

L'hypothèse de Riemann : passé, présent et une lettre à travers le temps

Alain Connes

5 février 2026

Résumé

Cet article, commandé comme étude synthétique de l'hypothèse de Riemann, offre un panorama complet de 165 années d'approches mathématiques de ce problème fondamental, tout en introduisant une nouvelle perspective apparue lors de sa préparation.

L'article débute par une description détaillée de nos connaissances sur la fonction zêta de Riemann et ses zéros, suivie d'un vaste panorama des théories mathématiques développées pour tenter de résoudre l'hypothèse de Riemann – des approches analytiques classiques aux méthodes géométriques et physiques modernes. Nous y abordons également plusieurs formulations équivalentes de l'hypothèse.

Dans le cadre de cette étude, nous présentons une contribution originale sous la forme d'une "Lettre à Riemann", utilisant uniquement les mathématiques disponibles à son époque. Cette lettre révèle une méthode inspirée de l'approche de Riemann lui-même au théorème de transformation conforme : en optimisant une forme quadratique (restriction de la forme quadratique de Weil en langage moderne), nous obtenons des approximations remarquables des zéros de la fonction zêta. En utilisant uniquement des nombres premiers inférieurs à 13, cette procédure d'optimisation fournit des approximations des 50 premiers zéros avec des précisions allant de $2,6 \times 10^{55}$ à 10^{-3} . De plus, nous démontrons un résultat général selon lequel ces valeurs approchées se situent exactement sur la droite critique $\Re(z) = \frac{1}{2}$.

À la suite de la lettre, nous expliquons les mathématiques sous-jacentes en termes modernes, notamment en décrivant le lien profond qui unit la forme quadratique de Weil au monde de la théorie de l'information. Les dernières sections développent une perspective géométrique à l'aide de formules de trace, esquissant une stratégie de démonstration potentielle fondée sur l'établissement de la convergence des zéros des produits eulériens finis vers les produits eulériens infinis. Tout en complétant l'étude commandée, ces nouveaux résultats suggèrent une piste prometteuse pour les recherches futures sur la conjecture de Riemann.

Référence : <https://arxiv.org/pdf/2602.04022>.

Correction de la traduction en français par outils informatiques : Denise Vella-Chemla.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Rencontre avec la fonction zêta de Riemann	8
2.1	Théorie analytique classique des nombres	8
2.1.1	Théorème des nombres premiers (TNP)	8
2.1.2	Formule de Riemann, article de von Mangoldt	9
2.1.3	Formules explicites	10
2.1.4	Changements de signe de $\pi(x) - \text{Li}(x)$	11
2.1.5	Hardy et Littlewood	12
2.1.6	Les contributions pionnières de Selberg (1940–1950)	12
2.1.7	Proportion de zéros sur la droite critique	12
2.1.8	Régions sans zéros et estimation de la répartition des zéros	13
2.1.9	Hypothèse de Lindelöf	13
2.2	Théorie des fonctions entières et méromorphes	13
2.2.1	Théorème de factorisation de Hadamard	13
2.2.2	Théorie de Nevanlinna	14
2.2.3	Comportement moyen de $\log \zeta(s) $ et zéros de $\zeta(s) - x$	15
2.2.4	Théorème d’universalité de Voronin, zeta le caméléon mathématique	15
3	Un siècle et demi de construction de théories vers HR	16
3.1	Analyse harmonique et analyse fonctionnelle	17
3.1.1	Espaces de Hilbert et théorie spectrale	17
3.1.2	Théorie de la diffusion et interprétation spectrale	17
3.2	Géométrie algébrique et arithmétique	17
3.2.1	Preuve de Weil pour les corps de fonctions	17
3.2.2	Schémas de Grothendieck et cohomologie étale	18
3.2.3	Motifs	18
3.3	Formes automorphes et théorie de la représentation	19
3.3.1	Le programme de Langlands	19
3.3.2	Formes modulaires et fonctions L	19
3.3.3	Formule de trace et fonction zêta de Selberg	20
3.4	Théorie des matrices aléatoires et chaos quantique	20
3.4.1	Corrélation des paires d’espacements de Montgomery	20
3.4.2	Les statistiques d’Odlyzko	21
3.4.3	Chaos quantique	22
3.4.4	Théorie de Katz-Sarnak	22
3.4.5	Matrices de moments et unitaires (Keating–Snaith)	22
3.5	Géométrie non-commutative	23
3.5.1	Formule de trace de Connes	23
3.5.2	Nœuds, nombres premiers et théorie des corps de classes	24
3.6	Fonctions L p -adiques et fonctions L motiviques	24
3.6.1	Fonctions L p -adiques et théorie d’Iwasawa	24
3.6.2	Fonctions L motiviques et conjectures de Bloch–Kato	25
3.7	Mathématiques computationnelles et expérimentales	25
3.7.1	Calculs en haute précision	25
4	Formulations équivalentes	26
4.1	Critère de positivité de Weil	26
4.2	Critère de Beurling–Nyman	27
4.3	Critère de Li	27
4.4	Formulations en théorie élémentaire des nombres	28
4.4.1	Critère de Robin (1984)	28
4.4.2	Critère de Lagarias (2002)	28

5	Une lettre au Professeur Bernhard Riemann	29
6	La stratégie et les prochaines petites étapes	33
6.1	La transformation de Fourier de θ_x a tous ses zéros sur la droite réelle	33
6.2	La fonction Ξ de Riemann et les fonctions de Hermite	34
6.3	Les fonctions d'onde prolate entrent en scène	35
6.4	La formule de Poisson et l'approximation k_λ de θ_x , $\lambda = \sqrt{x}$	36
6.5	Convergence des transformées de Fourier $\widehat{k}_\lambda \rightarrow \widehat{k}$	37
6.6	Étapes restantes	38
7	Perspectives géométriques	38
7.1	Formule de trace archimédienne	38
7.2	Positivité de Weil archimédienne	39
7.3	L'espace des classes d'adèles semi-local	39
7.4	La formule de trace semi-locale	40
7.5	Les régimes infrarouge et ultraviolet	40
7.6	L'opérateur d'onde prolate	42
8	Conclusion	43

1 Introduction

L'hypothèse de Riemann (HR) demeure sans doute le problème non résolu le plus célèbre des mathématiques, ayant résisté à toutes les tentatives de démonstration depuis que Bernhard Riemann a fait remarquer, nonchalamment, dans son Mémoire de 1859, que “*sehr wahrscheinlich*” (très probablement) tous les zéros non triviaux de sa fonction zêta se situent sur la droite critique $\Re(s) = 1/2$.

L'essence du présent article est une lettre de trois pages à Riemann, écrite comme s'il était possible de communiquer à travers les années, et dans laquelle je présenterai une stratégie (vers une preuve de HR) qui n'utilise que les mathématiques qu'il connaissait, ainsi que la grande puissance des ordinateurs modernes.

Dans la section “Rencontre avec la fonction zêta de Riemann”, nous souhaitons présenter au lecteur une image saisissante du lien extraordinaire que Riemann a mis en évidence entre les zéros complexes de la fonction zêta et la distribution des nombres premiers. Nous commençons par un bref historique du théorème des nombres premiers, suivi de la formule explicite de Riemann pour $\pi(x)$, le nombre de nombres premiers inférieurs à x , et de ses généralisations ultérieures en formules explicites. Nous abordons ensuite l'une des conséquences les plus marquantes : la découverte par Littlewood que la différence $\pi(x) - \text{Li}(x)$ change de signe une infinité de fois, une observation qui a bouleversé les hypothèses antérieures d'une simple loi monotone.

Nous retraçons alors l'histoire des résultats concernant les zéros de $\zeta(s)$, depuis la démonstration par Hardy de leur infinité sur la droite critique, en passant par la percée de Selberg en 1942, jusqu'aux résultats modernes relatifs à la proportion de zéros situés exactement sur la droite critique. Pour éclairer cette théorie, nous nous appuyons également sur le riche cadre des fonctions entières, notamment le théorème de factorisation d'Hadamard, la théorie de Nevanlinna et le remarquable théorème de Borchsenius-Jessen, fruit du programme de Bohr-Landau sur les fonctions presque périodiques.

Cette partie culmine avec un résultat qui aurait certainement stupéfié Riemann : le théorème d'universalité de Voronin. Ce théorème affirme que la fonction zêta, dans la bande $1/2 < \Re(s) < 1$,

possède une propriété de caméléon : par translation verticale, elle peut approcher toute fonction $f(s)$ prédéfinie, continue, non nulle et holomorphe sur un compact simplement connexe de la bande. Pris ensemble, ces jalons révèlent à la fois la profondeur et la subtilité de la structure analytique de $\zeta(s)$. Ils nous préparent à comprendre pourquoi l’hypothèse de Riemann demeure si tenace : la fonction elle-même recèle une gamme étonnante de comportements, bien plus insaisissables qu’il n’y paraît au premier abord.

Riemann n’aurait certainement pas pu prévoir l’extraordinaire paysage mathématique qui a émergé des tentatives de démonstration de sa conjecture. Des théories entières sont nées de cette quête, établissant des liens entre la géométrie algébrique et la physique quantique. La section “Un siècle et demi de construction théorique vers l’hypothèse de Riemann” est consacrée à un bref panorama de ces théories. La première concerne l’extension du problème à la géométrie algébrique et arithmétique. Dans ce cadre, l’analogue de la fonction zêta de Riemann en caractéristique finie a été développé, et l’analogue correspondant de l’hypothèse de Riemann a été démontré par André Weil. Pour contextualiser, je rappellerai brièvement les notions de schémas de Grothendieck et de cohomologie étale. L’essentiel est que la célèbre analogie de Weil avec la “pierre de Rosette” prend tout son sens lorsqu’on l’envisage à travers le prisme des schémas. Sur la pierre de Rosette originale, les inscriptions parallèles sont horizontales : les hiéroglyphes en haut, le texte démotique au milieu et le grec en bas. Weil a proposé une comparaison similaire à trois textes pour l’hypothèse de Riemann. En bas, correspondant au texte grec, se trouve l’œuvre de Riemann sur les surfaces riemanniennes. Il n’y a pas d’analogue de l’hypothèse de Riemann dans ce contexte, mais cela illustre l’extraordinaire puissance des méthodes transcendantes en géométrie. Le texte du milieu correspond à la géométrie algébrique sur les corps finis : c’est ici que l’analogue de l’hypothèse de Riemann a été établi par Weil, la fonction zêta apparaissant comme fonction génératrice comptant les points rationnels sur les courbes définies sur les extensions de corps finis. Enfin, le texte du haut, le texte “hiéroglyphique”, correspond au cas arithmétique du spectre de \mathbb{Z} , qui demeure profondément mystérieux.

Ce qui est remarquable, c’est que, grâce à la théorie des schémas de Grothendieck, on observe un cadre unificateur pour les trois inscriptions : dans chaque cas, il s’agit de schémas réguliers de dimension un. C’est pourquoi j’évoquerai brièvement les schémas, la cohomologie étale et les motifs.

Une autre généralisation majeure découle de la théorie des formes automorphes et de la théorie des représentations, où la formule de trace de Selberg et les fonctions zêta jouent un rôle central.

Je passerai ensuite à la théorie des matrices aléatoires et au chaos quantique. Une découverte remarquable, initiée par Montgomery et Dyson et confirmée de façon spectaculaire par les expériences numériques à grande échelle d’Odlyzko, est que la corrélation par paires des espacements normalisés entre les zéros consécutifs de $\zeta(s)$ sur la droite critique coïncide avec la corrélation des valeurs propres de l’ensemble unitaire gaussien (GUE) de la théorie des matrices aléatoires. Nicholas Katz et Peter Sarnak ont étendu cette correspondance à des familles entières de fonctions L et ont établi un cadre théorique systématique pour comprendre leur comportement statistique, comme expliqué dans le § 3.4.4.

Lors de la comparaison des zéros de la fonction zêta avec les valeurs propres de l’ensemble unitaire gaussien, il est nécessaire d’effectuer un changement d’échelle local pour compenser la densité va-

riable des zéros. Ce besoin d’ajustement révèle l’absence d’un véritable “modèle ultraviolet” pour la fonction zêta – une lacune qui sera comblée dans la dernière partie de cet article, dans le § 7.6. Une avancée supplémentaire a été réalisée avec les travaux de Keating et Snaith en 2000, qui ont utilisé la théorie des matrices aléatoires pour proposer une formule conjecturale pour les moments de la fonction zêta de Riemann.

Je reviendrai ensuite brièvement sur mes travaux de 1998 concernant la formule de la trace. L’élément novateur réside dans le fait qu’au lieu d’étudier directement la fonction zêta, on considère l’idéal qu’elle engendre, ce qui revient à se concentrer sur ses zéros. De manière cruciale, on peut appréhender cet idéal et les zéros associés sans définir explicitement la fonction, ni faire appel à son prolongement analytique. La clé est la construction d’un espace géométrique – l’espace des classes d’adèles – qui acquiert une importance centrale en tant que quotient des adèles par l’action multiplicative ergodique des nombres rationnels. Ce quotient révèle les zéros des fonctions L , et pas seulement de la fonction zêta de Riemann, sous la forme d’un spectre d’absorption. Des résultats récents soulignent une correspondance précise entre l’espace de classes d’adèles et l’homologue de la théorie des corps de classes des schémas intimement liés à $\text{Spec } \mathbb{Z}$ que la théorie de Grothendieck du site étale et du groupe fondamental étale a dévoilés comme une généralisation de la théorie de Galois.

La formule de trace correspondante est analogue à celle de Selberg, mais plus subtile, car elle fait intervenir une coupure infrarouge et une coupure ultraviolette. C’est précisément ici que, pour la première fois, les fonctions d’onde sphéroïdales prolates apparaissent naturellement.

Je mentionnerai diverses généralisations de la fonction zêta de Riemann, qui élargissent la perspective et suggèrent de nouvelles pistes de recherche. Par souci d’exhaustivité, j’aborderai également les fonctions p -adiques : bien qu’aucun analogue de l’hypothèse de Riemann ne soit connu dans ces cas, elles ont néanmoins donné lieu à de nombreux développements remarquables.

Enfin, dans la section “Formulations équivalentes”, j’examinerai le domaine des formulations équivalentes de l’hypothèse de Riemann. Le livre “*Equivalences of the Riemann Hypothesis*” de Kevin Broughan (2017, Cambridge University Press) répertorie systématiquement plus de 100 formulations équivalentes. Cet ouvrage exhaustif organise les équivalences par domaine mathématique.

- Fonctions arithmétiques élémentaires,
- Formules de dénombrement des nombres premiers,
- Équivalents analytiques,
- Critères d’analyse fonctionnelle,
- Énoncés probabilistes,
- Théorie des matrices et des opérateurs,
- Systèmes dynamiques.

