courbure négative. Et il existe une très belle théorie de la classification qui est importante à bien des égards. Le programme de Thurston est donc une tentative de réaliser ce programme beaucoup plus large, non seulement en examinant le cas de la sphère, mais en essayant de les classer toutes par leur géométrie. Bien sûr, la réponse est beaucoup plus compliquée et je ne peux pas la décrire en détail, mais très grossièrement, le programme de Thurston espère montrer que toute variété tridimensionnelle peut être construite par des constructions de collage à partir de variétés de courbure constante. Et les courbures constantes seront de types différents. Il y a maintenant plus de types que dans le cas de la dimension deux, mais ils incluront en particulier les cas extrêmes des sphériques à courbure positive et des hyperboliques à courbure négative.

Le cas sphérique, si le programme de Thurston était résolu en général, inclurait la conjecture de Poincaré comme un cas très, très particulier. Mais il n'a pas encore été résolu. Un cas particulier a été résolu, ainsi que d'autres types de géométries, mais la sphère reste non résolue. Mais on peut considérer la conjecture de Poincaré comme étant réellement liée à un programme bien plus vaste, généralisé par Thurston. La théorie des variétés tridimensionnelles est également très étroitement liée à la théorie topologique des nœuds. Les nœuds dans l'espace tridimensionnel sont des choses très complexes, comme nous l'avons vu dans certains exposés précédents, et il est bien connu que l'on peut convertir des problèmes de théorie des nœuds en problèmes de variétés fermées, et ils présentent essentiellement la même difficulté. Et c'est particulièrement intéressant dans le cas des variétés hyperboliques. Et je mentionnerai aussi, je pense, une avancée très célèbre ces dernières années, par Tim Gowers : l'invention ou la découverte par Vaughan Jones, puis par Edward Witten, de certains nouveaux invariants pouvant être utilisés pour caractériser les nœuds. Ces idées issues de la physique ont eu une influence profonde, et tout cela fait partie de la géométrie tridimensionnelle, d'une manière dont le rapport avec le programme de Thurston reste encore flou. Il y a donc beaucoup d'activité en géométrie tridimensionnelle en ce moment. Maintenant, que peut-on prévoir pour l'avenir ? Si je prends tel ou tel problème, à quoi pourrait-on s'attendre ? Eh bien, laissez-moi vous le dire... Ce sont des commentaires personnels. À quoi peut-on s'attendre ? Eh bien, les progrès futurs, que pourraient-ils être ? Eh bien, ils pourraient venir de la physique. Car la physique a mené à des découvertes intéressantes dans le cadre général des nœuds, mais il s'agit du type de physique liée à la théorie des particules et à la structure de la matière, alors que la théorie gravitationnelle, la relativité générale, s'intéresse davantage aux structures métriques. On peut donc soupçonner que la physique de la gravitation mènerait d'une certaine manière à des idées sur le programme de Thurston en trois dimensions, et finalement aussi à la conjecture de Poincaré. Euh, ceci, c'est le genre d'indice, de piste, donné par le professeur qui ne peut pas résoudre le problème à l'étudiant qui essaie de le résoudre. C'est mon travail de vous donner des pistes. Maintenant, hum, en dehors de la généralisation vers le programme de Thurston, je veux vous parler d'autres choses qui se sont

produites en lien avec la conjecture de Poincaré au cours du dernier siècle. Les géomètres ne sont pas restés inactifs.

Ainsi, n'ayant pas résolu le problème en dimension trois, ils ont aussi décidé de se pencher sur des problèmes en dimension supérieure. Dimension supérieure à trois. Et en particulier, si l'on monte aux dimensions au moins égales à cinq, il s'avère que le problème devient plus simple. Et la raison en est que dans une variété de haute dimension, il y a plus d'espace. Euh, eh bien, ce n'est pas censé être une remarque humoristique. La difficulté avec les variétés tient en partie au groupe fondamental, qui se situe en dimension un. Et, en partie, les variétés possèdent ce qu'on appelle la dualité de Poincaré, qui relie la géométrie en basses dimensions à la géométrie en hautes dimensions. Si vous avez une variété de dimension cinq ou plus, alors l'unité est loin du milieu, et par conséquent, le groupe fondamental n'interagit pas beaucoup avec la dualité de Poincaré. Mais dans les dimensions trois et quatre, la situation est très différente. Quoi qu'il en soit, en dimension cinq ou plus, on a découvert que la théorie est beaucoup plus simple, et c'est un très beau résultat dont je ne détaillerai pas les tenants et aboutissants. Bien que certaines choses découvertes soient différentes. Par exemple, la théorie de la classification des variétés différentiables s'est révélée assez différente de la classification topologique, avec de beaux exemples, comme les sphères exotiques de Milnor : des objets topologiquement sphériques mais différentiablement différents. Et ils sont en fait liés au célèbre exemple icosaédrique de Poincaré, que j'ai écrit là, mais je n'ai pas le temps de vous donner les détails. Ceux d'entre vous qui sont très rapides peuvent lire ceci. En dimension quatre, il s'est avéré que la situation est encore bien différente.

