Note sur les espaces de Riemann

Dr James W. Alexander.

(Présenté devant l'American Mathematical Society le 28 février 1920.)

1. On propose d'établir le théorème selon lequel toute variété fermée orientable de dimension n peut être représentée sur une hypersphère de dimension n comme un espace de Riemann, soit comme une surface de Riemann généralisée. L'argument sera développé explicitement uniquement pour le cas $n = 3$, car l'extension aux dimensions supérieures est parfaitement automatique et ne nécessite guère plus que la modification de quelques indices.

2. Nous savons qu'une variété tridimensionnelle peut toujours être construite à partir des points et des points frontières d'un nombre fini de régions tétraédriques en appariant convenablement par paires les faces triangulaires des tétraèdres qui la bordent. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ les points de la variété qui correspondent aux sommets des tétraèdres. Alors, on peut toujours les arranger de telle sorte que les quatre points A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} et A_{i4} correspondant aux sommets d'un tétraèdre soient distincts. Dans ce cas, la région tétraédrique bordée peut être désignée par le symbole $|A_{i1}A_{i2}A_{i3}A_{i4}|$, où l'ordre des lettres A_{ij} est sans importance.

Nous dirons que chaque permutation des lettres du symbole d'une région tétraédrique détermine un sens sur la région et que deux permutations déterminent des sens identiques ou opposés selon qu'elles diffèrent d'un nombre pair ou impair de transpositions. Une région tétraédrique est orientée par association avec l'une des permutations et est alors désignée soit par le symbole de la permutation qui donne le sens, soit par le symbole de toute autre permutation, précédé d'un signe plus ou moins selon que la seconde permutation diffère de la première d'un nombre pair ou impair de transpositions. Ainsi, nous avons

$$A_1A_2A_3A_4 = -A_2A_3A_4A_1 = A_3A_4A_1A_2 = \ldots,$$

mais

$$A_1A_2A_3A_4 \neq A_2A_3A_4A_1, \text{etc.}$$

3. Considérons maintenant deux régions tétraédriques $|AA_1A_2A_3|$ et $|A'A_1A_2A_3|$ ayant une face $A_1A_2A_3$ en commun. Si des sens sont attribués à ces régions, ces sens seront dits cohérents sur la face $A_1A_2A_3$ si et seulement si nous avons l'une des combinaisons suivantes

$$\begin{array}{ccccc} AA_1A_2A_3 & \quad\text{et}\quad & -A'A_1A_2A_3 & \quad\text{ou} \\ -AA_1A_2A_3 & \quad\text{et}\quad & A'A_1A_2A_3. & \end{array} \tag{1}$$

La variété est dite orientable si des sens peuvent être attribués à toutes les régions tétraédriques de manière à être cohérents sur chaque face. La propriété d'être ou non orientable est un invariant

---

Référence : Bull. Amer. Math. Soc. 26(8) : 370-372 (May 1920).
https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-american-mathematical-society/volume-26/issue-8/Note-on-Riemann-spaces/bams/1183425307.full p. 370-371.

Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, mars 2026.

de la variété et ne dépend pas du choix de l'ensemble des régions tétraédriques [1]. Désormais, nous limiterons la discussion aux variétés orientables et supposerons que les régions tétraédriques ont toutes été associées de manière cohérente.

4. Supposons maintenant que dans l'espace d'inversion (avec un seul point à l'infini, et donc topologiquement semblable à l'hypersphère), nous établissions un système d'axes et sélectionnions k points finis $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $\;i = 1, 2, \ldots, k$, un pour chacun des points A_i, et tels qu'il n'y ait aucun groupe de quatre points parmi les k points qui ne soient coplanaires. Alors, quatre points quelconques, tels que P_1, P_2, P_3 et P_4, déterminent un tétraèdre qui subdivise l'espace en deux régions tétraédriques, dont l'une ne contient pas le point à l'infini. Nous désignons cette dernière région par toute permutation $P_{i1}P_{i2}P_{i3}P_{i4}$ des points P_1, P_2, P_3, P_4 telle que

$$\Delta(P_{i1}P_{i2}P_{i3}P_{i4}) = \begin{vmatrix} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} \\ y_{i1} & y_{i2} & y_{i3} & y_{i4} \\ z_{i1} & z_{i2} & z_{i3} & z_{i4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

et celle qui contient le point à l'infini par toute permutation $P_{j1}P_{j2}P_{j3}P_{j4}$ telle que

$$\Delta(P_{j1}P_{j2}P_{j3}P_{j4}) < 0$$

Avec cette notation, l'espace de Riemann souhaité est obtenu immédiatement en appliquant simplement chaque région perçue $A_{s1}A_{s2}A_{s3}A_{s4}$ de la variété sur la région $P_{s1}P_{s2}P_{s3}P_{s4}$ de l'espace d'inversion, de telle sorte, bien sûr, que le sommet A_{st} passe toujours par le point P_{st} et que les images des frontières des différentes régions tétraédriques se rejoignent correctement le long des images de leurs faces et arêtes.