Certains des énoncés équivalents à HR sont d’une simplicité remarquable : par exemple, soit R_n la matrice de Redheffer, une matrice $n \times n$ de booléens (i.e. de 0 ou 1) avec $R_{ij} = 1$ si $j = 1$ ou si i divise j . Alors

$$HR \iff \det(R_n) = O(n^{1/2+\epsilon}), \quad \forall \epsilon > 0$$

Ces formulations sont séduisantes mais trompeuses : l’histoire du sujet montre avec quelle facilité une tentative de résolution du problème peut être aspirée par ce “trou noir” d’équivalences. Je discuterai de deux de ces formulations équivalentes : d’abord le critère de positivité de Weil, puis le critère de Robin amélioré par Lagarias. Ce dernier critère montre que l’hypothèse de Riemann-Richardson appartient à la catégorie des énoncés que Hilbert, dans son programme sur les fondements des mathématiques, espérait voir “démontrables s’ils sont vrais”. Or, le théorème de Gödel a démontré que, précisément pour ce type d’énoncés, la vérité n’implique pas la démontrabilité. Ce point sera examiné en détail à l’aide de la théorie de la complexité algorithmique de Chaitin.

La partie suivante du présent article, intitulée “*Lettre au professeur Bernhard Riemann*”, est d’une nature tout à fait différente. Elle se présente sous la forme d’une lettre adressée à Riemann lui-même, dans un dialogue imaginaire à travers le temps. L’objectif de cette lettre est de souligner une observation simple mais surprenante : une stratégie vers HR qui s’inscrit pleinement dans la propre perspective mathématique de Riemann, comme en témoigne par exemple sa démonstration du théorème de l’application conforme. Point important, cette stratégie ne requiert que des concepts et outils mathématiques qui étaient disponibles en 1859.

Concrètement, cette méthode permet de retrouver les premiers zéros non triviaux de la fonction zêta en utilisant seulement quelques facteurs du produit eulérien. Par exemple, en tronquant le produit eulérien au nombre premier 13 et en effectuant le calcul avec la méthode décrite, on obtient une approximation des 50 premiers zéros de $\zeta(s)$ dont la précision se comprend mieux en considérant la probabilité d’obtenir une telle approximation par hasard. La probabilité qu’un tel accord puisse se produire par pur hasard est d’environ 10^{-1235} . Pour donner une idée de l’échelle, cela correspond approximativement à la probabilité de deviner correctement le résultat de plus de 4000 lancers de pièce consécutifs – un exploit si improbable qu’en pratique, il exclut à la fois la coïncidence et l’erreur de calcul.

On pourrait donc être tenté de conclure : “Il s’agit simplement d’un nouvel algorithme pour calculer les zéros de la fonction zêta de Riemann.”. Si tel était le cas, l’hypothèse de Riemann elle-même en découlerait, puisqu’un théorème général garantit que lorsque la plus petite valeur propre de l’opérateur correspondant est simple et paire¹, les nombres d’approximation obtenus forment le spectre d’un opérateur auto-adjoint et sont donc tous réels.

Cette lettre à Riemann est suivie, dans la section “Prochaines étapes”, d’une discussion plus détaillée de son contenu, ainsi que d’une esquisse d’une stratégie possible pour justifier rigoureusement que, de manière générale, les zéros d’approximation produits par cette méthode convergent vers les zéros réels de la fonction zêta de Riemann. Bien que les preuves numériques en faveur de cela soient convaincantes, les preuves seules ne constituent pas une démonstration. Dans cette approche naturelle, les fonctions d’onde sphéroïdales prolates, que j’avais introduites dans ce contexte en 1998, jouent un rôle central.

Des expériences informatiques révèlent un fait frappant : une fonction faisant intervenir les fonctions d’onde sphéroïdales prolates fournit une excellente approximation de la fonction qui minimise la forme quadratique de Weil. Cette observation justifie pleinement cette approche. Il est bien sûr possible qu’une démonstration complète dans cette direction se heurte à des obstacles importants. Cependant, quel que soit le niveau de progression, cette voie ouvre naturellement la voie à une

1. signifiant que la fonction propre associée est paire.

exploration plus approfondie, dont le point de départ est présenté dans la section “Perspectives géométriques” : la relation inattendue entre deux mondes mathématiques apparemment éloignés.

D’une part, il y a le monde de la forme quadratique de Weil. Le fait central ici est l’équivalence remarquable de Weil : l’hypothèse de Riemann est équivalente à la positivité de certaines formes quadratiques qui n’impliquent qu’un nombre fini de nombres premiers. Ceci est surprenant, car on pourrait s’attendre à ce que la résolution de l’hypothèse de Riemann exige de contrôler l’infinité complète des nombres premiers. Ici, cependant, le problème se réduit localement, à des ensembles finis à la fois. De plus, dans ce contexte, comme mentionné précédemment, on peut exploiter la construction générale des fonctions dont les zéros se trouvent entièrement sur la droite critique.

D’autre part, il y a le monde des fonctions d’ondes prolates développé par David Slepian et ses collaborateurs, dont les racines plongent dans les travaux de Claude Shannon en théorie de la communication. Le lien fondamental, établi dans l’ouvrage fondateur de Slepian, Landau et Pollak, est un opérateur différentiel classique du second ordre sur la droite : l’opérateur prolata, obtenu par confluence de l’équation de Heun – un élément parfaitement familier de l’univers mathématique de Riemann. Cet opérateur joue un double rôle. Dans le régime infrarouge, il permet d’approximer le vecteur propre minimal de la forme quadratique de Weil. À l’autre extrême, comme expliqué dans la dernière section de cet article, il fournit également un modèle pour un opérateur auto-adjoint dont le spectre reflète le comportement ultraviolet des zéros de la fonction zêta de Riemann.

Prises ensemble, ces observations soulignent l’importance de comprendre les situations où seul un nombre fini de nombres premiers intervient, et de clarifier l’interaction entre la forme quadratique de Weil et l’opérateur prolata. Ce lien est établi par la formule de trace, que j’ai démontrée en 1998. Dans la dernière section, je reformulerai cette formule de trace en utilisant précisément les mêmes éléments que ceux qui apparaissent dans la théorie de la communication et dans les travaux de Slepian et ses collaborateurs, explicitant ainsi le lien qu’elle établit entre la forme quadratique de Weil et les fonctions prolata.

En arrière-plan se trouve un espace géométrique d’une importance fondamentale : l’espace des classes d’adèles semi-locales Y_S , associé à un ensemble fini S de places de \mathbb{Q} qui inclut la place archimédienne. Par construction, Y_S est obtenu comme le quotient

$$\prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v / \Gamma, \quad \Gamma := \{\pm \prod p_v^{n_v} \mid n_v \in \mathbb{Z}\}$$

du produit fini de corps locaux par l’action diagonale du groupe $\Gamma \subset \mathbb{Q}^*$ engendré par les nombres premiers de S . Le critère de positivité de Weil montre que prouver la positivité requise dans ce cadre semi-local est équivalent à établir l’hypothèse de Riemann (en fait, on englobe également le cas des fonctions L à Grössen-caractères).

Un avantage majeur de cet espace semi-local, comparé à l’espace complet des classes d’adèles, est à trouver du côté de la théorie de la mesure : ici, les mesures de Haar multiplicative et additive ne sont plus singulières l’une par rapport à l’autre, de sorte que le quotient se comporte bien du point de vue de la théorie de la mesure. Topologiquement, cependant, la situation est plus subtile. Pour chaque nombre premier $p \in S$, on rencontre une orbite périodique de longueur $\log p$, et ces orbites encodent précisément la contribution de p à la formule explicite. Enfin, dans le § 7.6, j’explique la récente découverte de notre travail commun avec H. Moscovici [27], où nous montrons que les valeurs propres de l’extension auto-adjointe de l’opérateur sphéroïdal prolata reproduisent

le comportement ultraviolet des carrés des zéros de la fonction zêta de Riemann et construisent une famille isospectrale d'opérateurs de Dirac dont les spectres ont le même comportement ultraviolet que les zéros de zêta.

2 Rencontre avec la fonction zêta de Riemann

2.1 Théorie analytique classique des nombres

2.1.1 Théorème des nombres premiers (TNP)

En 1852, Pafnouti Tchebychev a démontré dans [14] que le nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x satisfait à la condition suivante :

$$A \frac{x}{\log(x)} < \pi(x) < \frac{6A}{5} \frac{x}{\log(x)}, \quad A \approx 0.92129$$

pour x suffisamment grand, ce qui lui a permis de démontrer la convergence de la série sur les nombres premiers p ,

$$\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \frac{1}{5 \log 5} + \frac{1}{7 \log 7} + \dots$$

Il a introduit deux fonctions de comptage essentielles, ϑ et ψ , définies comme les sommes suivantes :

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p, \quad \psi(x) := \vartheta(x) + \vartheta(x^{1/2}) + \vartheta(x^{1/3}) + \dots$$

Il a démontré l'identité $\sum_1^x \psi(x/n) = \log x!$ puis a utilisé la formule de Stirling.

Le fait que la relation asymptotique $\pi(x) \sim x/\log x$ soit équivalente à $\vartheta(x) \sim x$ était certainement connu de Tchebychev et faisait partie des connaissances mathématiques de l'époque. En effet, dans leurs articles respectifs [54], [106], Hadamard et de la Vallée Poussin démontrent tous deux $\vartheta(x) \sim x$ sans mentionner explicitement le résultat équivalent $\pi(x) \sim x/\log x$. Leurs démonstrations indépendantes ont établi de manière cruciale la non-annulation de $\zeta(s)$ sur la droite $\Re(s) = 1$, en utilisant des techniques d'analyse complexe, notamment la théorie des fonctions entières de Hadamard. Le lien avec l'hypothèse de Riemann est profond : alors que la théorie des nombres premiers exige seulement que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) = 1$, le terme d'erreur $\pi(x) - \text{Li}(x)$ dans la fonction de comptage des nombres premiers est directement contrôlé par la position des zéros. Sous l'hypothèse de Riemann, le terme d'erreur s'améliore à $O(x^{1/2} \log x)$. L'approximation par le logarithme intégral diffère sensiblement de son premier terme ; on a

$$\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \frac{2x}{\log^3 x} + \dots$$

La démonstration de Hadamard selon laquelle $\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) = 1$ recèle une idée élégante qui se comprend grâce aux phases des puissances premières et se réduit à $(-1)^2 = 1$. En effet, si pour un certain nombre réel t on avait $\zeta(1 + it) = 0$, les nombres complexes p^{-it} tendraient à s'accumuler en -1 , d'après le développement de $-\log 1 - p^{-it+\epsilon}$. Mais alors les nombres complexes p^{-2it} tendraient à s'accumuler en 1 , créant ainsi un pôle de la fonction zêta en $1 + 2it$, ce qui est impossible sauf si $2t = 0$.

L'étape suivante de la démonstration du théorème fondamental des nombres premiers (TNP) par Hadamard et de la Vallée Poussin découlait de leur besoin d'extraire des informations asymptotiques précises sur la distribution des nombres premiers à partir des propriétés analytiques de la fonction zêta. Ils employèrent des techniques sophistiquées issues de la théorie des fonctions entières, ce qui nécessitait des estimations détaillées du comportement de la fonction zêta dans différentes régions du plan complexe. Bien que ces méthodes fussent mathématiquement rigoureuses et aient révélé des intuitions mathématiques brillantes, elles masquaient la relation conceptuelle entre les données analytiques et le résultat arithmétique, c'est-à-dire la formule asymptotique.

Edmund Landau a apporté la première simplification conceptuelle majeure en introduisant les méthodes taubériennes pour démontrer le théorème des nombres premiers, travaux parus dans son ouvrage influent de 1909, "*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*". L'innovation de Landau résidait dans la reconnaissance du fait que le lien entre les propriétés analytiques de la fonction zêta et les informations arithmétiques sur la distribution des nombres premiers pouvait être établi grâce à une classe générale de théorèmes connus sous le nom de résultats taubériens. Ces théorèmes fournissent des conditions sous lesquelles les propriétés asymptotiques des fonctions génératrices se traduisent par des propriétés asymptotiques de leurs suites de coefficients. La progression de l'approche taubérienne initiale de Landau à travers le théorème de Wiener-Ikehara¹ jusqu'à la présentation simplifiée de Newman montre comment la compréhension mathématique peut s'approfondir grâce au développement de cadres plus généraux et conceptuellement transparents.

La démonstration élémentaire du théorème fondamental du nombre premier (TNP) par Selberg et Erdős en 1949 a montré que l'analyse complexe n'est pas logiquement nécessaire à sa démonstration. Le crible de Selberg, initialement développé pour cette démonstration élémentaire [97], est devenu un outil fondamental en théorie analytique des nombres. La formule de symétrie de Selberg :

$$\sum_{p \leq x} \log^2 p + \sum_{pq \leq x} \log p \log q = 2x \log x + O(x)$$

illustre sa capacité à trouver des simplicités inattendues dans la distribution des nombres premiers.

2.1.2 Formule de Riemann, article de von Mangoldt

Dans son article fondamental² [90], Riemann prit soin de définir précisément la branche du logarithme intégral qu'il utilisait et d'énoncer la convergence conditionnelle³ dans sa formule pour la fonction $f(x)$ obtenue comme la somme des fonctions de comptage $\pi(x^{1/n})$.

$$f(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\alpha} \left(\text{Li} \left(x^{\frac{1}{2} + \alpha i} \right) + \text{Li} \left(x^{\frac{1}{2} - \alpha i} \right) \right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2 - 1} \frac{dt}{t \log t} - \log 2 \quad (1)$$

où les $\frac{1}{2} + \alpha i$ sont les zéros non triviaux de ζ à partie imaginaire positive et l'ordre des termes correspond aux valeurs croissantes de $\Re(\alpha)$.

2. qu'il envoya à Tchebychev.

3. Il maîtrisait parfaitement la convergence conditionnelle et a fourni la première démonstration rigoureuse que les séries conditionnellement convergentes peuvent être réarrangées pour converger vers n'importe quelle valeur prescrite ou pour diverger complètement. Le théorème de réarrangement de Riemann est issu de sa thèse d'habilitation de 1854, "*Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*", un ouvrage principalement consacré à l'extension de la théorie des séries de Fourier à des classes de fonctions plus générales, et publié à titre posthume en 1867, [91], grâce au travail éditorial de Dedekind.