C'est différent de la dimension cinq, c'est différent de la dimension trois. Mais en dimension quatre, la classification topologique des variétés de dimension quatre a finalement été prouvée par Michael Freedman. Des variétés avec un groupe fondamental trivial, mais toute la partie intéressante se situe alors en dimension deux. C'est une grande réussite, mais presque simultanément, alors que cela venait d'être fait et que l'on pensait la théorie quadridimensionnelle presque terminée, Simon Donaldson a découvert que la théorie différentiable en dimension quatre était totalement différente. Il existe des résultats tout à fait différents. Il y a des variétés qui n'ont pas de structures différentiables, et quand elles en ont, elles sont loin d'être uniques. Et il existe maintenant toute une nouvelle théorie pour classer les différentes structures différentiables en dimension quatre. Cette théorie quadridimensionnelle a été un développement très inattendu, je dirais le plus inattendu de ces derniers temps, et là encore, l'influence venait de la physique. Les invariants proviennent de l'utilisation des équations de Yang-Mills, puis des équations de Seiberg-Witten, dont je parlerai peut-être plus tard. Ce fut un résultat très spectaculaire. Il s'applique à des résultats très précis et forts sur la structure des surfaces algébriques, mais la conjecture de Poincaré différentiable en dimension quatre est toujours ouverte. Et à ce stade, aucune conjecture de classification n'est en vue pour la dimension quatre. Personne ne peut formuler une conjecture sensée pour laquelle offrir un prix. Peut-être qu'en l'an 2100, les étudiants du Clay, si l'institut est toujours actif, offriront cela comme prix. Eh bien, c'était probablement un aperçu du problème, de ce qui a été résolu, de ce qui ne l'est pas, et l'importance de notre problème, voyez-vous, ne réside pas seulement dans le problème lui-même, mais dans l'influence qu'il exerce sur le développement des mathématiques. Et le développement des mathématiques dans cette direction a été influencé par la conjecture de Poincaré dans les directions que j'ai indiquées. Une théorie très riche s'est développée. Maintenant, je veux passer au deuxième problème.

Le deuxième problème concerne ce qu'on appelle la conjecture de Hodge. La conjecture de Hodge est une conjecture qui se situe à la frontière entre la géométrie et l'algèbre, entre la géométrie algébrique et la topologie. Maintenant, si l'on revient à la dimension deux, la théorie des courbes algébriques, la théorie des surfaces de Riemann, il existe une relation très étroite entre la géométrie et l'algèbre, une très belle théorie. Mais au-delà de la dimension deux, dimension deux réelle, si vous passez à la dimension quatre ou plus généralement, à une dimension paire, cela correspond à l'étude de variétés algébriques sur les nombres complexes dont la dimension algébrique est m, et dont la dimension réelle est donc $2m$. $m = 1$, courbes algébriques, $m = 2$, surfaces algébriques, et ainsi de suite. Les géomètres algébriques étudient de tels objets. Et c'était un défi majeur dans les années 1930 d'étendre les travaux classiques sur les courbes algébriques à des dimensions supérieures de manière pertinente. Et l'une des réalisations majeures est due à Hodge. Et ce que Hodge a fait, ce n'est pas de suivre les techniques standard de la géométrie algébrique, mais d'en sortir et d'utiliser la géométrie riemannienne, disons en revenant, si vous voulez, aux idées de Riemann dans la théorie des surfaces de Riemann. Et il a appliqué l'étude de la métrique riemannienne dans une variété, qui est la variété sous-jacente d'une variété algébrique complexe, il y a introduit les opérateurs différentiels, disons la dérivée extérieure et l'opérateur adjoint de Laplace, qui sont tous des opérateurs différentiels linéaires sur un arrière-plan courbe, motivés par les équations de Maxwell et les équations de Laplace. Si vous voulez, ce sont des équations fondamentales de la physique mathématique. Placé dans le contexte géométrique, il les a appliquées avec une intuition issue des équations de Maxwell, ce qui a conduit à cette belle théorie affirmant que les formes harmoniques, les solutions de l'équation de Laplace, l'analogue des fonctions harmoniques, vous donnent un espace qui est identifié à l'homologie ou à la cohomologie de la variété. Un très beau lien entre la topologie et l'analyse sur les variétés. Et un résultat plus précis : si vous avez une variété compacte comme une variété algébrique, munie d'un certain type de métrique appelée métrique kählérienne, vous pouvez affiner cette décomposition de sorte que les formes harmoniques puissent être décomposées en ce qu'on appelle les types PQ, où P et Q font référence au nombre de variables complexes ou de variables complexes conjuguées impliquées dans le choix de la forme différentielle. Cette décomposition PQ est une nouveauté introduite par Hodge. Maintenant, si vous prenez la dimension deux, alors P plus Q a des dimensions dans l'homologie de dimension un, vous ne pouvez avoir que les types 1 0 et 0 1. Les types 1 0 sont des formes différentielles holomorphes, les intégrales classiques d'Abel et de Jacobi, et les types 0 1 sont leurs conjugués, rien de nouveau.

Lorsque vous passez aux surfaces algébriques en dimension quatre (dimensions réelles), si vous regardez les formes de degré deux, vous avez les formes 2 0 qui sont holomorphes, leurs conjugués complexes qui sont 0 2, mais vous avez quelque chose de nouveau. Vous avez les formes 1 1 qui sont mixtes. Et ce sont là les nouveautés introduites par Hodge. L'espace des formes harmoniques 1 1 était le nouvel objet. Et en même temps, ces choses sont liées à la géométrie algébrique car si vous avez une courbe algébrique sur la surface, une courbe algébrique étant un sous-espace de dimension deux d'une variété de dimension quatre, vous pouvez essayer d'intégrer sur elle les formes différentielles de dimension deux. Et vous voyez que les seules formes harmoniques qui peuvent éventuellement avoir des périodes non nulles sur une telle courbe sont celles de type 1 1, car les autres ont trop de variables complexes ou trop de variables complexes conjuguées. Ce sont les seules qui peuvent capter l'aire de la courbe. Ainsi, les courbes algébriques n'ont des périodes non nulles que dans ce type 1 1. Cela a conduit Hodge à formuler sa conjecture, exposée formellement lors du

Congrès des mathématiciens de 1950, selon laquelle cela devrait être vrai de manière générale. Mais si vous voulez décrire lesquelles, voici la question fondamentale. Vous avez une variété qui sous-tend une variété algébrique. À l'intérieur, vous avez des cycles topologiques ordinaires. Mais les cycles spéciaux sont ceux qui proviennent de sous-variétés algébriques. Ceux-là sont particulièrement intéressants. La question est : quels sont-ils ? Comment trouver parmi tous les cycles possibles ceux qui sont réellement équivalents à des cycles algébriques ? Et la conjecture de Hodge était que ce sont précisément ceux qui possèdent les propriétés adéquates concernant leurs périodes intégrales des formes harmoniques.