La preuve que l'application qui vient d'être définie donne l'espace de Riemann souhaité repose sur le fait que les deux déterminants

$$\Delta(PP_1P_2P_3) \qquad \text{et} \qquad -\Delta(P'P_1P_2P_3)$$

ont le même signe ou des signes opposés selon que les points P et P' se trouvent de part et d'autre du plan $P_1P_2P_3$ ou du même côté. Il s'ensuit donc que pour deux régions contiguës

$$\begin{array}{ccc} PP_1P_2P_3 & \text{et} & -P'P_1P_2P_3 \quad \text{ou} \\ -PP_1P_2P_3 & \text{et} & P'P_1P_2P_3 \end{array} \tag{2}$$

les points d'une région au voisinage d'un point de la face $P_1P_2P_3$ sont situés de part et d'autre de la face par rapport à ceux de l'autre région. Par conséquent, en comparant (1) et (2), on constate que l'application est uniforme non seulement au voisinage des points de la variété à l'intérieur d'une région tétraédrique, mais aussi des points situés sur une face limitrophe. Ainsi, les seules singularités de l'application correspondent aux sommets A_i ou aux arêtes A_iA_j. De plus, l'application est

1. Dans la terminologie de Poincaré, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété soit orientable est qu'elle n'ait pas de coefficient de torsion d'ordre n.

partout une application r vers 1 sur l'espace d'inversion, sauf peut-être aux points P_i ou le long des arêtes P_iP_j, car deux points quelconques, B et C, qui ne sont pas sur une droite P_iP_j peuvent être reliés par un chemin p qui ne rencontre pas la droite P_iP_j. Par conséquent, si le point B correspond à n points $B_1, B_2, \ldots, B_n$ de la variété, le chemin p correspond à n chemins non sécants menant des B_i à un nombre égal de points C_i.

5. Dans le cas tridimensionnel, un espace de Riemann obtenu par la construction ci-dessus contient, en général, un réseau de lignes de branchement sur chacune desquelles deux ou plusieurs feuillets se rejoignent. Il est facile de montrer que, sans modifier la topologie de l'espace, le système de branches peut être remplacé par un ensemble de courbes simples, non sécantes et fermées, telles que seulement deux feuillets se rejoignent sur une courbe. Les courbes peuvent cependant être nouées et entrelacées.

Les espaces de Riemann tridimensionnels ont été étudiés par Heegaard [2] et Tietze [3], mais aucun de ces mathématiciens ne semble avoir eu conscience de leur pleine généralité.

New-York,
22 février 1920.

Sur la déformation d'une n-cellule

J. W. Alexander

Département de mathématiques, Université de Princeton

Communiqué le 29 octobre 1923

Par un procédé extrêmement simple, le professeur Veblen (Thèse, Proceedings, 3, 1917, p. 655) a démontré que toute transformation biunivoque d'une n-cellule et de sa frontière en elles-mêmes, laissant invariants tous les points de la frontière, peut être réalisée par une déformation. Cependant, la déformation est telle que la frontière de la n-cellule ne reste pas invariante, mais revient simplement à sa position initiale une fois la déformation terminée. Une légère modification du schéma du professeur Veblen donne une déformation au cours de laquelle la frontière reste ponctuellement invariante. Je ne donnerai la démonstration que pour le cas $n = 2$, car la généralisation aux dimensions supérieures est immédiate.

Soit la 2-cellule et sa frontière représentées par l'intérieur et la périphérie du cercle unité C_1. Toute transformation continue bijective T de la 2-cellule en elle-même peut alors être exprimée par une paire d'équations en coordonnées polaires de la forme suivante :

2. Heegaard, Dissertation inaugurale, Copenhague, 1898. Aussi : *Bulletin Société math. de France*, vol. 44 (1916) p. 161.

3. Tietze, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, vol. 19 (1908), p. 1. Cf. la remarque de la p. 104.

$$r^1 = R(r, \varphi), \qquad \varphi^1 = \Theta(r, \varphi), \tag{T}$$

où R et Θ sont définis à l'intérieur du cercle unité. De plus, si la transformation est ponctuellement invariante sur la frontière C_1 de la 2-cellule, nous devons également avoir

$$R(1, \varphi) = 1, \qquad \Theta(1, \varphi) = \varphi.$$

Nous étendrons la région de définition de la transformation T sur tout le plan en posant

$$R(r, \varphi) = r, \qquad \Theta(r, \varphi) = \varphi, \text{ pour } r \geq 1.$$

Il est donc clair que la transformation étendue laissera invariants tous les points situés sur ou hors du cercle unité C_1.

Considérons maintenant la famille de transformations

$$r^1 = \lambda R({}^r\!/\!{}_\lambda, \varphi), \qquad \varphi^1 = \Theta({}^r\!/\!{}_\lambda, \varphi), \qquad 1 \geq \lambda > 0 \tag{T_λ}$$

où λ est un paramètre. De toute évidence, la transformation T_λ laisse invariants tous les points situés sur ou hors d'un cercle C_λ de rayon λ centré à l'origine, et détermine à l'intérieur du cercle C_λ une transformation qui n'est qu'une réplique à une échelle différente de la transformation déterminée par T à l'intérieur du cercle unité C_1. Ainsi, lorsque λ tend vers zéro, la transformation T_λ se confond continûment avec l'identité, ce qui rend raisonnable de définir T_0 comme l'identité. Pour $\lambda = 1$, la transformation T_λ se réduit à T.

La déformation souhaitée est celle déterminée par T_λ lorsque λ augmente continûment de 0 à 1. De toute évidence, le cercle unité reste invariant pendant la déformation, puisqu'il n'est jamais intérieur au cercle C_λ.

Le théorème ci-dessus a été démontré pour le cas $n = 2$ par H. Tietze (*Palermo, Rend., Circ. Mat.*, 38, 1914, p. 247-304) et, plus simplement, par H. L. Smith (*Annals Math.*, 19, 1918-19, p. 137-141). La présente démonstration, cependant, se généralise immédiatement aux dimensions n, comme cela a déjà été remarqué.