Comme je le mentionnerai brièvement au début de ma lettre à Riemann, il est regrettable que l'attention portée aux différentes branches du logarithme intégral ait disparu dans certains traités modernes, tels que l'ouvrage classique d'Edwards [44], ou dans certains articles techniques, où (1) est écrit comme ci-dessus alors qu'il n'existe aucune fonction $\text{Li}(z)$ ou $\text{Li}(z) + \bar{\text{Li}}(\bar{z})$ pour laquelle le terme général de la série tend vers 0. Le problème réside dans la notation, car si l'on suit attentivement Riemann, on constate que la valeur qu'il considère dépend non seulement de x^ρ , mais aussi de $\rho \log x$. En fait, dans son article [107], von Mangoldt définit correctement la signification qu'il attribue non pas à la fonction $\text{Li}(z)$, mais à la fonction $\text{Li}(e^w)$. Voici ce qu'il écrit :

En posant $w = u + iv$, où u et v désignent des nombres réels, et en considérant à nouveau h comme une variable réelle positive, il suffit de poser les définitions suivantes :

1. Si $v > 0$, alors

$$\text{Li}(e^w) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h+w}^w \frac{e^z}{z} dz + i\pi$$

2. Si $v = 0$, alors

$$\text{Li}(e^w) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-h} \frac{e^z}{z} dz + \int_h^w \frac{e^z}{z} dz$$

3. Si $v < 0$, alors

$$\text{Li}(e^w) = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h+w}^w \frac{e^z}{z} dz - i\pi$$

Il est facile de vérifier que la fonction $\text{Li}(e^w)$ ainsi définie possède bien les propriétés souhaitées.

Ainsi, von Mangoldt était pleinement conscient du défaut de la notation $\text{Li}(x^\rho)$, qui, malheureusement, est restée utilisée sans précaution, même si la plupart des auteurs sont (probablement) conscients du problème.

On peut tester la formule de Riemann, reformulée en utilisant la fonction $\text{Ei}(\rho \log x)$ au lieu de $\text{Li}(x^\rho)$ (voir (7)) à l'aide d'un ordinateur, et l'on constate une assez bonne concordance en effectuant la somme sur quelques milliers de zéros de zêta.

2.1.3 Formules explicites

Elles relient les fonctions de comptage des nombres premiers et les zéros non triviaux de $\zeta(s)$, précisant ainsi l'influence de ces zéros sur les fonctions arithmétiques. Von Mangoldt [107] a rigoureusement démontré la formule explicite originale de Riemann, déduite de l'égalité plus simple suivante :

$$\psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2})$$

où $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$ est la fonction de Tchebychev, et la somme porte sur les zéros non triviaux ρ . Comme dans le cas de Riemann, \sum_{ρ} est prise comme la limite des sommes partielles pour $-T \leq \Im(\rho) \leq T$ et n'est pas absolument convergente. Le terme d'erreur est de l'ordre de $(\log T)^2/T$ (voir le théorème 12.5 de [81]).

Guinand [52] et Weil [109] ont ensuite développé des formules explicites plus générales reliant les fonctions tests et leurs transformées de Fourier aux distributions de zéros, offrant ainsi une perspective d'analyse harmonique sur la relation entre les nombres premiers et les zéros. La formulation

usuelle de la fonction zêta de Riemann fait intervenir des fonctions tests $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant des conditions de régularité appropriées⁴ et leur transformée de Mellin définie comme

$$\tilde{f}(s) := \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \quad (2)$$

Elles prennent la forme

$$\sum_\rho \tilde{f}(\rho) = \tilde{f}(0) + \tilde{f}(1) - \sum_v \mathcal{W}_v(f), \quad (3)$$

où la somme du membre de gauche porte sur tous les zéros complexes ρ de la fonction zêta de Riemann et n'est en général que conditionnellement convergente, tandis que la somme du membre de droite porte sur toutes les places rationnelles v de \mathbb{Q} . Les distributions non archimédiennes \mathcal{W}_p sont définies, à l'aide de $f^\sharp(x) := x^{-1}f(x^{-1})$, comme suit :

$$\mathcal{W}_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^\infty \left(f(p^m) + f^\sharp(p^m) \right) \quad (4)$$

tandis que la distribution archimédienne est donnée par

$$\mathcal{W}_\mathbb{R}(f) := (\log 4\pi + \gamma)f(1) + \int_1^\infty \left(f(x) + f^\sharp(x) - \frac{2}{x}f(1) \right) \frac{dx}{x - x^{-1}}. \quad (5)$$

2.1.4 Changements de signe de $\pi(x) - \text{Li}(x)$

Le célèbre résultat de Littlewood de 1914 [75], selon lequel $\pi(x) - \text{Li}(x)$ change de signe une infinité de fois (en supposant HR), a démontré que le terme d'erreur dans la théorie des perturbations périodiques (TPP) présente un comportement oscillatoire complexe, remettant en question l'observation empirique selon laquelle $\pi(x) < \text{Li}(x)$ pour toutes les valeurs calculées. La première borne effective pour un tel changement de signe a été donnée par Skewes [100], qui a montré (en supposant HR) qu'un croisement se produit avant

$$B = 10^{10^{10^{34}}}$$

Cette borne considérable a été grandement améliorée par Lehman [71], qui a introduit l'idée-clé de dériver une formule explicite pour $ue^{-u/2}(\pi(e^u) - \text{Li}(e^u))$ moyennée par un noyau gaussien. Elle a ensuite été améliorée par Riele [105] (à environ $6,69 \times 10^{370}$), Bays et Hudson [2] (à environ $1,4 \times 10^{316}$), et plus récemment par Chao et Plymen [15] et Saouter, Demichel et Trudgian ([93], [94]).

4. Elles sont continues et admettent une dérivée continue, sauf en un nombre fini de points où $f(x)$ et $f'(x)$ présentent au plus une discontinuité de première espèce, et où leurs valeurs sont définies comme la moyenne de leurs limites à droite et à gauche. De plus, on suppose que pour un certain $\delta > 0$, on a

$$f(x) = O(x^\delta), \quad \text{pour } x \rightarrow 0+, \quad f(x) = O(x^{-1-\delta}), \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty,$$

2.1.5 Hardy et Littlewood

La preuve de Hardy de 1914 [56] selon laquelle une infinité de zéros se trouvent sur la droite critique utilisait l'équation fonctionnelle et une analyse minutieuse de $Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta(1/2 + it)$, où $\theta(t)$ est choisi pour rendre $Z(t)$ réel pour t réel,

$$\theta(t) = \operatorname{Im} \left(\log \Gamma \left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2} \right) \right) - \frac{t}{2} \log \pi$$

En étudiant les changements de signe de $Z(t)$, il a montré qu'il existe une infinité de zéros avec $\Re(s) = 1/2$.

Les travaux de Hardy et Littlewood [57] sur les résultats conditionnels ont démontré que l'hypothèse de Riemann (HR) a de nombreuses conséquences sur les écarts entre nombres premiers et sur d'autres problèmes additifs. Leur approche s'appuie sur les travaux antérieurs de Hardy, mais intègre des techniques analytiques plus raffinées pour l'estimation des intégrales oscillatoires et des développements asymptotiques. Leurs travaux ultérieurs portent sur une analyse approfondie de l'équation fonctionnelle approchée de la fonction zêta⁵, qui fournit une représentation explicite de $\zeta(s)$ valable dans toute la bande critique. En étudiant les annulations et les oscillations dans cette représentation, ils ont pu démontrer que le nombre de changements de signe de la fonction Z de Hardy, et donc le nombre de zéros de $\zeta(s)$ qui sont sur la droite critique lorsque la partie imaginaire appartient à $[0, T]$, croît au moins linéairement avec T . Il restait cependant à déterminer si une fraction positive du nombre $N(T)$ de zéros non triviaux de partie imaginaire dans $[0, T]$, estimé par Riemann à $N(T) \sim \frac{1}{2\pi} T \log T$, se situe sur la droite critique.

2.1.6 Les contributions pionnières de Selberg (1940–1950)

La percée qui a permis de résoudre cette question fondamentale est survenue en 1942 grâce aux travaux pionniers d'Atle Selberg, qui a introduit la technique novatrice de l'adoucissement et a démontré pour la première fois qu'une proportion positive de zéros non triviaux se situe sur la droite critique. L'idée essentielle de la preuve de Selberg² consiste à multiplier la série pour $\zeta(s)$ par le carré des sommes partielles de la série de $\zeta(s)^{-1/2}$. La contribution majeure de Selberg a été de démontrer que le nombre $N_0(T)$ de zéros sur la droite critique satisfait $N_0(T) \gg T \log T$, ce qui implique immédiatement que le rapport $N_0(T)/N(T)$ est strictement positif, établissant ainsi qu'une fraction positive de tous les zéros se situe sur la droite critique. Les travaux de Selberg [96], [97] ont révolutionné l'étude de la fonction zêta grâce à plusieurs innovations fondamentales. Ses travaux sur la distribution de $\log |\zeta(1/2 + it)|$ ont montré qu'elle suit une loi normale de moyenne et de variance spécifiques, préfigurant ainsi les liens avec la théorie des matrices aléatoires.

2.1.7 Proportion de zéros sur la droite critique

Comme expliqué précédemment, le théorème de Hardy (1914) [56] a été quantifié par Selberg (1942) [96], qui a démontré qu'une proportion positive de zéros a une partie réelle égale à $1/2$. La percée

5. L'article de Siegel de 1932 sur les carnets de Riemann montre que, bien que Hardy et Littlewood aient redécouvert indépendamment le terme principal de ce développement en 1920 grâce à leur "équation fonctionnelle approchée" utilisant des méthodes similaires (la méthode du point-selle), les travaux de Riemann apportent des idées supplémentaires.

de Levinson en 1974 [73] a prouvé qu’au moins $1/3$ des zéros non triviaux se situent sur la droite critique, grâce à des techniques de lissage qui réduisent la partie réelle de la fonction zêta au voisinage de cette droite. L’amélioration apportée par Conrey en 1989 [34] (la proportion passant de $1/3$ à $2/5$) a utilisé des techniques de lissage plus sophistiquées et une analyse asymptotique. Le résultat de 2011 de Bui, Conrey et Young [12], atteignant 41 %, a employé plusieurs polynômes de Dirichlet et des techniques d’optimisation issues de la théorie des fonctions extrémales, représentant l’état de l’art actuel dans cette approche. Pratt et al. [88] ont le record actuel de 41,7 % basé sur le modificateur de Feng [46].

2.1.8 Régions sans zéros et estimation de la répartition des zéros

Les régions classiques sans zéros, telles que celle démontrée par de la Vallée Poussin [106] montrant que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re(s) \geq 1 - c/\log(|\Im(s)|+2)$, fournissent des bornes explicites sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Les estimations de densité de zéros, initiées par Bohr et Landau, bornent le nombre $N(\sigma, T)$ de zéros tels que $\Re(s) \geq \sigma$ et $|\Im(s)| \leq T$. Les meilleurs résultats connus montrent que $N(\sigma, T) \ll T^{c(1-\sigma)}$ pour différentes valeurs de c dépendant de σ , avec une amélioration

$$N(\sigma, T) \ll T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} (\log T)^5$$

Montgomery et d’autres ont fourni des bornes de plus en plus précises lorsque $\sigma \rightarrow 1$. Le résultat de densité nulle de Guth-Maynard [53] constitue la première amélioration du théorème d’Ingham au voisinage de $\sigma = 3/4$ en 85 ans.

2.1.9 Hypothèse de Lindelöf

L’hypothèse de Lindelöf stipule que $|\zeta(1/2 + it)| \ll t^\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. Si σ est réel, alors $\mu(\sigma)$ est défini comme l’infimum de tous les nombres réels α tels que $|\zeta(\sigma + it)| = O(t^\alpha)$. On a $\mu(\sigma) = 0$ pour $\sigma > 1$, et l’équation fonctionnelle implique que $\mu(\sigma) = \mu(1 - \sigma) - \sigma + 1/2$. Le théorème de Phragmén-Lindelöf implique que μ est une fonction convexe. L’hypothèse de Lindelöf stipule que $\mu(1/2) = 0$, ce qui, combiné aux propriétés de μ mentionnées précédemment, implique que $\mu(\sigma)$ vaut 0 pour $\sigma \geq 1/2$ et $1/2 - \sigma$ pour $\sigma \leq 1/2$. Bien que moins forte que l’hypothèse de Riemann, cette hypothèse aurait néanmoins des applications importantes aux moments des fonctions L et aux problèmes de sous-convexité.

2.2 Théorie des fonctions entières et méromorphes

2.2.1 Théorème de factorisation de Hadamard

Une fonction entière f est d’ordre σ si :

$$\sigma = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r)}{\log r}$$

où $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. La formule du produit de Hadamard stipule qu’une fonction entière f d’ordre 1 peut s’écrire :

$$f(z) = e^{A+Bz} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}$$

où le produit porte sur tous les zéros ρ de f , et A et B sont des constantes.
La fonction zêta complète

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (6)$$

est une fonction entière d'ordre un munie de la représentation du produit de Hadamard ⁶ [55, 5, 72]

$$\xi(z) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right)$$

Riemann considère la fonction (il la notait $\xi(s)$, mais, depuis Hardy, on utilise $\Xi(s)$).

$$\Xi(s) = \xi(1/2 + is) \quad (7)$$

L'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$ implique $\Xi(s) = \Xi(-s)$, donc la fonction Ξ est paire et ses zéros sont groupés par paires $\pm\alpha$. De plus, Ξ est entière d'ordre 1. Pour chaque paire de zéros $\pm\alpha$, les facteurs exponentiels $e^{s/\alpha}$ et $e^{-s/\alpha}$ s'annulent et la factorisation de Hadamard de Ξ prend la forme particulièrement simple suivante :

$$\Xi(s) = \Xi(0) \prod_{\Re(\alpha) > 0} \left(1 - \frac{s^2}{\alpha^2}\right)$$

où le produit porte uniquement sur les zéros à partie réelle positive. Les deux représentations du produit sont identiques ⁷ à l'exception du facteur constant et, tandis que $\xi(0) = \frac{1}{2}$, on a

$$\Xi(0) = -\frac{\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\sqrt[4]{\pi}} \sim 0.497121$$

Cette nuance est à l'origine de la seule “erreur” dans la formule de Riemann pour le nombre de nombres premiers inférieurs à x , où il a utilisé $\log \Xi(0)$ au lieu de $\log \xi(0)$.

2.2.2 Théorie de Nevanlinna

Cette théorie de la distribution des valeurs [82, 83, 68] étudie la croissance et la distribution des valeurs des fonctions méromorphes à travers les fonctions caractéristiques et les relations de déficience. Il est à noter que la caractéristique de Nevanlinna est étroitement liée à la formule de Jensen.

Pour une fonction analytique f dont les zéros a_k appartiennent à $|z| \leq r$, la formule de Jensen affirme que, pourvu que $f(0) \neq 0$,

$$\log |f(0)| + \sum_k \log \frac{r}{|a_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

6. Le produit infini est défini ici comme la limite, lorsque T tend vers l'infini, du produit sur ρ avec $|\rho| < T$.

7. en utilisant l'identité $1 - \frac{\frac{1}{2} + is}{\frac{1}{2} + ia} = \frac{1 - \frac{s}{a}}{1 - \frac{i}{2a}}$.