Ainsi, si vous avez une classe de cohomologie de dimension $2p$, elle pourrait représenter une sous-variété algébrique de codimension $2p$. Regardez les intégrales, et si les seules formes harmoniques ayant des périodes non nulles sont celles de type mixte PP, alors le critère de Hodge est satisfait et la conjecture stipule que ce cycle devrait être représenté soit par une sous-variété algébrique elle-même, soit par une combinaison linéaire à coefficients rationnels de sous-variétés algébriques. C'est donc la conjecture de Hodge. Il s'agit du problème numéro deux. Ce que cette conjecture de Hodge permet de faire, si vous la résolvez, c'est essentiellement de fournir une construction ou un théorème d'existence prouvant l'existence de sous-variétés algébriques au sein d'une variété algébrique par des méthodes transcendantes. C'est extrêmement puissant car exhiber des objets algébriques par des méthodes topologiques est un problème très difficile. C'est très analogue à ce que John Tate faisait pour exhiber des points rationnels sur des courbes. Il existe une analogie étroite. C'est donc le deuxième problème.

Permettez-moi maintenant de faire quelques commentaires sur ce qui est connu et ce qui ne l'est pas. Voici ces commentaires. Tout d'abord, dans un sens, c'est facile : si votre courbe ou sous-variété est algébrique, alors elle possède les propriétés requises concernant les périodes. La difficulté réside dans le sens inverse. Si elle possède la propriété requise concernant les périodes, est-elle algébrique ? Votre objectif est de démontrer le théorème d'existence des sous-variétés algébriques. Ensuite, bien sûr, vous pouvez examiner des cas particuliers en fonction de la dimension. Et ce que Hodge a prouvé en particulier, c'est que le théorème est vrai pour $P = 1$. En d'autres termes, pour les formes de degré 2, qui correspondent aux diviseurs, des objets de dimension algébrique inférieure d'une unité à la dimension maximale. Donc, en particulier, pour les courbes sur des surfaces, cela a été prouvé par Hodge.

C'est connu, mais la conjecture générale concerne tous les P, des objets de dimension arbitraire dans des variétés arbitraires. C'est faux pour la cohomologie entière. C'est vrai pour la cohomologie entière en dimension $P = 1$, mais en général, ce n'est pas vrai. Vous devez autoriser les coefficients rationnels. Et dans ce cas particulier important pour les applications, il s'agit du cas où la variété M est elle-même le produit de deux copies d'une autre variété, également algébrique, disons X. Car dans ce cas, les sous-variétés algébriques sur le produit de l'espace avec lui-même étaient classiquement appelées des correspondances. Le graphe d'une application est un cas particulier où l'application est injective. Une correspondance est une relation plusieurs-à-un. Et donc, les sous-variétés algébriques de produits donnent lieu à des correspondances, des objets intéressants en géométrie algébrique. Si vous regardez la formule de Künneth pour la cohomologie, cela vous donne un moyen très intéressant de caractériser les correspondances. La conjecture de Hodge vous donnerait cela. Maintenant, les méthodes. Quelles méthodes peut-on utiliser pour essayer de prouver

la théorie de Hodge ? Eh bien, les travaux de Hodge datent essentiellement des années 1930, puis, dans l'après-guerre, dans les années 1950, de nombreuses nouvelles méthodes ont été introduites en géométrie algébrique. Il y a eu, bien sûr, le célèbre développement de la cohomologie des faisceaux par Leray, Cartan et Serre. Je suis ravi de voir ici le professeur Cartan lui-même. Et ce fut l'une des contributions majeures, voire l'une des révolutions en géométrie algébrique : le développement systématique d'une machinerie puissante appliquant des méthodes transcendantes à des problèmes globaux en topologie et en analyse complexe. Dans la contrepartie purement algébrique, il y eut le travail de Grothendieck qui a donné des définitions algébriques de la cohomologie, cherchant à nouveau à lier les méthodes algébriques et topologiques, ce qui a mené à la preuve des conjectures de Weil par Deligne, comme l'a mentionné John Tate. Tout cela fait partie de la construction générale d'une machinerie qui a eu lieu à cette période, fournissant de nouveaux outils puissants de type linéaire sur un arrière-plan courbe, si vous voulez , qui incorpore la théorie, elle en fait partie, elle est absorbée, mais cela va bien au-delà de la théorie de Hodge.