Cette relation entre la croissance moyenne au bord de f et la distribution de ses zéros est précisément ce que la théorie de Nevanlinna systématise pour les fonctions méromorphes.

La caractéristique $T(r, f) = m(r, f) + N(r, f)$, $r > 0$, peut ainsi être vue comme une version affinée des quantités apparaissant dans la formule de Jensen, la fonction de comptage $N(r, f)$ enregistrant les pôles et la fonction de proximité $m(r, f)$ enregistrant la croissance au bord. Pour la fonction zêta, on peut définir la caractéristique de Nevanlinna $T(r, \zeta)$ et étudier sa croissance ³. La théorie fournit des outils tels que les premier et deuxième théorèmes principaux qui relient la distribution des a -points (solutions de $f(z) = a$) à la croissance de la fonction. Bien que les applications directes pour démontrer HR n'aient pas abouti, la théorie de Nevanlinna éclaire le caractère exceptionnel de la valeur 0 pour $\zeta(s)$, comme le montre le théorème de Borchsenius-Jessen présenté ci-dessous, et offre des analogies avec les théorèmes de type Picard [49]. Des travaux récents ont exploré les liens entre la théorie de Nevanlinna et les propriétés d'universalité de $\zeta(s)$.

2.2.3 Comportement moyen de $\log |\zeta(s)|$ et zéros de $\zeta(s) - x$

Le théorème de Borchsenius-Jessen [7] offre un contraste frappant avec HR. Alors que tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ sont conjecturés comme appartenant à la droite critique $\Re(s) = 1/2$, les zéros de $\zeta(s) - x$ pour tout $x \neq 0$ se regroupent densément près de la droite critique par la droite. Plus précisément :

- Pour $x \neq 0$, l'équation $\zeta(s) = x$ admet une infinité de solutions dans toute bande $1/2 < \Re(s) < \sigma$.
- La densité des solutions croît indéfiniment lorsque $\Re(s) \rightarrow 1/2^+$.
- Si $N_x(T)$ compte les zéros de $\zeta(s) - x$ tels que $\Re(s) > 1/2$ et $0 < \Im(s) < T$, alors $N_x(T)/T \rightarrow \infty$ lorsque $T \rightarrow \infty$.

Ce phénomène met en évidence le caractère exceptionnel de la valeur $x = 0$ et montre que HR est instable sous l'effet de perturbations : l'ajout d'une constante quelconque à $\zeta(s)$ détruit l'alignement des zéros sur la droite critique. Ce résultat est lié aux théorèmes de la moyenne pour $\log \zeta(s)$ dans la bande critique et aux propriétés ergodiques du flot $s \mapsto s + it$ sur la distribution des valeurs de $\zeta(s)$. Le théorème de Borchsenius-Jessen peut être considéré comme le couronnement du programme de Bohr-Landau sur les fonctions presque périodiques et les séries de Dirichlet. Alors que Bohr et Landau ont établi le cadre général pour comprendre la distribution des valeurs des séries de Dirichlet par le biais de la quasi-périodicité, Borchsenius et Jessen ont obtenu le résultat définitif pour la fonction zêta de Riemann elle-même, démontrant que $\log \zeta(\sigma + it)$ admet une distribution limite continue ⁴.

2.2.4 Théorème d'universalité de Voronin, zeta le caméléon mathématique

Ce remarquable théorème de 1975 [108] stipule que la fonction zêta de Riemann peut approcher arbitrairement bien toute fonction holomorphe non nulle dans la bande critique. Le théorème original de Voronin a établi l'universalité pour les disques : si $0 < r < 1/4$, si $f(s)$ est continue sur $|s| \leq r$, holomorphe sur $|s| < r$ avec $f(s) \neq 0$ sur $|s| \leq r$, et si $\epsilon > 0$, alors il existe t_0 tel que :

$$\max_{|s| \leq r} \left| f(s) - \zeta \left(s + \frac{3}{4} + it_0 \right) \right| < \epsilon$$

À la suite des travaux pionniers de Voronin, Reich et Bagchi ont démontré que si K est un sous-ensemble compact de la bande $\{s : 1/2 < \Re(s) < 1\}$ muni d'un complément connexe, si f est

continue sur K et holomorphe à l'intérieur de K avec $f(s) \neq 0$ sur K , et si $\epsilon > 0$, alors il existe t_0 tel que

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + it_0) - f(s)| < \epsilon$$

De plus, l'ensemble de tels t_0 possède une densité inférieure positive. Ainsi, la fonction zêta de Riemann dans la bande critique $\frac{1}{2} < \Re(z) < 1$ se comporte comme un caméléon mathématique : elle peut approcher toute fonction holomorphe non nulle sur les ensembles compacts par simple translation verticale dans le plan complexe. Ce résultat utilise, comme dans le cadre presque périodique de Bohr-Landau, les propriétés ergodiques du flot de Kronecker sur le tore de dimension infinie, dual compact du groupe discret \mathbb{Q}^* des nombres rationnels non nuls. Nous allons maintenant aborder l'ingrédient-clé, qui est de nature différente.

Comme nous l'avons brièvement mentionné plus haut dans la note de bas de page n° 3, Riemann, dans son Mémoire sur les séries trigonométriques, a montré, dans son étude du noyau de Dirichlet, qu'une série de nombres réels conditionnellement convergente peut prendre la valeur de n'importe quelle somme C après un réarrangement approprié de ses termes. Ce qui est remarquable, c'est que cette généralisation du fait principal est au cœur de la démonstration de Voronin. Le résultat-clé est le suivant ([70], Théorème 1.16).

Soit H un espace de Hilbert, et $\{x_m\}$ une suite dans H satisfaisant les deux conditions suivantes :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\|^2 < \infty; \quad \sum_{m=1}^{\infty} |(x_m, x)| = \infty \quad \forall x \in H, x \neq 0$$

Alors l'ensemble de toutes les séries convergentes $\sum_{m=1}^{\infty} a_m x_m$, $|a_m| = 1$, $m = 1, 2, \dots$ est dense dans H .

La preuve de ce résultat témoigne de la puissance du théorème de Hahn-Banach⁵, en utilisant l'ensemble convexe des sommes $\sum b_m x_m$ où $|b_m| \leq 1$.

Le théorème de Voronin a été étendu au point d'atteindre l'universalité pour les fonctions L de Dirichlet et d'autres classes de fonctions L , révélant ainsi un phénomène général pour les fonctions avec produits eulériens. L'essence de la démonstration est de montrer que, en tant qu'éléments d'un espace H approprié de type Bergman/Hardy, le système $\{\log(1 - p^{-s})\}$, où p parcourt les nombres premiers, satisfait les deux conditions du théorème précédent. Ceci permet d'approcher le logarithme de la fonction $f(s)$ (ce qui est logique puisque K est simplement connexe).

3 Un siècle et demi de construction de théories vers HR

Depuis le Mémoire de Riemann de 1859, “*Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*”, l'hypothèse qu'il a formulée concernant les zéros de la fonction zêta a inspiré certains des développements les plus importants en mathématiques.

La poursuite de l'hypothèse de Riemann, qu'elle soit explicite ou qu'elle serve d'idéal motivant, a conduit à l'émergence de théories entières et a profondément transformé de nombreux domaines. Cette section présente un aperçu des principaux cadres et idées mathématiques développés dans le cadre de cette quête permanente.

3.1 Analyse harmonique et analyse fonctionnelle

3.1.1 Espaces de Hilbert et théorie spectrale

La démonstration du théorème de Voronin, évoquée précédemment, illustre la puissance des techniques des espaces de Hilbert. L'inclusion par Hilbert de HR comme huitième problème de sa liste de 23 problèmes en 1900 coïncide avec le développement de la théorie spectrale. La conjecture de Hilbert-Pólya (années 1910) suggère l'existence d'un opérateur auto-adjoint H tel que les solutions non triviales de $\zeta(1/2 + it) = 0$ soient les valeurs propres de H . Ceci impliquerait immédiatement HR, puisque les valeurs propres des opérateurs auto-adjoints sont réelles.

3.1.2 Théorie de la diffusion et interprétation spectrale

L'approche par diffusion, développée par Faddeev et Pavlov, interprète les zéros de $\zeta(s)$ comme des résonances (pôles de la matrice de diffusion) d'un certain système quantique. La conjecture de Berry-Keating [3] suggère des liens avec des systèmes hamiltoniens chaotiques classiques dont la quantification pourrait fournir l'opérateur recherché. Parmi les propositions spécifiques, on trouve $H = \frac{1}{2}(xp + px)$ (où x est la position et p l'impulsion) avec des conditions aux limites appropriées, bien que des constructions rigoureuses restent à ce jour difficiles à établir. Le lien avec le chaos quantique est renforcé par la correspondance des propriétés statistiques des zéros avec celles des systèmes chaotiques quantiques.

3.2 Géométrie algébrique et arithmétique

Comme tout mathématicien le sait, une des stratégies éprouvées face à un problème difficile consiste à en élargir le champ d'application : généraliser la question puis examiner des cas particuliers où les caractéristiques essentielles apparaissent plus clairement. C'est dans ce cadre qu'André Weil a réalisé une avancée décisive en résolvant l'analogue de l'hypothèse pour les corps globaux de caractéristique finie.

3.2.1 Preuve de Weil pour les corps de fonctions

La démonstration de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur des corps finis par Weil dans les années 1940 utilisait la théorie de l'intersection sur le produit $C \times C$ d'une courbe avec elle-même. Pour une courbe projective lisse C sur \mathbb{F}_q , la fonction zêta

$$Z_C(t) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n}{n} t^n \right)$$

avec $N_n = |C(\mathbb{F}_{q^n})|$, satisfait une équation fonctionnelle et est de la forme

$$Z_C(t) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-qt)},$$

où $P(t)$ est un polynôme dont les racines ont pour valeur absolue $q^{-1/2}$. Ceci est l'analogue de HR. La démonstration de Weil utilisait l'appariement des intersections sur les diviseurs et le théorème de l'indice de Hodge, établissant une approche géométrique des problèmes de type HR. Les simplifications successives de la démonstration de Weil par Mattuck-Tate et Grothendieck représentent un

exemple paradigmatique de la façon dont la compréhension mathématique évolue grâce au développement de cadres théoriques plus puissants. La réussite originale de Weil nécessitait une virtuosité technique pour surmonter l'absence d'outils théoriques-clés. Les simplifications ultérieures ont démontré comment la disponibilité de résultats généraux – le théorème de Riemann-Roch pour les surfaces⁶ et la théorie systématique de l'intersection – permet de transformer des constructions spécialisées en applications de techniques standard. Si le théorème classique de Riemann-Roch pour les surfaces a été formulé par Castelnuovo dans les années 1890, la version basée sur la théorie des faisceaux, qui a permis la simplification de Mattuck-Tate, a été développée par Serre et la théorie de l'intersection adaptée à ce cadre représente un effort collectif impliquant les travaux fondateurs d'André Weil en 1946, la théorie locale de Claude Chevalley, la formulation algébrique de Serre en 1958, et les développements ultérieurs qui ont abouti au cadre moderne des multiplicités d'intersection utilisant les foncteurs Tor et la cohomologie des faisceaux.

3.2.2 Schémas de Grothendieck et cohomologie étale

Grothendieck a révolutionné la géométrie algébrique en introduisant les schémas et la cohomologie étale [1], notamment dans le but de démontrer les conjectures de Weil en dimension arbitraire. Les groupes de cohomologie étale $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$ d'une variété X sur \mathbb{F}_q sont munis d'une action du morphisme de Frobenius, et la fonction zêta s'exprime comme suit :

$$Z_X(t) = \prod_{i=0}^{2 \dim X} P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$$

où $P_i(t) = \det(1 - tF|H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_\ell))$. La preuve de Deligne (1974) des conjectures de Weil a montré que les valeurs propres de Frobenius sur H^i ont une valeur absolue $q^{i/2}$, établissant HR pour les variétés sur les corps finis.

Ce qui est particulièrement stimulant dans l'étude du site étale de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, c'est l'analogie frappante, due à David Mumford et Barry Mazur, entre le rôle des idéaux premiers en géométrie arithmétique et celui des nœuds dans la sphère tridimensionnelle. Dans cette perspective, chaque idéal premier peut être vu comme l'analogue d'un nœud, et la manière complexe dont les idéaux premiers sont imbriqués au sein de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ muni de la topologie étale reflète la façon dont les nœuds peuvent être entrelacés dans S^3 . Cette vision a ouvert de nouvelles perspectives topologiques à la théorie des nombres, suggérant que la géométrie des idéaux premiers pourrait être appréhendée à travers des concepts plus proches de la topologie de basse dimension que de l'analyse classique. Au cœur de cette analogie se trouve l'extension considérable de la théorie de Galois par Grothendieck, des corps aux schémas généraux, réalisée grâce à l'introduction du groupe fondamental étale. Elle fournit le langage naturel permettant d'interpréter l'arithmétique des nombres premiers en termes d'espaces de recouvrement, offrant ainsi un cadre conceptuel dans lequel l'analogie de Mazur et Mumford a pu prendre forme et se développer [77]. Nous reviendrons brièvement sur ce point dans le § 3.5.2.

3.2.3 Motifs

L'invention des motifs par Grothendieck vise à fournir une théorie cohomologique universelle expliquant les schémas communs aux différentes théories cohomologiques (de de Rham, étale, cristalline,

etc.). Dans ce cadre, les fonctions zêta et les fonctions L sont associées à des motifs, et leurs propriétés analytiques incluant potentiellement HR) découlent des propriétés géométriques des motifs. Le formalisme motivique suggère une interprétation cohomologique de l'égalité de de Rham classique, considérant $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ comme une courbe arithmétique et recherchant une théorie cohomologique appropriée. Si la théorie complète des motifs mixtes demeure conjecturale, des cas particuliers comme les motifs d'Artin et les motifs de formes modulaires ont été largement développés.

3.3 Formes automorphes et théorie de la représentation

Dans l'œuvre d'André Weil, l'hypothèse de Riemann est naturellement reformulée dans le cadre plus large des corps globaux. Weil a démontré l'analogue de HR pour les corps globaux de caractéristique finie, et son ouvrage *Basic Number Theory* (Springer, 1967) illustre la puissance de cette approche unificatrice de la théorie des nombres. Une intuition fondamentale est que, bien que les corps globaux soient dénombrables et discrets, chacun admet un compagnon naturel : un anneau localement compact et non discret qui contient le corps global comme sous-groupe cocompact discret. Ce compagnon est l'anneau des adèles, introduit initialement dans le contexte de la théorie des corps de classes. L'anneau des adèles fournit une structure harmonique-analytique riche, et la reformulation par Weil des formules explicites dans ce cadre représente une étape décisive vers l'exploitation de cette structure comme outil en théorie analytique des nombres. L'ouvrage de Weil, *Basic Number Theory*, fut la première exposition systématique de l'utilisation des adèles et des idèles en théorie des nombres. Il unifia non seulement la théorie des corps de classes, mais jeta également les bases des développements ultérieurs en matière de formes automorphes et de théorie des représentations, que nous allons maintenant aborder.

3.3.1 Le programme de Langlands

Cette extension de la théorie des corps de classes au cas non abélien constitue un vaste réseau de conjectures, initié par Langlands dans les années 1960. Elle prédit des liens profonds entre les représentations de Galois et les représentations automorphes. Pour les fonctions L , elle prédit que toute fonction L motivique (issue de la géométrie algébrique) est égale à une fonction L automorphe (issue de l'analyse harmonique sur les groupes adéliques). L'équation fonctionnelle démontrée est en réalité l'un des principaux apports de la théorie automorphe, établissant que les fonctions L automorphes possèdent la structure analytique requise pour formuler l'hypothèse de Riemann généralisée. Puisqu'on s'attend à ce que les fonctions L automorphes satisfassent HR, cela devrait impliquer que toutes les fonctions L motiviques la satisfassent également. Le programme de Langlands a connu des succès spectaculaires (la démonstration par Wiles du dernier théorème de Fermat s'appuyait sur la conjecture de Taniyama-Shimura, désormais un théorème), mais les conjectures générales restent ouvertes.

3.3.2 Formes modulaires et fonctions L

La théorie des formes modulaires fournit des exemples concrets de fonctions L admettant un prolongement analytique et des équations fonctionnelles. Pour une forme parabolique de poids k , $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ sur $\Gamma_0(N)$, la fonction L associée :

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

satisfait une équation fonctionnelle reliant s à $k - s$. La conjecture de Ramanujan-Petersson (démontrée par Deligne) borne $|a_p| \leq 2p^{(k-1)/2}$, ce qui est l'analogie de HR au niveau des facteurs d'Euler. Ces exemples illustrent la forme attendue des fonctions L générales et leur relation avec les objets géométriques.

3.3.3 Formule de trace et fonction zêta de Selberg

La formule de trace de Selberg [98], [59] pour les groupes discrets Γ agissant sur des espaces hyperboliques relie les données spectrales (les valeurs propres du laplacien) à des données géométriques (les longueurs de géodésiques fermées). Pour $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$, on obtient la fonction zêta de Selberg :

$$Z_\Gamma(s) = \prod_{p \text{ primitive}} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - e^{-(s+k)l(p)})$$

où le produit porte sur les géodésiques primitives fermées p de longueur $l(p)$. Cette fonction s'annule aux valeurs propres du laplacien, fournissant ainsi une interprétation spectrale complète. L'analogie avec la fonction zêta de Riemann est frappante : la fonction zêta de Riemann et la fonction zêta de Selberg possèdent toutes deux des produits eulériens, des équations fonctionnelles et leurs zéros contiennent des informations importantes (valeurs propres vs. distribution des nombres premiers). La formule de trace de Selberg pour les surfaces de Riemann d'aire finie acquiert des termes supplémentaires qui la rendent, par exemple dans le cas de $X = H/\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ (où H est le demi-plan supérieur muni de la métrique de Poincaré), encore plus semblable aux formules explicites, puisque les termes paraboliques font désormais intervenir explicitement la somme.

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n} g(2 \log n)$$

(pour une fonction test g) à comparer aux termes $\Lambda(n)$ dans les formules explicites

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}}} g(\log n)$$

Il existe cependant une différence notable : ces termes apparaissent avec un signe positif au lieu du signe négatif, comme indiqué dans [59] §12. Cette discussion sur le signe moins a été étendue au cas de la limite semi-classique des systèmes hamiltoniens en physique dans [3].

3.4 Théorie des matrices aléatoires et chaos quantique

3.4.1 Corrélations des paires d'espacements de Montgomery

En 1973, Hugh Montgomery [79], [80] a conjecturé une propriété statistique remarquable des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann sur la droite critique. En notant γ les ordonnées des zéros $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ avec $0 < \gamma < T$, il a étudié la fonction de corrélation des espacements normalisés entre deux zéros consécutifs. Plus précisément, il a conjecturé que pour $0 < a < b$, et $N(T) = \sum_{0 < \gamma \leq T} 1$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N(T)} \# \left\{ (\gamma, \gamma') : 0 < \gamma, \gamma' < T, \frac{2\pi a}{\log T} \leq |\gamma - \gamma'| \leq \frac{2\pi b}{\log T} \right\} = \int_a^b \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du,$$

Cette densité conjecturée reflète une répulsion entre les zéros et suggère qu'ils ne sont pas distribués aléatoirement, mais présentent une régularité semblable à celle des valeurs propres de grandes matrices hermitiennes aléatoires. Dans une anecdote souvent rapportée, Montgomery mentionna sa formule lors d'une visite à l'Institute for Advanced Study, où le physicien Freeman Dyson, en la voyant, la reconnut immédiatement comme la fonction de corrélation de paires pour les valeurs propres de l'ensemble unitaire gaussien (GUE) de la théorie des matrices aléatoires. Ce résultat fut vérifié numériquement par Odlyzko avec une précision extraordinaire. Ce lien suggère que les zéros se comportent comme les valeurs propres d'une matrice hermitienne aléatoire, indiquant l'existence d'un système quantique chaotique sous-jacent.

Cette rencontre fortuite a jeté les bases d'une connexion profonde et fructueuse entre la théorie des nombres et la mécanique statistique quantique.

3.4.2 Les statistiques d'Odlyzko

Les calculs d'Andrew Odlyzko dans les années 1980-1990 ont révolutionné notre compréhension des propriétés statistiques des zéros de la fonction zêta. En calculant des millions de zéros à des valeurs très élevées (autour du 10^{20} -ième zéro), il a constaté que :

- les espacements entre plus proches voisins suivent la distribution GUE avec une précision remarquable ;
- les fonctions de corrélation d'ordre supérieur correspondent également aux prédictions des matrices aléatoires ;
- les statistiques locales sont universelles, mais les statistiques globales présentent des fluctuations typiques de la théorie des nombres.

Ses données ont apporté une preuve convaincante de l'hypothèse GUE et ont inspiré une grande partie des travaux ultérieurs reliant la théorie des nombres à la théorie des matrices aléatoires. Cette concordance s'étend à des détails précis comme la variance du nombre de zéros dans les intervalles et la distribution des arguments de $\zeta(1/2 + it)$.

Pour comparer les propriétés statistiques des zéros de la fonction zêta de Riemann avec les valeurs propres de matrices aléatoires de l'ensemble unitaire gaussien (GUE), il est nécessaire de prendre en compte une incompatibilité fondamentale de leurs densités. Les valeurs propres d'une matrice GUE de dimension $N \times N$ présentent un espacement moyen constant π/\sqrt{N} le long de l'axe réel (après normalisation appropriée). En revanche, les zéros $\rho_n = 1/2 + i\gamma_n$ de la fonction zêta de Riemann possèdent des parties imaginaires γ_n dont la densité croît logarithmiquement : le nombre de zéros tels que $0 < \gamma < T$ est approximativement égal à $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi}$, ce qui donne un espacement moyen local au voisinage de la hauteur T d'environ $\frac{2\pi}{\log(T/2\pi)}$.

Pour effectuer une comparaison pertinente, il est nécessaire de redimensionner localement les zéros. Plus précisément, lors de l'étude des zéros proches de la hauteur T , on considère les espacements redimensionnés.

$$\tilde{\gamma}_n = \frac{\log(T/2\pi)}{2\pi}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)$$

Ces espacements, dont la valeur moyenne est égale à 1, sont ensuite comparés aux espacements des valeurs propres des matrices GUE avec $N \sim \log \frac{T}{2\pi}$. Après ce rééchelonnement dépendant de la hauteur, on observe une remarquable concordance des statistiques locales, telles que les distributions

des espacements entre plus proches voisins et les fonctions de corrélation à n points. Toutefois, cette procédure de rééchelonnement met en évidence que toute correspondance entre les zéros de zêta et les valeurs propres de matrices aléatoires est intrinsèquement locale et ne peut résulter d'un simple opérateur spectral fixe.

3.4.3 Chaos quantique

Le domaine du chaos quantique étudie la mécanique quantique des systèmes classiquement chaotiques. La conjecture de Berry-Tabor stipule que les systèmes quantiques à limites classiques intégrables possèdent des statistiques de Poisson pour leurs valeurs propres, tandis que ceux à limites classiques chaotiques suivent des statistiques de matrices aléatoires (GUE pour les systèmes invariants par renversement du temps). L'apparition de statistiques GUE pour les zéros de zêta suggère qu'ils proviennent de la quantification d'un système classique chaotique [3]. Parmi les propositions spécifiques figurent les billards dans certains domaines ou des systèmes dynamiques plus abstraits.

3.4.4 Théorie de Katz-Sarnak

S'appuyant sur la découverte de Montgomery et la confirmation numérique par Odlyzko du lien entre les zéros de zêta de Riemann et les statistiques des matrices aléatoires, Nicholas Katz et Peter Sarnak ont étendu cette correspondance à des familles entières de fonctions L et établi un cadre théorique systématique pour comprendre leur comportement statistique [64, 65]. Leur intuition novatrice a révélé que différentes familles de fonctions L présentent des propriétés statistiques universelles régies par l'un des groupes de matrices classiques – unitaire $U(N)$, orthogonal $O(N)$ ou symplectique $Sp(2N)$ – le type de symétrie spécifique étant déterminé par la structure arithmétique et géométrique de la famille elle-même [64, 42]. La conjecture de densité de Katz-Sarnak prédit que, lorsque les conducteurs analytiques des fonctions L d'une famille tendent vers l'infini, la distribution de leurs zéros normalisés de basse énergie au voisinage du point critique $s = 1/2$ converge vers les limites d'échelle des valeurs propres regroupées autour de 1 dans l'ensemble de matrices aléatoires correspondant [64, 65, 66]. De façon remarquable, ils ont démontré rigoureusement leurs conjectures pour des familles de fonctions L sur des corps finis en reliant les zéros aux valeurs propres de Frobenius et en appliquant le théorème d'équirépartition de Deligne [64], [51], [40], [41], fournissant ainsi la première vérification complète de l'universalité des matrices aléatoires dans un contexte de théorie des nombres. Ce travail a non seulement unifié des phénomènes auparavant disparates sous un seul cadre conceptuel, mais a également fourni de nouveaux outils puissants pour étudier les problèmes classiques de la théorie analytique des nombres, de la distribution des nombres premiers à l'arithmétique des courbes elliptiques.

3.4.5 Matrices de moments et unitaires (Keating–Snaith)

On conjecture (voir [33]) que le comportement asymptotique des moments de la fonction zêta est de la forme :

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(1/2 + it)|^{2k} dt \sim c_k (\log T)^{k^2}$$

Pour une certaine constante c_k , Hardy et Littlewood l'ont démontré en 1918 pour $k = 1$, et Ingham en 1926 [62]. Pour $k = 2$, on a $c_1 = 1$ et $c_2 = (2\pi^2)^{-1}$. Ce sont les seules valeurs de k pour lesquelles cette conjecture est démontrée, et pendant longtemps, aucune valeur conjecturale de c_k n'a été proposée pour aucune autre valeur de k . Conrey et Ghosh [35] ont conjecturé en 1992 la

valeur de c_k pour $k = 3$, et Conrey et Gonek [36] ont conjecturé celle pour $k = 4$ en 1998. Ces deux conjectures sont de la forme $c_k = a_k g_k / (k^2!)$, où, comme expliqué ci-dessous, a_k est un facteur arithmétique bien connu, mais les constantes $g_3 = 42$ et $g_4 = 24024$ restaient inconnues. Lors de la conférence de Vienne de 1998 au sujet de HR, Keating et Snaith [66], [67] ont annoncé leur découverte majeure : l'utilisation de la théorie des matrices aléatoires pour estimer la valeur de g_k . Leur intuition novatrice résidait dans la reconnaissance du fait que la constante $f_k = g_k / (k^2!)$ découle naturellement de la théorie des matrices aléatoires. La conjecture générale prend alors la forme $c_k = a_k f_k$ où

- f_k provient de la théorie des matrices aléatoires (le moment d'ordre k de $|\det(I - U)|^2$ pour U une matrice unitaire aléatoire)
- a_k est un facteur arithmétique qui capture la complexité arithmétique par le biais d'un produit eulérien,

$$a_k = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma(m+k)}{m! \Gamma(k)}\right)^2 p^{-m}$$

La partie matricielle aléatoire f_k peut être exprimée comme suit :

$$f_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!} \implies g_k = (k^2)! f_k$$

Cette séparation révèle un principe remarquable : le comportement “universel” découle de la théorie des matrices aléatoires, tandis que les spécificités arithmétiques de la fonction zêta sont encodées séparément dans a_k . Ceci a ouvert un nouveau paradigme d'utilisation des modèles de matrices aléatoires pour prédire des résultats de théorie des nombres, étendu ultérieurement à d'autres fonctions L et à leurs dérivées [38, 50, 104].

3.5 Géométrie non-commutative

3.5.1 Formule de trace de Connes

Connes a développé une formule de trace dans le contexte de la géométrie non commutative⁸ qui retrouve la formule explicite de Weil pour les zéros de $\zeta(s)$ et des fonctions L [17, 18]. L'idée-clé est de travailler avec l'espace non commutatif des classes d'adèles \mathbb{A}/\mathbb{Q}^* , où \mathbb{A} est l'anneau des adèles. Sur cet espace, il existe une action naturelle du groupe des classes d'idèles $GL(\mathbb{A})/\mathbb{Q}^* \simeq \hat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{R}_+^*$. La formule de la trace établit la relation suivante :

- Côté spectral : contributions des zéros des fonctions L à Grössen-caractère.
- Côté géométrique : contributions des places de \mathbb{Q} .

Au départ, la formule de trace a été énoncée pour les corps globaux généraux comme une conjecture équivalente à la validité de l'analogie de l'équation de Riemann pour toutes les fonctions L à Grössen-caractère. Cependant, la forme semi-locale de la formule de trace a déjà été démontrée dans [17], et elle admet comme corollaires simples les versions globales permettant la présence de zéros non critiques [78] (voir aussi [18]).

8. L'origine provient d'un système de mécanique statistique quantique présentant des transitions de phase et ayant la fonction zêta de Riemann comme fonction de partition [8]

Ceci fournit une réalisation spectrale où les zéros apparaissent sous la forme d'un spectre d'absorption, ce qui explique le signe moins dans les formules explicites par rapport à la formule de trace de Selberg.