Mais néanmoins, même avec toutes ces nouvelles techniques, malheureusement, bien qu'elles aient résolu de nombreux problèmes classiques et fourni de puissantes techniques, les conjectures de Hodge n'ont pas été résolues par ces méthodes. Je me souviens, quand j'étais étudiant de Hodge à l'époque, que lorsque ces nouvelles méthodes sont apparues, il était très enthousiaste. Il me disait : "Nous devrions essayer de résoudre ma vieille conjecture...", et il a essayé, d'autres personnes ont essayé, et cela n'a pas fonctionné. Donc, fondamentalement, la conjecture de Hodge consiste à combler le fossé entre les méthodes algébriques et transcendantes en géométrie algébrique. Et il reste un grand fossé, et nous ne connaissons pas la réponse. Si vous prouvez la conjecture de Hodge, le fossé sera comblé. Mais qui sait ? Peut-être que la conjecture de Hodge est fausse. Je dois souligner que le Clay Institute est très généreux. Il ne vous donne pas seulement le prix si vous prouvez que le résultat est vrai, il vous le donnera si vous prouvez qu'il est faux. Mais il ne vous donnera aucun prix si vous prouvez les deux. Dans l'optique de combler le fossé entre les méthodes algébriques et transcendantes, les autres conjectures, dont certaines ont été évoquées par John Tate, comme les conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer, ou les travaux d'Andrew Wiles lui-même, s'inscrivent selon moi dans cette histoire générale reliant méthodes transcendantes et algébriques. Et en ce qui concerne l'avenir, je ne pense pas vouloir faire de prédictions. Tout ce que je voudrais dire, c'est que nos connaissances sont insuffisantes. Il se pourrait bien qu'il y ait une histoire bien plus complexe. La caractérisation des variétés algébriques pourrait s'avérer beaucoup plus difficile que nous ne le pensons. Il pourrait y avoir tout un champ nouveau à découvrir, qui offrira beaucoup de travail aux futures recherches dans les années à venir. Donc, si vous pensez prouver un résultat négatif, vous ne devriez pas le voir comme négatif. Vous devriez plutôt le voir comme une ouverture vers de nouvelles possibilités.

Eh bien, je vais maintenant passer du problème deux au problème trois. Nous sommes à mi-chemin. Les deux premiers problèmes étaient des problèmes de mathématiques pures. Ce sont des problèmes de géométrie, d'algèbre, d'analyse et d'équations différentielles en arrière-plan également. Les problèmes trois et quatre concernent la physique. Le problème trois concerne la théorie de Yang-Mills. Laissez-moi essayer d'expliquer ce qu'est ce problème et où nous en sommes. En 1900, l'un des problèmes de Hilbert consistait essentiellement à établir les fondements appropriés de la physique mathématique, les bases mathématiques de la physique. Ce problème est bien sûr toujours d'actualité, s'il a jamais été un problème bien défini. Bien entendu, en 1900, on ne connaissait ni la

relativité restreinte, ni la mécanique quantique, ni la relativité générale, ni tout ce qui s'est produit depuis. Il était donc certainement prématuré, en 1900, de penser sérieusement à établir des fondements adéquats pour la physique. La question est : l'an 2000 est-il un meilleur moment ? Eh bien, nous ne le savons pas. Mais nous pouvons essayer. Nous avons beaucoup appris. Et si c'est le cas, à quel niveau ? Bien sûr, nous n'avons pas besoin d'essayer de fonder l'intégralité de la physique. Nous pourrions prendre la partie que nous comprenons bien et essayer de trouver des fondements pour celle-ci. C'est donc la question que nous voulons poser. Tout d'abord, laissez-moi vous faire un rapide résumé de 5 minutes sur cette physique.

Hum... 5 minutes, c'est une chance, car c'est à peu près le temps nécessaire pour couvrir ce que je comprends. Résumé de la physique. Tout d'abord, revenons à la physique classique, aux équations de Maxwell décrivant le champ électromagnétique, la grande théorie du XIXe siècle, qui sous-tend évidemment toute la physique ultérieure de bien des manières. Ensuite, après les équations classiques de Maxwell, nous passons au siècle actuel avec la découverte de la mécanique quantique. La manière dont les particules sont traitées en mécanique quantique est une approche très différente de la théorie classique, bien sûr. De la mécanique quantique, nous passons à la théorie quantique des champs, où l'on traite non seulement les particules par des méthodes quantiques, mais aussi les champs eux-mêmes. Et dans la théorie quantique des champs, les notions de particules et de forces sont unifiées d'une manière très mystérieuse. La théorie quantique des champs est donc la théorie qui combine les champs et la mécanique quantique. L'électrodynamique quantique est la première tentative satisfaisante d'unification, intégrant le champ électromagnétique et son interaction avec les électrons. Et l'électrodynamique quantique, apparue dans les années 1950, est une théorie remarquable. C'est une théorie très précise, qui offre une confirmation magnifique entre l'expérience et la théorie avec une très haute précision. Cette théorie est donnée par des développements perturbatifs, avec des termes d'ordre de plus en plus élevé, et les règles pour y parvenir sont très complexes. J'appelle cela des règles car, en tant que mathématicien, je ne peux pas appeler cela une théorie, puisqu'il n'existe pas de théorie bien définie. Mais les physiciens utilisent ces règles, ils ne se préoccupent pas de l'absence de théorie, et ils obtiennent de très bons résultats. Il est très difficile de contester quelque chose qui vous permet de calculer des résultats concordant avec l'expérience jusqu'à dix chiffres de précision. Mais il n'existe aucune théorie mathématique rigoureuse, ce qui est embarrassant pour les mathématiciens. Au-delà de l'électrodynamique quantique, nous arrivons aux années 1950, avec l'introduction des équations de Yang-Mills.

Les équations de Yang-Mills sont, pour le dire grossièrement, une version matricielle des équations de Maxwell. Il suffit de regarder les équations de Maxwell sous le bon angle et de les généraliser aux matrices. On obtient alors un nouvel ensemble d'équations appelées équations de Yang-Mills, et on traite toute la théorie précédente avec cette complexité supplémentaire. On veut y appliquer la théorie quantique des champs, car ces équations sont censées décrire non seulement le champ électromagnétique, mais aussi les forces à l'échelle microscopique, comme les forces faibles et fortes. Ainsi, toutes les forces en jeu devraient être encapsulées dans ce genre d'équations de Maxwell élargies. La formule fondamentale, qui lie le potentiel au champ, est celle qui dit que f est la dérivée de a. C'est la formule dans le cas abélien, mais dans le cas matriciel, on a un commutateur, un crochet, qui est non linéaire. C'est la complication de Yang-Mills qui généralise les équations de Maxwell. Les équations de Yang-Mills sont donc des équations différentielles non linéaires, alors que celles de Maxwell sont linéaires. Et ensuite, bien sûr, il faut construire tout le récit de la théorie quantique

des champs par-dessus cela. Ces théories de jauge, appelées théories de Yang-Mills, sont aujourd'hui acceptées par tous les physiciens comme la base pour décrire la structure de la matière, toutes les particules et toutes les forces, à l'exception de la gravitation. Et la QCD, les physiciens sont très doués pour utiliser des titres courts et percutants. La QED était l'électrodynamique quantique, si vous ne le saviez pas, et la QCD est la chromodynamique quantique, qui sert à mieux décrire le comportement des quarks. Eh bien, voilà, c'était un rapide résumé de la physique pour vous. Maintenant, le problème qui nous intéresse est de savoir comment développer une théorie quantique des champs basée sur les équations de Yang-Mills. C'est une équation non linéaire, et beaucoup plus difficile que l'électrodynamique quantique. Mais, bien sûr, même l'électrodynamique quantique n'était pas résolue, nous n'avions pas la solution, alors vous pourriez penser que c'est pire. Si nous n'avons pas pu résoudre le cas facile, comment pouvons-nous résoudre le cas le plus difficile ? Eh bien, il y a des raisons de croire qu'il s'agit d'une meilleure théorie.

Il y a certaines caractéristiques intéressantes de la théorie de Yang-Mills qui ne sont pas présentes dans le cas plus simple. Il y a ce qu'on appelle la liberté asymptotique, qui vous dit ce qui se passe dans les régions à très, très petite échelle. Il y a aussi ce qu'on appelle la renormalisabilité, des propriétés fondamentales liées au changement d'échelle. Et ce sont des caractéristiques de la théorie de Yang-Mills qui ne sont pas présentes dans les théories linéaires. En un sens, la théorie linéaire est trop compliquée, donc cela donne un peu d'espoir. Cette théorie se comportera mieux.

Maintenant, avant de continuer à décrire le problème, permettez-moi de faire une petite digression. L'une des choses remarquables, et c'est un domaine que je connais mieux que la physique, au cours des 25 dernières années, a été l'impact sur les mathématiques de ces nouvelles idées en physique, les équations de Yang-Mills, les théories de jauge, et ainsi de suite. Cet impact de la physique sur les mathématiques a vraiment été l'un des développements les plus remarquables de ces 25 dernières années. Il a eu un éventail énorme d'applications, par exemple en géométrie, en topologie, en algèbre, dans tout un ensemble de domaines. Je n'en ai mentionné que quelques-uns. Les invariants des nœuds, dont j'ai parlé avec Vaughan Jones, sont issus de cette histoire. Tout comme la théorie quadridimensionnelle de Donaldson, qui découle également de cette histoire. Il en va de même pour ce qu'on appelle les groupes quantiques qui ont évolué à partir de là, très utilisés par les théoriciens des groupes, et je veux dire la vraie théorie des groupes, les gens qui travaillent en caractéristique p, et des choses comme ça. Les groupes finis.

La cosmologie quantique est une notion nouvelle qui a émergé, comme le suggère le terme, d'une sorte d'hybride entre la théorie cosmologique et les idées quantiques, et elle trouve des applications très importantes dans des questions classiques, comme le comptage de courbes en géométrie algébrique. Il s'agit d'un vaste éventail de nouvelles idées qui apportent des conséquences fantastiques aux mathématiques. En tant que mathématicien, je suis donc très intéressé par ces idées issues de la physique. L'un des inconvénients de l'utilisation des idées physiques est que la physique n'est pas rigoureusement démontrée. Toutes les idées que l'on obtient nous parviennent de manière incomplète. Par conséquent, le mathématicien doit travailler dur pour trouver une preuve des résultats motivés par la physique, et c'est un domaine très vaste. L'une des plus grandes activités de ces 20 dernières années consiste à tenter d'établir des preuves mathématiques de ce qui découle de la physique. Bien sûr, si l'on pouvait prouver que la physique est rigoureuse, cela nous épargnerait beaucoup de travail, car toutes ces mathématiques seraient rigoureuses elles aussi. Dans un cer-

tain sens, c'est une partie de la motivation ici. Le troisième problème de la liste de l'Institut Clay consiste essentiellement à établir la théorie de Yang-Mills comme une théorie quantique des champs rigoureuse. Je n'ai pas le temps d'entrer dans les détails techniques de ce que cela signifie, mais l'important est de montrer ce que l'on appelle l'existence d'une lacune de masse positive, à savoir que la première valeur propre de l'hamiltonien de cette théorie doit être strictement positive. C'est censé être vrai, les physiciens y croient. La question est d'établir une base rigoureuse pour la théorie, avec cela comme conséquence. Bien entendu, cela fournirait une base mathématique à la physique réelle du monde. Cela justifierait également, en passant, toutes ces magnifiques applications aux mathématiques. Ainsi, physiciens et mathématiciens souhaitent savoir si cela est réalisable. C'est là tout le problème. Il s'agit bien sûr d'un problème très difficile car il implique une analyse en dimension infinie, étant donné que l'on traite de la théorie quantique des champs.