Ces approches visent à géométriser l'équation de Riemann à l'aide d'outils issus des algèbres d'opérateurs et de la géométrie différentielle non commutative. Un quotient ergodique tel que l'espace des classes d'adèles \mathbb{A}_K/K^\times d'un corps de nombres K est encodé par le produit vectoriel de l'algèbre des fonctions sur \mathbb{A}_K par l'action de K^\times . Les réalisations spectrales mentionnées plus haut font intervenir l'homologie de Hochschild du produit vectoriel de l'algèbre de Bruhat-Schwartz, tandis que la topologie de \mathbb{A}_K/K^\times est encodée par le produit vectoriel des C^* -algèbres. Un résultat récent [13] montre que cet encodage topologique est fidèle : des corps de nombres non isomorphes donnent des C^* -algèbres non isomorphes.

3.5.2 Nœuds, nombres premiers et théorie des corps de classes

Pour le corps global $K = \mathbb{Q}$, la projection de l'espace des classes d'adèles :

$$\pi : Y_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A} / \hat{\mathbb{Z}}^* = X_{\mathbb{Q}}$$

sur le secteur $X_{\mathbb{Q}}$ correspondant à ζ illustre l'analogie mentionnée précédemment, en théorie des corps de classes, entre les nœuds et les nombres premiers. À chaque nombre premier p correspond une orbite périodique $C_p \subset X_{\mathbb{Q}}$ de longueur $\log p$. Soit alors $\text{Frob}_p \in \pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec}(\mathbb{F}_p))$ le générateur canonique du groupe fondamental étale et $\mathbb{Z}_{(p)}$ l'anneau \mathbb{Z} localisé en p . On a alors [26],

- (i) L'image réciproque $\pi^{-1}(C_p) \subset Y_{\mathbb{Q}}$ de l'orbite périodique C_p est canoniquement isomorphe au tore d'application de la multiplication par $r^* \{\text{Frob}_p\}$ dans le groupe fondamental étale abélianisé $\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)})^{ab}$.
- (ii) L'isomorphisme canonique en (i) est équivariant pour l'action du groupe des classes d'idèles.
- (iii) La monodromie du C_p périodique dans $\pi^{-1}(C_p) \subset Y_{\mathbb{Q}}$ est égale à l'application naturelle

$$r^* : \pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec} \mathbb{F}_p) \rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec} \mathbb{Z}_{(p)})^{ab}$$

et détermine la relation qui lie le nombre premier p à tous les autres nombres premiers.

Ce résultat montre que l'espace des classes d'adèles joue le rôle d'un homologue, en théorie des corps de classes, des revêtements étales abéliens intervenant dans la théorie de Grothendieck.

De façon remarquable, l'espace $X_{\mathbb{Q}}$ admet une incarnation en théorie des topos comme site d'échelle naturellement muni d'un faisceau structural de caractéristique un (voir l'article [20] et ses références).

3.6 Fonctions L p -adiques et fonctions L motiviques

3.6.1 Fonctions L p -adiques et théorie d'Iwasawa

Kubota et Leopoldt ont construit des analogues p -adiques de la fonction zêta de Riemann, qui sont des fonctions analytiques p -adiques interpolant des valeurs particulières de la fonction zêta classique. Pour tout nombre premier p , la fonction zêta p -adique $\zeta_p(s)$ est une fonction analytique p -adique sur \mathbb{Z}_p telle que :

$$\zeta_p(1 - k) = (1 - p^{k-1})\zeta(1 - k)$$

pour les entiers positifs k . La théorie d'Iwasawa étudie ces fonctions dans des tours d'extensions cyclotomiques, les reliant aux groupes de classes d'idéaux et aux unités. La conjecture principale de la théorie d'Iwasawa (démontrée par Mazur-Wiles) relie les fonctions L p -adiques aux groupes de Selmer des représentations de Galois. Bien qu'il n'existe pas d'analogue p -adique direct de HR, la croissance et les zéros des fonctions L p -adiques sont intimement liés à des phénomènes arithmétiques profonds.

3.6.2 Fonctions L motiviques et conjectures de Bloch–Kato

Ces conjectures d'une grande portée relient des valeurs particulières des fonctions L à des invariants arithmétiques. Pour un motif M muni d'une fonction L , $L(M, s)$, les conjectures prédisent que :

- l'ordre d'annulation de $L(M, s)$ aux points entiers est égal au rang de certains K -groupes ou groupes de Selmer ;
- le coefficient dominant est lié aux régulateurs, aux périodes et aux nombres de Tamagawa.

Des cas particuliers incluent la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer (pour les courbes elliptiques) et les conjectures de Beilinson. Celles-ci inscrivent l'arithmétique de Riemann dans un contexte arithmétique plus large où les zéros des fonctions L encodent des informations géométriques et arithmétiques. Les conjectures suggèrent que l'arithmétique de Riemann fait partie d'un vaste réseau de relations entre l'analyse, l'algèbre et la géométrie.

3.7 Mathématiques computationnelles et expérimentales

3.7.1 Calculs en haute précision

La vérification numérique de l'équation de Riemann-Siegel a une histoire riche :

- Riemann (1859) : calcul des premiers zéros,
- Gram (1903) : 15 zéros,
- Backlund (1914) : 79 zéros,
- Hutchinson (1925) : 138 zéros,
- Titchmarsh (1935-1936) : 1 041 zéros à l'aide de la formule de Riemann-Siegel,
- Turing (1950) : vérification de 1 104 zéros à l'aide du Manchester Mark 1,
- Lehmer (1956) : 25 000 zéros à l'aide d'ordinateurs électroniques,
- Rosser, Yohe, Schoenfeld (1968) : 3 500 000 zéros,
- van de Lune, te Riele, Winter (1986) : 1 500 000 000 zéros,
- Gourdon et Demichel (2004) : 10^{13} premiers zéros
- Platt (2021) : vérification jusqu'à une hauteur de 3×10^{12} , [87].

Les calculs modernes utilisent la formule de Riemann-Siegel avec des bornes d'erreur sophistiquées et la méthode de Turing pour une vérification rigoureuse. La publication en 1988 de l'algorithme d'Odlyzko-Schönhage a constitué une avancée méthodologique majeure. Ces calculs massifs apportent des preuves irréfutables de l'hypothèse de Riemann-Siegel tout en permettant de tester l'existence de phénomènes exceptionnels [44], [63].

4 Formulations équivalentes

Alors que les sections précédentes ont passé en revue les théories élaborées dans le cadre de l'hypothèse de Riemann, il existe une tradition parallèle de recherche de formulations équivalentes de HR elle-même. Ces reformulations, allant de la théorie élémentaire des nombres à l'analyse fonctionnelle, révèlent les liens profonds qui unissent l'hypothèse de Riemann aux mathématiques et suggèrent parfois de nouvelles pistes de recherche. Ces formulations équivalentes sont si nombreuses qu'un livre entier leur est consacré. L'intérêt principal de toutes ces formulations réside dans le fait que les formulations élémentaires, comme le critère de Robin ou le critère de Lagarias, démontrent qu'au niveau logique, l'hypothèse de Riemann possède un statut logique très particulier, qui sera examiné plus en détail ci-dessous.

4.1 Critère de positivité de Weil

L'hypothèse de Riemann (HR) est équivalente à la positivité de certaines distributions construites à partir des zéros, ce qui la relie à l'approche de Weil par une formule explicite.

La difficulté de résoudre l'hypothèse de Riemann dans sa formulation analytique est souvent attribuée principalement au nombre infini de termes du produit eulérien.

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (8)$$

Cependant, contrairement à cette croyance répandue, il existe une propriété $P(n)$, ne faisant intervenir que les facteurs d'Euler pour les nombres premiers inférieurs à n , et dont la validité pour tout n est équivalente à HR.

Cette propriété découle du critère de positivité de Weil, qui fait intervenir la forme quadratique QW définie à l'aide des formules explicites de Riemann-Weil appliquées à des fonctions-tests à support dans un intervalle symétrique compact. Après une légère modification des notations, la transformée de Mellin devient la transformée de Fourier du groupe \mathbb{R}_+^* dont le dual de Pontryagin est identifié au groupe additif \mathbb{R} , et la formule explicite prend la forme suivante, similaire à (4), (5) mais avec des notations adaptées à l'algèbre de convolution involutive du groupe \mathbb{R}_+^* .

$$\begin{aligned} \widehat{f}\left(\frac{i}{2}\right) - \sum_{\frac{1}{2}+is \in Z} \widehat{f}(s) + \widehat{f}\left(-\frac{i}{2}\right) &= \sum_v W_v(f) \\ \widehat{f}(s) &:= \int_0^\infty f(x) x^{-is} d^*x, \quad d^*x = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

où les contributions locales sont maintenant données par

$$W_p(f) := (\log p) \sum_{m=1}^\infty p^{-m/2} \left(f(p^m) + f(p^{-m}) \right) \quad (9)$$

et pour la place archimédienne

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}}(f) &:= (\log 4\pi + \gamma) f(1) \\ &+ \int_1^\infty \left(f(x) + f(x^{-1}) - 2x^{-1/2} f(1) \right) \frac{x^{1/2}}{x - x^{-1}} d^*x \end{aligned} \quad (10)$$

Le résultat-clé d'André Weil est l'équivalence

$$RH \iff \sum_v W_v(g * g^*) \leq 0, \quad \forall g, \hat{g}\left(\pm \frac{i}{2}\right) = 0$$

où $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ est une fonction lisse à support compact et $g^*(x) := \bar{g}(x^{-1})$.

Le point-clé de cette équivalence est que la somme à droite du symbole d'équivalence, évaluée sur une fonction test g à support compact, ne fait intervenir qu'un nombre fini de nombres premiers (puisque W_p s'annule sur les fonctions à support dans (p^{-1}, p)). Ainsi, bien que l'hypothèse de Riemann porte sur la distribution asymptotique des nombres premiers, la formulation équivalente n'en fait intervenir qu'un nombre fini à la fois. Dans [111], H. Yoshida a démontré le résultat suivant (Théorème 1 de son article).

Pour toute fonction lisse et définie positive f avec support dans l'intervalle $(1/2, 2)$ et dont la transformée de Fourier s'annule en $\pm \frac{i}{2}$, on a : $W_\infty(f) \geq 0$ où $W_\infty := -W_{\mathbb{R}}$.

La démonstration consiste en une analyse numérique de la positivité de la fonctionnelle de Weil W_∞ restreinte à l'intervalle $(\frac{1}{2}, 2)$, et ne fournit donc aucune justification conceptuelle à cette positivité qui pourrait se vérifier en présence de nombres premiers.

4.2 Critère de Beurling–Nyman

Cette remarquable reformulation de l'hypothèse de Riemann (Beurling 1955, Nyman 1950) stipule que HR est équivalente à un résultat concernant la densité dans $L^2(0, 1)$ des combinaisons linéaires $\sum_1^n c_\nu \rho_{\theta_\nu}$, $0 < \theta_\nu \leq 1$, $\sum_1^n c_\nu \theta_\nu = 0$ où :

$$\rho_\theta(x) = \left\{ \frac{\theta}{x} \right\} \quad \text{pour } x \in (0, 1)$$

et où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y . Ceci transforme l'égalité de Riemann en un problème de complétude en analyse fonctionnelle. Des travaux ultérieurs de Báez-Duarte et d'autres ont fourni des versions quantitatives, montrant que le taux d'approximation dans cette façon de voir est lié à la distribution des zéros hors de la droite critique.

4.3 Critère de Li

Xian-Jin Li (1997) a démontré [74] que l'hypothèse de Riemann (HR) est équivalente à la positivité des nombres :

$$\lambda_n = \sum_\rho \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^n \right)$$

pour tout $n \geq 1$, où la somme porte sur tous les zéros non triviaux ρ de $\zeta(s)$.

4.4 Formulations en théorie élémentaire des nombres

En 1913, Grönwall a démontré dans son article “*Some asymptotic expressions in the theory of numbers*” que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = e^\gamma, \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

où $\sigma(n)$ est la fonction somme des diviseurs et γ est la constante d’Euler-Mascheroni. S’appuyant sur les travaux de Grönwall, Srinivasa Ramanujan a établi un lien crucial entre la fonction $\sigma(n)$ et l’hypothèse de Riemann dans ses travaux sur les nombres hautement composés. Ramanujan a démontré que si l’hypothèse de Riemann est vraie, alors l’inégalité $\sigma(n)/n < e^\gamma \log \log n$ est vérifiée pour tout entier positif n suffisamment grand. Ceci constituait le premier lien direct entre la validité de l’hypothèse de Riemann et les bornes de certaines fonctions arithmétiques.

4.4.1 Critère de Robin (1984)

Guy Robin a démontré que l’hypothèse de Riemann (HR) est équivalente à l’inégalité suivante :

$$\sigma(n) < e^\gamma n \log \log n$$

pour tout $n > 5040$, où $\sigma(n)$ est, comme précédemment, la fonction somme des diviseurs et γ est la constante d’Euler-Mascheroni. Ce résultat remarquable traduit l’hypothèse de Riemann analytique-complexe en termes purement arithmétiques.

4.4.2 Critère de Lagarias (2002)

Jeffrey Lagarias a affiné le critère de Robin sous la forme :

$$HR \iff \sigma(n) < H_n + e^{H_n} \log H_n, \quad \forall n \geq 1$$

où $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$ est le n -ième nombre harmonique. Cette formulation présente l’avantage esthétique d’être valable pour tout entier positif.

La reformulation de l’hypothèse de Riemann comme un énoncé universel sur les propriétés arithmétiques décidables la place précisément dans la classe des énoncés que Hilbert espérait considérer comme “démonstrables” s’ils étaient vrais, et que les théorèmes d’incomplétude de Gödel identifient comme potentiellement “vrais mais indémonstrables” ! Les résultats de Chaitin en théorie algorithmique de l’information démontrent que cette indémonstrabilité devient de plus en plus fréquente à mesure que la complexité des énoncés augmente. Ce lien met en lumière les limitations fondamentales des systèmes mathématiques formels et fournit un exemple frappant de la façon dont même des problèmes centraux en théorie des nombres recoupent les questions les plus profondes sur la nature de la vérité et de la démonstration mathématiques.

Les travaux de Chaitin révèlent que, d’un point de vue informationnel, la vérité mathématique et la démontrabilité opèrent dans des domaines fondamentalement différents. La plupart des vérités mathématiques ont une complexité descriptive élevée et contiennent plus d’informations que celles qui peuvent être extraites de systèmes d’axiomes finis par des processus déductifs. Cela crée un vaste paysage d’énoncés vrais qui restent à jamais hors de portée de la démonstration formelle, les énoncés démontrables ne représentant qu’une fraction infinitésimale de la réalité mathématique à mesure que la complexité augmente.

L'estimation de la complexité algorithmique du critère de Lagarias révèle des obstacles computationnels fondamentaux à la vérification de l'hypothèse de Riemann par un calcul arithmétique direct. La complexité dominante provient des exigences de factorisation des entiers pour le calcul de la fonction somme des diviseurs, ce qui rend certaines vérifications impossibles à effectuer en temps polynomial pour des entiers quelconques. Le calcul des nombres harmoniques et l'évaluation des fonctions transcendantes ajoutent des complexités supplémentaires qui alourdissent le coût de calcul global.