Cela nécessite de l'analyse, et certainement beaucoup de topologie et d'algèbre, car ces espaces sont très complexes. Je pense qu'il s'agit du plus difficile des problèmes avancés par l'Institut Clay. Dans un certain sens, c'est le plus récent. Les équations de Yang-Mills remontent aux années 1950, mais ces tentatives sont encore plus récentes. Je devrais dire un mot ou deux sur les tentatives rigoureuses concernant la théorie quantique des champs en général. Cela remonte aux travaux d'Arthur Wightman, qui a posé une approche axiomatique. Qu'est-ce qu'une théorie quantique des champs sur le plan mathématique ? Qu'est-ce que cela devrait signifier ? Il a établi une liste d'axiomes, qui sont plausibles par rapport à ce que vous voudriez dire. Et la question est alors : peut-on réellement construire des objets mathématiques qui satisfont ces axiomes et qui seront les modèles physiques souhaités ? Et ce programme a ensuite été mené dans une large mesure par, Arthur Jaffe et son collègue Glimm dans les dimensions deux et trois. D'abord en dimension deux, puis avec un effort considérable en dimension trois, mais cela s'est arrêté avant la dimension quatre. Et comme nous le savons par la géométrie dans d'autres contextes, ces changements de dimension ne sont en rien triviaux. On n'ajoute pas simplement un et on continue. D'énormes phénomènes nouveaux surviennent. Les choses sont tout à fait différentes. Les équations en dimension quatre, par exemple, sont conformes, mais ce n'est pas le cas en dimensions trois et deux. Ainsi, le passage de la dimension trois à quatre est profond, et par conséquent, nous ne savons pas du tout comment y parvenir. Donc, c'est vraiment le grand saut, la dimension quatre est une dimension très spéciale, et le travail dont je vous parlais en géométrie pure, qui émerge de la physique, est une indication car les choses qui y ont été découvertes sont spécifiques à la dimension quatre. Eh bien, quel est l'avenir de ce problème en physique ? Que, que pourrait-il arriver ? Eh bien, ceci est maintenant ma supposition personnelle, ou si vous voulez, des pistes, des suggestions : vous pouvez tenter une approche analytique directe. Si vous êtes un jeune homme courageux et que vous avez, une vision à long terme, vous pouvez simplement sortir votre marteau et votre burin et vous y attaquer. Eh bien, d'abord, vous lisez Jaffe, et ensuite, vous vous lancez dans la dimension quatre. Ou vous pourriez penser que vous voulez quelque chose de différent. Vous pourriez trouver qu'il s'agit essentiellement d'obtenir une meilleure compréhension de la structure formelle des théories quantiques des champs de type Yang-Mills. Ces théories de Yang-Mills possèdent une structure formelle mathématique très, très élaborée, qui incorpore des dualités très mystérieuses de diverses sortes. Cela peut aussi causer des choses appelées supersymétrie et nombre d'applications aux mathématiques intègrent tout cela. Donc, il existe ici une structure très élaborée et il est tout à fait possible que si nous obtenons une meilleure compréhension de cette structure, cela pourrait nous donner un meilleur moyen d'essayer d'en poser les fondements. Par exemple, un problème qui peut

être décrit de deux manières différentes par la dualité, les deux images duales pourraient paraître très différentes. L'une d'elles pourrait être traitable et l'autre pourrait ne pas l'être. Il n'est donc certainement pas déraisonnable de penser que cela pourrait vous donner un point de départ si vous compreniez mieux ces opérateurs formels. Les opérateurs formels ici sont très sophistiqués. Vous pourriez bien sûr vous asseoir et attendre. Attendre les développements de la théorie des cordes. La théorie des cordes et les dernières avancées qui en découlent, appelées théorie M ; chaque année, une nouvelle théorie est développée à un rythme effréné. La communauté de la physique théorique est ici extrêmement active. De très belles choses se produisent chaque semaine, de nouveaux résultats apparaissent. Nombre d'entre eux auront des résonances mathématiques, et il se pourrait qu'en attendant quelques années, une vision si radicalement nouvelle émerge de la théorie des cordes que nous aurons une meilleure idée de la façon d'aborder le problème.

C'est donc une attente qui n'est pas déraisonnable. Vous voyez, essayer de relier les fondements à la physique, c'est comme un architecte essayant de poser les bases d'un bâtiment qui s'élève rapidement. Je veux dire, que devriez-vous faire en premier ? Ce n'est pas très clair. Voulez-vous voir le plan ou voulez-vous poser les fondations ? Peut-être voulons-nous le plan d'abord. Ensuite, bien sûr, vous pourriez aussi vous dire : "Eh bien, l'électrodynamique quantique était très complexe car nous n'avions pas intégré des éléments comme les protons et les neutrons. Nous ne nous préoccupions que des électrons." Peut-être que même cela ne suffit pas. Peut-être devrions-nous intégrer la gravité. Alors nous aurions toutes les forces sous contrôle. Peut-être qu'à ce stade, la théorie fondamentale serait encore plus simple. Et les chercheurs en théorie des cordes visent cela, c'est la théorie ultime. Peut-être que la théorie ultime sera plus simple que les théories de transition, mais qui sait ? Et le grand défi pour les mathématiciens et les physiciens du XXIe siècle est de vraiment progresser dans ce programme par toutes les méthodes possibles. Bonne chance à vous. Je n'ai pas encore fini. Contrairement à John Tate, j'ai quatre problèmes. Le quatrième problème est également en physique mathématique, mais d'un genre beaucoup plus traditionnel. Il s'agit de ce qu'on appelle les équations de Navier-Stokes. Les équations de Navier-Stokes.

Les équations de Navier-Stokes sont les équations aux dérivées partielles qui décrivent l'écoulement d'un fluide incompressible mais visqueux. L'écoulement visqueux incompressible, et les équations qui le décrivent sont très bien établies. Elles remontent à 100 ans, peut-être à Stokes au XIXe siècle. Elles sont largement utilisées en pratique. Que vous preniez l'avion ou le bateau, vous remerciez le ciel que nous ayons les équations de Navier-Stokes. Elles sont appliquées et possèdent un vaste domaine de validité. Bien sûr, chaque modèle physique est une approximation. Mais c'est une assez bonne approximation pour la plupart des usages pratiques. Et cela revêt une très grande importance pratique, même si la théorie mathématique de l'équation de Navier-Stokes est incomplète. Cela n'empêche pas les gens de l'utiliser et d'obtenir des résultats pratiques. Il y a donc énormément de travail pratique en cours pour obtenir des résultats numériques à partir des équations de Navier-Stokes. Maintenant, quelles sont ces équations ? Tout d'abord, les équations décrivent la vitesse, une fonction vectorielle $u_i(x,t)$. X est une coordonnée dans l'espace. L'espace ici est tridimensionnel et le temps est un nombre positif évoluant à partir d'un temps zéro donné. Ce sont des fonctions $u_x(t)$. Il y a aussi la pression, fonction scalaire $p(x,t)$, et elles sont soumises aux deux équations différentielles qui constituent les équations de Navier-Stokes. La première équation implique essentiellement une dérivée partielle de u, un terme non linéaire avec le produit de u et sa dérivée, ainsi qu'un terme de viscosité avec un coefficient nul devant le laplacien de u_i. Il y a

le gradient de pression, puis un champ externe donné, inconnu, qui peut être nul, ou par exemple, être le champ gravitationnel si vous étudiez l'eau sur Terre.

Ensuite, il y a la divergence de u égale à zéro, ce qui traduit l'incompressibilité de l'écoulement. Ces deux équations sont facilement déduites des principes fondamentaux de la mécanique newtonienne pour décrire un écoulement fluide incompressible mais visqueux, où μ est la viscosité, un nombre positif. Ensuite, vous ajoutez bien sûr des conditions aux limites, comme u qui s'annule sur le bord, que vous pouvez choisir comme une frontière finie, l'espace tout entier, ou un problème périodique sur un tore. Toutes ces variantes concernent les conditions aux limites. Ensuite, vous définissez les conditions initiales au temps zéro, en fournissant les données. Les données sont une fonction $\mu_0(x)$ qui est contrainte. Il s'agit d'équations d'évolution classiques en physique mathématique, un système hyperbolique d'équations, avec des données initiales, étudiées dans le temps sous des conditions aux limites et des valeurs initiales appropriées. Un problème typique de physique mathématique, et c'est le cas du problème de Navier-Stokes, consiste à prouver ou infirmer l'existence de solutions régulières pour tout temps sous des hypothèses raisonnables sur les données initiales et le champ externe. Une hypothèse raisonnable signifierait évidemment une régularité appropriée des données, une décroissance adéquate dans tout l'espace, et ainsi de suite. Je n'entrerai pas dans les détails techniques. La question est : étant donné des conditions raisonnables, aux limites ou des données initiales, prouver l'existence de solutions pour tout temps, des solutions lisses restant lisses pour tout temps. C'est ça, le problème. Est-ce vrai ? Pouvez-vous le prouver ? Et si vous le pouvez, vous vous adressez à M. Clay, à Arthur Jaffe, ou à quiconque sera à leur place dans 50 ans, et vous réclamez votre prix. Eh bien, quels sont les commentaires ? Que savons-nous ? Que savons-nous ? Eh bien, nous savons tout d'abord qu'on peut appliquer ces équations de Navier-Stokes en dimensions deux ou trois. En dimension deux, les choses sont beaucoup plus simples, et des résultats ont été prouvés. La dimension trois est là où les choses se compliquent.

Il y a une grande différence entre la dimension deux et trois pour ce problème. C'est également prouvé pour un temps court. Si vous donnez les données initiales, vous pouvez montrer qu'il existe une solution pour un temps court. Les choses évolueront pendant une courte période. Rien ne tournera mal. Vous pouvez aussi prouver que la solution durera longtemps si les données initiales elles-mêmes sont petites. Si vous avez une très, très petite perturbation, la chose se propagera pendant longtemps, et la durée sera une fonction dépendant de la taille des données. Vous pouvez estimer cela. Mais ce n'est pas la même chose que pour tout temps. Il existe aussi un résultat fondamental très important prouvé par Leray en 1934, qui démontre l'existence de solutions faibles. Les solutions faibles sont des solutions généralisées liées aux distributions de Schwartz. On intègre des choses moyennes, on étudie le comportement moyen. Et il a été prouvé que celles-ci existent pour tout temps. Mais une solution faible, évidemment, n'est pas la même chose qu'une vraie solution, elle peut cacher de nombreuses singularités qui se développent. Et la question est réellement : ces singularités se développent-elles ou non ? Donc, maintenant, il existe quelques résultats partiels. Une fois que vous avez une solution faible, l'une des techniques standards des équations aux dérivées partielles est de prendre cette solution faible, de l'étudier, puis de montrer qu'elle est en fait lisse. Ce sont ce qu'on appelle les théorèmes de régularité. Et certains résultats partiels sur la régularité des solutions faibles ont été prouvés.

On peut donner un certain type d'estimations sur la nature de la singularité, si elle existe. Mais

on est loin de dire qu'il n'y a aucune singularité du tout. Donc, cela ne résout pas le problème. C'est un pas dans cette direction. Et de plus, les techniques analytiques utilisées jusqu'à présent semblent avoir atteint leurs limites. Les techniques d'analyse standard appliquées à ce type de problème ne mèneront pas à une solution globale. Il semble qu'il faille de nouvelles idées pour résoudre ce problème. Maintenant, attendons-nous une réponse positive ou une réponse négative ? Eh bien, s'il y a une réponse négative, cela signifie que certaines solutions peuvent exploser en temps fini. Une explosion en temps fini signifierait que quelque chose devient infini. Bien sûr, ce que cela signifie physiquement, c'est que votre modèle n'est plus valide dans ce régime. Tout modèle a ses limites et si la solution mathématique dépasse ces limites, elle n'est plus applicable. Cela ne signifie pas que le monde physique n'existe pas, bien entendu. Le monde physique est là, et votre modèle mathématique peut être inadapté. Alors, la question est : l'équation de Navier-Stokes est-elle un modèle suffisamment bon pour rester une bonne approximation en tout temps ? Ce n'est pas garanti. Voyez-vous, il ne faut pas commettre l'erreur de supposer que le monde physique est contraint par nos exigences. C'est donc une erreur à éviter. Des calculs numériques ont été effectués, bien sûr, à grande échelle, et certaines indications numériques suggèrent que des singularités peuvent se développer.