Ces limitations de complexité soulignent à la fois l'élégance et la difficulté de calcul du critère de Lagarias comme méthode de vérification de l'hypothèse de Riemann. Bien que ce critère parvienne à transformer un énoncé analytique-complexe en opérations arithmétiques élémentaires, le coût de calcul de la vérification reflète la grande complexité du problème mathématique sous-jacent. L'analyse démontre comment la théorie de la complexité algorithmique apporte des éclairages essentiels sur la faisabilité pratique des méthodes de vérification mathématique et sur la relation fondamentale entre vérité mathématique et ressources de calcul.

5 Une lettre au Professeur Bernhard Riemann

J'ai été invité à donner une conférence à Varèse, le 4 juin 2025, à la Villa Toeplitz, qui abrite l'École internationale de mathématiques Riemann (RIMS). Afin de préparer cette conférence, j'ai effectué, deux jours auparavant, un pèlerinage à Selasca, lieu du décès de Riemann le 20 juillet 1866.

Compte tenu du lieu où je devais donner cette conférence, je me suis lancé le défi suivant :

*Que pourrais-je bien dire à Riemann pour le surprendre
et qui lui donnerait l'assurance que son hypothèse est vraie ?*

Je vais donc lui écrire une lettre. Je l'appellerai "Maître". Il est impératif, bien sûr, d'éviter d'employer des notions mathématiques qui lui sont inconnues ou difficiles à comprendre pour lui. Je me limiterai donc à celles qu'il a utilisées dans ses travaux. Après cette remarque préliminaire, la seconde partie de la lettre expose les éléments véritablement nouveaux.

Au Professeur Bernhard Riemann

La belle formule que vous avez démontrée dans votre article, à savoir celle qui permet de calculer le nombre de nombres premiers inférieurs à x en fonction des zéros de la fonction zêta, a malheureusement été mal écrite dans les manuels, révélant ainsi une profonde incompréhension du terme du milieu de la formule. Soit $\pi'(x)$ le nombre de nombres premiers strictement inférieurs à x , auquel on ajoute $\frac{1}{2}$ lorsque x est premier, et vous avez trouvée pour la fonction de comptage

$$f(x) := \sum \frac{1}{n} \pi' \left(x^{\frac{1}{n}} \right),$$

la formule suivante impliquant la fonction logarithme intégral $\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}$,

$$f(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\alpha} \left(\text{Li} \left(x^{\frac{1}{2} + \alpha i} \right) + \text{Li} \left(x^{\frac{1}{2} - \alpha i} \right) \right) + \int_x^{\infty} \frac{1}{t^2 - 1} \frac{dt}{t \log t} - \log 2 \quad (11)$$

Vous avez fait preuve de beaucoup de prudence à la fin de votre article en traitant des fonctions multivaluées, mais le langage mathématique a évolué et, de nos jours, on n'utilise que des fonctions ayant une signification univalente définie, tandis que l'utilisation de fonctions multivaluées n'est plus couramment admise.

Dans les manuels scolaires classiques, par exemple dans le livre classique d'Edwards,⁷ le terme du milieu s'écrit comme une somme de la fonction logarithme intégral Li évaluée sur x^{ρ} , où les ρ sont les zéros non triviaux de ζ .

Or, il est évident que cette somme est absurde, car x à la puissance ρ reste inchangé si l'on remplace ρ par $\rho + \frac{2\pi i n}{\log x}$, où n est un entier quelconque. La constance de $\text{Li}(x^{\rho})$ sur cette progression arithmétique implique donc que la somme infinie n'a aucun sens, car elle comprend une infinité de répétitions d'un même terme, puisque les nombres complexes x^{ρ} s'accumulent à l'infini, au moins sur le cercle de rayon $x^{\frac{1}{2}}$. En fait, von Mangoldt a donné, plusieurs années après votre article, une démonstration détaillée de votre théorème, et il a été plus rigoureux, dans une certaine mesure, dans l'écriture de la formule... puisqu'au lieu de traiter Li , il considère une fonction univalente bien définie $\text{Ei}(z) = \text{Li}(\exp(z))$ de la variable z (plutôt que $\exp(z)$). Il démontre ensuite votre formule en remplaçant le terme $\sum \text{Li}(x^{\rho})$ par $\sum \text{Ei}(\rho \log x)$.

Cela étant dit, il ressort clairement de votre formule que vous connaissiez ce que l'on appelle aujourd'hui les formules explicites de Guinand-Weil. La nouveauté dans cette formule, qui ne vous surprendra pas, est que l'on considère, au lieu de la fonction $\frac{1}{\log u}$ que vous utilisez, une fonction test arbitraire $\phi(u)$ appliquée aux puissances des nombres premiers, et l'on écrit une égalité qui fait intervenir ce que l'on appelle aujourd'hui la transformée de Mellin⁹ de cette fonction $\phi(u)$ évaluée sur les zéros non triviaux de la fonction zêta. On obtient ainsi une égalité qui ne constitue pas une généralisation de votre formule, car celle-ci va plus loin que les formules explicites classiques de Guinand-Weil, votre fonction test $\frac{1}{\log u}$ étant singulière en $u = 1$. Un point remarquable de ces formules explicites est que si la fonction test $\phi(u)$ s'annule en dehors d'un intervalle fini $[1, x]$, alors seuls un nombre fini de nombres premiers interviennent dans son calcul, ceux inférieurs à x . Or, c'est précisément le cas de votre formule, qui fait intervenir la

9. La transformée de Mellin de $\phi(u)$ est définie par $\mathcal{M}(\phi)(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} \phi(u) du$.

fonction égale à $\phi(u) = \frac{1}{\log u}$ dans l'intervalle $[1, x]$ et qui s'annule en dehors de cet intervalle ; cela ne vous surprendra donc pas.

Permettez-moi, Maître, de vous faire part d'un fait qui, à mon sens, corrobore votre hypothèse. Le voici : je vais concevoir un procédé qui, en utilisant seulement quelques nombres premiers, me permettra d'atteindre les premiers zéros non triviaux de votre fonction zêta avec une précision remarquable. Que signifie "quelques nombres premiers" ? Prenons un exemple concret : imaginons que je ne connaisse pas les nombres premiers supérieurs à 13. Je ne connais donc que 2, 3, 5, 7, 11 et 13. De prime abord, il semble que pour appréhender les zéros de la fonction zêta, il soit nécessaire de considérer tous les nombres premiers, puisqu'ils interviennent tous dans le produit eulérien qui la définit. Il paraît donc assez invraisemblable qu'en tronquant ce produit eulérien, c'est-à-dire en ne considérant que les termes contenant les nombres premiers inférieurs à 13, on puisse obtenir la moindre indication sur les zéros de la fonction zêta.

Permettez-moi donc de décrire le processus en utilisant uniquement des notions qui vous sont familières. À partir de ces nombres premiers, 2, 3, etc., jusqu'à 13, on construit une forme quadratique. Cette forme quadratique est semblable à celle que vous avez utilisée lors de l'application du principe de Dirichlet pour démontrer le théorème de transformation conforme. Il s'agit d'une forme quadratique définie sur l'espace de dimension infinie des fonctions $\phi(u)$ d'une variable réelle positive, qui s'annulent en dehors de l'intervalle $[1, 13]$. La valeur $Q(\phi)$ de la forme quadratique est obtenue en appliquant la formule explicite à la fonction $\psi(v) = \int \phi(u)\phi(uv)\frac{du}{u}$. Ainsi, puisque la fonction ϕ s'annule en dehors de l'intervalle $[1, 13]$, la fonction ψ s'annule en dehors de l'intervalle $\left[\frac{1}{13}, 13\right]$ et il n'est pas nécessaire d'utiliser toute puissance première autre que 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13 pour calculer $Q(\phi)$, je sais démontrer qu'il existe une fonction $\eta(u)$ qui minimise la forme quadratique $Q(\phi)$ lorsque $\int \phi(u)^2 \frac{du}{u} = 1$. La démonstration de l'existence de cette fonction est tout à fait similaire à celle donnée par Hilbert en 1900 dans son article "Über das Dirichletsche Prinzip" pour le principe de Dirichlet. Je calcule ensuite la transformée de Mellin de la fonction $\eta(u)$. Je sais également démontrer¹⁰ que les zéros de cette transformée de Mellin se situent sur la droite critique (normalisée ici comme la droite imaginaire). Ceci est prouvé modulo une condition d'unicité du minimum.¹¹

Le fait étonnant que je souhaite vous signaler est que, lorsqu'on calcule – à l'aide de machines

10. Voir §6.1.

11. La preuve utilise une généralisation d'un théorème de Caratheodory-Fejer sur les matrices de Toeplitz, obtenu en 1911, il faut supposer que la plus petite valeur propre de la forme quadratique est simple et paire.

de calcul modernes bien plus puissantes que celles disponibles à votre époque – les zéros de la transformée de Mellin de $\eta(u)$, par exemple ses 50 premiers zéros, on constate une incroyable coïncidence avec les zéros non triviaux de η . Par exemple, pour le premier zéro, on observe une concordance sur 54 décimales, et ainsi de suite. Le nombre de décimales concordantes diminue progressivement, et lorsqu'on atteint le cinquantième zéro, seules quelques décimales concordent.

J'ai calculé ces différences (limite supérieure) entre les valeurs calculées à l'aide des nombres premiers inférieurs à 13 et les valeurs réelles des zéros de zêta que je présente ci-après :

Cela signifie que nous maîtrisons parfaitement vos zéros, sans jamais faire intervenir l'infinité de l'ensemble de tous les nombres premiers. De plus, nous savons a priori que tous les zéros de la transformée de Mellin de $\eta(u)$ se trouvent sur la droite critique.

Ce que nous ignorons, c'est si lorsque nous augmentons la limite supérieure, qui était ici $x = 13$, l'ensemble des zéros correspondant convergera vers les zéros de ζ . Ceci n'est pas démontré à ce stade. En revanche, il semble que la raison abstraite de la véracité de votre conjecture soit désormais accessible, puisque nous savons que les zéros des transformées de Mellin des vecteurs propres minimaux η_x sont purement imaginaires, et nous nous attendons à ce que η_x converge vers la fonction dont la transformée de Mellin est votre fonction $\Xi(it)$. Le résultat découlerait alors du théorème de Hurwitz, qui implique que tous les zéros de la limite d'une suite convergente de fonctions holomorphes dont les zéros sont sur une droite fixe restent sur cette droite.

Différences entre les valeurs (en utilisant les nombres premiers ≤ 13)

2.60179×10^{-55} ,	4.80071×10^{-52} ,	4.43756×10^{-50} ,	3.89903×10^{-47} ,	7.59453×10^{-46} ,
1.13198×10^{-43} ,	1.07245×10^{-41} ,	1.2694×10^{-40} ,	4.40141×10^{-38} ,	4.24869×10^{-37} ,
5.86724×10^{-36} ,	3.24443×10^{-34} ,	2.44517×10^{-32} ,	9.02026×10^{-32} ,	5.13539×10^{-30} ,
7.04142×10^{-29} ,	6.47754×10^{-28} ,	4.96772×10^{-27} ,	5.86016×10^{-25} ,	3.76751×10^{-24} ,
1.03779×10^{-23} ,	3.52722×10^{-22} ,	3.03977×10^{-21} ,	5.66201×10^{-20} ,	1.41755×10^{-19} ,
2.19821×10^{-18} ,	6.31599×10^{-17} ,	1.42037×10^{-16} ,	4.34328×10^{-16} ,	4.47113×10^{-15} ,
7.01522×10^{-14} ,	3.81989×10^{-13} ,	5.99581×10^{-13} ,	4.26414×10^{-11} ,	1.10653×10^{-10} ,
1.95651×10^{-10} ,	5.20728×10^{-10} ,	2.05031×10^{-9} ,	3.42274×10^{-8} ,	2.10931×10^{-7} ,
2.23714×10^{-7} ,	5.95608×10^{-7} ,	5.77737×10^{-6} ,	0.000141389 ,	0.000556111 ,
0.000720794 ,	0.000314865 ,	0.0209081 ,	0.00313565 ,	0.00212727

Avec respect et admiration,

Alain Connes

6 La stratégie et les prochaines petites étapes

Nous expliquons d'abord dans le §6.1 le résultat général qui fournit une multitude de fonctions entières dont tous les zéros appartiennent à la droite réelle.

L'objectif est ensuite de montrer que, lorsque la borne supérieure x (qui valait $x = 13$ ci-dessus) tend vers l'infini, les vecteurs propres minimaux η_x convergent au sens approprié, de sorte que leurs transformées de Fourier, pour la dualité entre \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} , convergent uniformément sur les sous-ensembles compacts vers la fonction holomorphe que Riemann a introduite comme fonction Ξ dans son article. En fait, nous suivrons ses traces et considérerons la formule explicite qu'il a donnée pour la fonction k dont la transformée de Fourier est $\Xi(t)$. Nous allons réécrire dans le §6.2 cette fonction k comme l'image, par une application de sommation \mathcal{E} , d'une combinaison linéaire h de deux fonctions de Hermite h_0, h_4 . Il s'agit alors de montrer la convergence des vecteurs propres minimaux η_x vers la fonction $\mathcal{E}(h)$. En fait, il faut d'abord recentrer η_x sur $\theta_x(u) = \eta_x(x^{1/2}u)$, dont le support est $[x^{-1/2}, x^{1/2}]$. Le plan, afin d'atteindre notre objectif, consiste à décomposer cet objectif en plusieurs petites étapes. Dans la deuxième étape, au §6.3, on introduit, étant donné $\lambda > 1$, les fonctions d'onde sphéroïdales prolate qui donnent une adaptation $h_{n,\lambda}$ des fonctions hermitiennes h_n aux fonctions dont le support se trouve dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. Les fonctions $h_{n,\lambda}$ sont des fonctions propres d'une modification de l'opérateur de Hermite (14), l'opérateur d'onde prolate PW_λ de (15), obtenues en ajoutant à l'opérateur de Hermite \mathbf{H} seulement les multiples du carré de la mise à l'échelle, de sorte que la somme commute avec la projection orthogonale sur les fonctions à support dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. Par construction, PW_λ admet deux points singuliers réguliers à la frontière $\pm\lambda$ de l'intervalle et une singularité irrégulière à l'infini. La troisième étape, dans le §6.4, consiste à formuler une approximation éclairée du vecteur propre minimal θ_x en utilisant le même procédé que dans le cas simple du §6.2. On remplace ainsi les fonctions de Hermite h_0, h_4 par leurs localisations $h_{0,\lambda}, h_{4,\lambda}$, pour $\lambda = x^{1/2}$, et on procède à l'application de sommation \mathcal{E} sur la combinaison linéaire de ces deux fonctions dont l'intégrale est nulle. On obtient ainsi une fonction k_λ qui approche θ_x sur l'intervalle $[x^{-1/2}, x^{1/2}]$. Dans le §6.5, on montre que, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, les transformées de Fourier \hat{k}_λ convergent vers la fonction Ξ de Riemann, uniformément sur les sous-bandes fermées du voisinage ouvert de largeur 1 de la droite réelle. Enfin, dans le §6.6, on indique les étapes finales manquantes.