Mais, comme les équations sont non linéaires et que les calculs numériques se poursuivent longtemps, il est très difficile de savoir si ces explosions issues des calculs numériques sont réelles ou s'il s'agit simplement du résultat de l'approximation numérique. Ce n'est pas clair. Donc, ce sont des indications, mais rien de plus. L'un des éléments importants en mécanique des fluides est ce qu'on appelle la vorticité. La vorticité est donnée par le rotationnel du vecteur vitesse, et lorsque vous introduisez l'équation de la vorticité, la pression disparaît. Vous obtenez une nouvelle équation différentielle uniquement pour la vorticité. Et les vorticités sont des choses très intéressantes en mécanique des fluides, comme vous le savez, et elles possèdent de nombreuses propriétés topologiques. Et en fait, il pourrait s'avérer que la topologie des vorticités explique une possible explosion ; je veux dire, en discutant avec des amis en mécanique des fluides, ils disent que nos idées sur la façon dont certains tourbillons pourraient se développer et s'entremêler expliqueraient un éventuel processus d'explosion. Ces équations sont donc non linéaires. Les équations non linéaires, comme je l'ai dit, cachent en elles des effets topologiques possibles liés aux tourbillons. Et traiter une équation différentielle purement comme un exercice d'analyse ou d'algèbre peut occulter une réalité fondamentale de ces équations qui pourrait être topologique et refléter certains phénomènes physiques. Alors, gardez l'esprit ouvert. Il est fort possible qu'il se passe quelque chose dans le monde physique que nous ne connaissons ou ne comprenons pas encore. Le calcul numérique pourrait le suggérer. Il se peut que vous deviez essayer d'infirmer cette conjecture. Mais bien sûr, c'est aussi difficile. Et si ce processus se produit, il aura une importance pour la turbulence et ainsi de suite.

Permettez-moi de faire une remarque ici, alors que nous pensons à d'autres choses : en 1869, Lord Kelvin a proposé une théorie appelée celle des atomes-tourbillons. Car l'hydrodynamique était bien développée à l'époque. La théorie atomique n'existait pas. Il a avancé la théorie selon laquelle les atomes sont en réalité des tubes noués d'éther. Il concevait le fluide comme une sorte d'éther, un type de fluide, une sorte de tourbillons à l'intérieur. Il imaginait qu'un tourbillon pouvait devenir une sorte de nœud. L'idée était que l'atome était une sorte de vortex, un tube tourbillonnaire noué. Cela a stimulé tout le développement de la théorie des nœuds. Les célèbres conjectures de Tate, T-A-I-T (et non pas John Tate), qui n'ont été résolues que 100 ans plus tard par Vaughan Jones, en

utilisant des idées issues de la physique mathématique. Vous voyez donc ici un lien intéressant entre les idées de vortex en mécanique des fluides, des concepts issus de la théorie quantique des champs et des applications géométriques, tout cela renforçant, je pense, la conviction en l'unité fondamentale des mathématiques. Mais bien sûr, en tant que solution à ce problème, nous ne connaissons pas encore la réponse, nous ne savons pas si elle sera positive ou négative.

Permettez-moi de terminer par une brève remarque sur les équations d'Euler. Les équations d'Euler sont ce que vous obtenez si vous ne prenez aucune viscosité. Ces équations sont donc plus simples que les équations de Navier-Stokes car un terme disparaît. C'est ce qu'on appelle parfois un fluide idéal. Mais en fait, cette équation est analytiquement plus difficile que les équations de Navier-Stokes car le terme non linéaire, le terme de seconde dérivée que vous avez supprimé, aide à contrôler le système. Ainsi, les équations sont plus faciles formellement, mais plus difficiles analytiquement.

Géométriquement, elles sont plus faciles à comprendre ; par exemple, Arnold a interprété les équations d'Euler comme un flot hamiltonien dans un espace de dimension infinie, lié à des notions élégantes en topologie. On peut donc dire beaucoup de choses sur ces équations simples, mais ce ne sont pas celles pour lesquelles vous recevrez le Prix Clay ; elles restent néanmoins intéressantes, tout comme la comparaison intéressante entre différentes classes d'équations obtenues par l'utilisation de différents modèles. Eh bien, merci pour le temps supplémentaire que le ministre m'a accordé en arrivant au milieude mon intervention, sinon j'aurais été contraint par le temps.

Mais ces quatre problèmes, je pense, vous donnent un aperçu de l'étendue des mathématiques, y compris dans des domaines importants de la physique mathématique, mais en même temps, j'ai essayé de souligner qu'il existe des idées unificatrices globales, et vous ne devriez pas penser pouvoir appliquer un ensemble d'outils particulier à un problème. Vous devez garder l'esprit ouvert, rechercher toutes les idées, toutes les sources. Et si vous travaillez dans un domaine lié à la physique mathématique, il est très important de parler aux physiciens, de parler aux personnes extérieures, car les idées qui en proviennent peuvent apporter une contribution surprenante aux mathématiques elles-mêmes. Je pense donc conclure sur ces dernières remarques. Merci.

Arthur Jaffe : Au nom de l'Institut Clay, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé à la session d'aujourd'hui. Je vous invite à prendre une coupe de champagne et quelques hors-d'œuvre à l'extérieur. Et je tiens également à dire que si, ce soir, vous résolvez l'un de ces problèmes, envoyez-le à une revue. Ne nous l'envoyez pas, mais dans deux ans, nous l'examinerons pour le prix, et chaque prix est d'un million de dollars.