6.1 La transformation de Fourier de θ_x a tous ses zéros sur la droite réelle

La démonstration de ce résultat découle d'un théorème présenté dans un article co-écrit avec Walter van Suijlekom, intitulé “*Quadratic forms, real zeros and echoes of spectral action*” (réf. [32]). L'énoncé précis est le suivant :

Théorème 6.1 *Soit $L > 0$, \mathcal{D} une distribution réelle sur l'intervalle $[0, L]$ et $\tilde{\mathcal{D}}$ la distribution paire associée sur $[-L, L]$. Supposons que la forme quadratique à noyau de Schwartz $\tilde{\mathcal{D}}(x - y)$ définisse un opérateur auto-adjoint minoré sur $L^2([-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}])$, et que le minimum de son spectre soit une valeur propre simple et isolée, associée à une fonction propre paire η . Alors tous les zéros de la fonction entière $\hat{\eta}(z)$, $z \in \mathbb{C}$, transformée de Fourier de η , se trouvent sur la droite réelle.*

La démonstration de ce théorème repose sur la forme particulière de la matrice quadratique dans la base trigonométrique orthonormée, sur la construction, pour les matrices finies de cette forme

particulière, d'un opérateur auto-adjoint et sur le théorème de Hurwitz mentionné précédemment, qui assure le passage à la limite lorsque la taille des matrices tend vers l'infini. La validité du résultat sur les zéros de la transformée de Fourier pour des troncatures finies [32] joue un rôle-clé dans les calculs numériques [Il est utilisé pour la troncature trigonométrique à $N = 100$ dans le calcul présenté dans la lettre.] et permet d'approximer les zéros de $\hat{\eta}(z)$ par le spectre d'une perturbation de rang un de l'opérateur de Dirac périodique, obtenu à l'aide du noyau de Dirichlet analysé par Riemann dans [91].

6.2 La fonction Ξ de Riemann et les fonctions de Hermite

Riemann adopte la notation suivante

$$\psi(x) := \sum_1^\infty e^{-n^2 \pi x}$$

Il écrit ensuite, avec $\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, $\Xi(t) := \xi(s)$ pour $s = \frac{1}{2} + it$, l'égalité¹²

$$\Xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx$$

Il obtient alors, en utilisant l'égalité $k(u) = k(u^{-1})$ d'après la formule de Poisson, où

$$k(u) := u^{1/2} \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty n^2 u^2 (2\pi n^2 u^2 - 3) e^{-\pi n^2 u^2}$$

que $\Xi(t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $k(u)$:

$$\Xi(t) = 2 \int_1^\infty k(u) \cos(t \log u) d^*u = \int_0^\infty k(u) u^{it} d^*u,$$

De plus, en introduisant la notation :

$$\mathcal{E}(f)(u) := u^{1/2} \sum_1^\infty f(nu) \tag{12}$$

on a

$$k(u) = \mathcal{E}(h)(u), \quad h(u) = \frac{\pi}{2} u^2 (2\pi u^2 - 3) e^{-\pi u^2}. \tag{13}$$

La fonction $h(u)$ peut être caractérisée comme suit. On considère l'opérateur de Hermite (oscillateur harmonique) :

$$\mathbf{H}f(u) := -f''(u) + 4\pi^2 u^2 f(u) \tag{14}$$

Soient h_n les fonctions propres normalisées associées aux valeurs propres de la forme $2\pi(1 + 2n)$. Ces fonctions sont paires pour n pair et invariantes par transformée de Fourier pour les valeurs de n qui sont des multiples de 4.

Fait 6.2 *La fonction Ξ de Riemann est la transformée de Fourier de $k = \mathcal{E}(h)$ où h est, à un scalaire multiplicatif près, la seule combinaison linéaire de h_0, h_4 dont l'intégrale est nulle.*⁸

12. La notation traditionnelle pour cette fonction est $\Xi(t)$ au lieu de la notation $\xi(t)$ utilisée par Riemann.

6.3 Les fonctions d'onde prolate entrent en scène

L'étape suivante consiste à introduire une famille de fonctions dont le rôle crucial dans la transmission du signal a été mis en évidence par Slepian, Pollak et Landau aux Bell Labs dans les années 1960. Leurs travaux portaient sur une question fondamentale posée initialement par Claude Shannon dans son étude fondatrice sur l'entropie : “Dans quelle mesure des fonctions à bande limitée en temps peuvent-elles également être à bande limitée en fréquence ?” Shannon avait estimé que le nombre N de signaux orthogonaux pouvant être contenus dans une fenêtre temporelle T et une bande de fréquence W satisfait la relation $N \simeq 2TW$.

S'appuyant sur ce résultat, Slepian et ses collaborateurs ont cherché à maximiser la quantité d'informations transmissibles dans un laps de temps limité et une bande passante donnée – un problème central pour l'efficacité des systèmes de communication.

Pour décrire leur résultat, fixons l'intervalle de temps et de fréquence à $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, et soit P_λ la projection dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ (fonctions de carré intégrable) définie par multiplication par la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$. Soit $\widehat{P}_\lambda := \mathbb{F}_{e\mathbb{R}} P_\lambda \mathbb{F}_{e\mathbb{R}}^{-1}$ son conjugué par la transformée de Fourier.¹³

Dans leur article fondateur, [101], Slepian et Pollak ont démontré que la transformée de Fourier compressée $P_\lambda \mathbb{F}_{e\mathbb{R}} P_\lambda$ commute avec l'opérateur différentiel du second ordre.

$$PW_\lambda := -\partial_x \left((\lambda^2 - x^2) \partial_x \right) + (2\pi\lambda x)^2. \quad (15)$$

Il s'ensuit que cet opérateur commute sur $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ (l'ensemble des fonctions paires de carré intégrable) avec

$$P_\lambda \widehat{P}_\lambda P_\lambda = P_\lambda \mathbb{F}_{e\mathbb{R}} P_\lambda \mathbb{F}_{e\mathbb{R}} P_\lambda = (P_\lambda \mathbb{F}_{e\mathbb{R}} P_\lambda)^2,$$

ce qui permet de diagonaliser l'opérateur d'angle⁹ α_λ entre les projections P_λ et \widehat{P}_λ définies par l'identité

$$P_\lambda \cos^2(\alpha_\lambda) = P_\lambda \widehat{P}_\lambda P_\lambda.$$

Fait 6.3 *Les valeurs propres de l'opérateur $P_\lambda \widehat{P}_\lambda P_\lambda$ dans $L^2([-\lambda, \lambda])^{\text{ev}}$ sont simples et forment une suite décroissante $\nu_n(\lambda)$, $n \geq 0$, $\nu_n(\lambda) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, telle que $1 > \nu_0(\lambda) > \nu_1(\lambda) > \dots > 0$. Les fonctions propres correspondantes sont les fonctions d'onde sphéroïdales prolates d'indice pair $h_{2n,\lambda}$ où $h_{m,\lambda}$ est la $m+1$ -ième fonction propre de l'opérateur d'onde prolate (15) dans $L^2([-\lambda, \lambda])$.*

L'opérateur α_λ possède un nombre fini¹⁴ $\sim 4\lambda^2$ de petites valeurs propres non nulles. Suivant la notation standard de la littérature, les fonctions d'ondes sphéroïdales prolates sont notées

$$h_{n,\lambda}(x) := \text{PS}_{n,0} \left(2\pi\lambda^2, \frac{x}{\lambda} \right)$$

13. La transformée de Fourier normalisée est définie par

$$\mathbb{F}_{e\mathbb{R}}(f)(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i x y} dx.$$

Notons que pour les fonctions paires, on a : $\mathbb{F}_{e\mathbb{R}}^{-1} = \mathbb{F}_{e\mathbb{R}}$.

14. Avec notre normalisation, la durée est $T = 2\lambda$ et la limite de bande est $W = \lambda$.

où l'indice n indexe la fonction propre, le second indice 0 indique l'ordre angulaire (un vestige de l'origine de l'opérateur dans la séparation des variables pour le laplacien sur les sphéroïdes prolates) et le premier argument $2\pi\lambda^2$ est le paramètre de bande passante sans dimension.

Chaque fonction $h_{n,\lambda}$ est définie sur $[-\lambda, \lambda]$ et prolongée par zéro en dehors de cet intervalle. La fonction $h_{n,\lambda}$ est paire lorsque n est pair. La transformée de Fourier de $h_{2m,\lambda}$, restreinte à $[-\lambda, \lambda]$, satisfait

$$\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}(h_{2m,\lambda}) = \chi_m h_{2m,\lambda},$$

où $\chi_m^2 = \nu_m$ et le signe de χ_m est $(-1)^m$. Pour notre propos, nous avons besoin des valeurs propres χ_0 et χ_2 correspondant aux fonctions propres $h_{0,\lambda}$ et $h_{4,\lambda}$, et les termes $(1 - \chi_0)$ et $(1 - \chi_2)$ tendent exponentiellement vers 0 en fonction de $x = \lambda^2$.

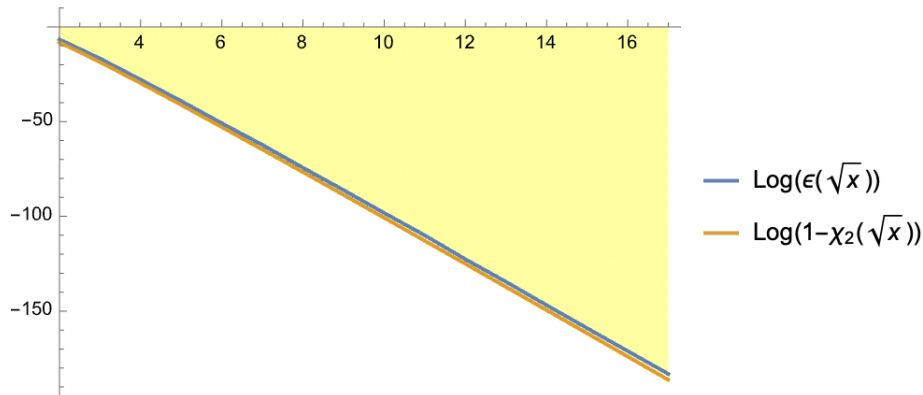
6.4 La formule de Poisson et l'approximation k_λ de θ_x , $\lambda = \sqrt{x}$.

Soit $\lambda > 1$, et QW_λ la restriction de la forme quadratique de Weil aux fonctions test dont le support est inclus dans l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$. D'après le résultat d'André Weil présenté au § 4.1, la positivité de QW_λ pour tout $\lambda > 1$ est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Cette positivité peut être démontrée pour de petites valeurs de λ (voir [111], [24]). Il existe (voir [25, 31]) pour chaque $\lambda > 1$ un opérateur auto-adjoint canonique minoré et non borné A_λ à résolvante compacte, dans l'espace de Hilbert $L^2([\lambda^{-1}, \lambda], du/u)$ tel que

$$QW_\lambda(f, f) = \langle A_\lambda f | f \rangle \quad (16)$$

Le calcul numérique de la plus petite valeur propre $\epsilon(\lambda)$ de A_λ , effectué dans [25], montre que $\epsilon(\lambda)$ tend exponentiellement rapidement vers 0 en fonction de $\mu = \lambda^2$. En fait, une analyse minutieuse révèle une similitude frappante (Figure 6.4) entre le comportement de $\epsilon(\lambda)$ et celui de la fonction angulaire $1 - \chi_2(\lambda)$. En fonction de la longueur $L = 2 \log \lambda$ du support $[\lambda^{-1}, \lambda]$ des fonctions-tests pour QW_λ , la convergence vers 0 des quantités minuscules comme $1 - \chi_2$ est *exponentielle d'exponentielle*¹⁵ :

$$1 - \chi_2 \sim \frac{2^{14}}{3} \sqrt{2} \pi^5 e^{-4\pi e^L + 9/2L}.$$



Graphes de $\log(\epsilon(\sqrt{x}))$ et $\log(1 - \chi_2(\sqrt{x}))$ comme fonctions de x .

15. voir [47], Théorème 1. Notons que $\chi_k(\lambda)^2 = \lambda_{2k}(a)$ avec $a = \sqrt{2\pi} \lambda$ dans les notations de ce théorème.

Dans [25], nous avons donné une construction numériquement justifiée des vecteurs propres associés aux premières valeurs propres minuscules de QW_λ , en utilisant les fonctions d'onde sphéroïdales prolate associées à l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$. En particulier, cela donne une approximation éclairée du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre $\epsilon(\lambda)$ de A_λ . En accord avec le fait 6.2, cette approximation est

$$k_\lambda(u) := \mathcal{E}(h_\lambda)(u), \quad \forall u \in [\lambda^{-1}, \lambda] \quad (17)$$

où h_λ est, à un scalaire multiplicatif près, la seule combinaison linéaire de $h_{0,\lambda}, h_{4,\lambda}$ dont l'intégrale s'annule¹⁶.

La justification conceptuelle de cette formule est la suivante : l'image de l'application \mathcal{E} est contenue dans le radical de la forme quadratique de Weil globale (voir [18]), mais l'hypothèse de Riemann implique que QW_λ est strictement positive et que son radical est $\{0\}$. On s'attend donc à ce que le domaine de QW_λ ne contienne aucun élément non nul de l'image de l'application \mathcal{E} . On peut néanmoins construire des fonctions à support $[\lambda^{-1}, \lambda]$ appartenant au “quasi-radical” de la forme quadratique de Weil, comme suit. Si le support de la fonction paire f est inclus dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$, le support de $\mathcal{E}(f)$ est inclus dans $(0, \lambda] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, la formule de Poisson, utilisant les conditions $f(0) = \hat{f}(0) = 0$ pour définir le sous-espace de codimension 2 $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de l'espace de Schwartz, donne

$$\mathcal{E}(\hat{f})(x) = \mathcal{E}(f)(x^{-1}), \quad \forall f \in \mathcal{S}_0^{\text{ev}} \quad (18)$$

qui montre que le support de $\mathcal{E}(f)$ est inclus dans $[\lambda^{-1}, \infty)$ pourvu que le support de la fonction paire \hat{f} soit inclus dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. L'obstacle à l'obtention d'un élément $\mathcal{E}(f)$ du radical de QW_λ est l'égalité $P_\lambda \cap \hat{P}_\lambda = \{0\}$, où P_λ et \hat{P}_λ sont définis comme ci-dessus. Mais comme expliqué au §6.3, ces deux projections s'intersectent presque, et après avoir pris en compte les deux conditions $f(0) = \hat{f}(0) = 0$, la restriction de $\mathcal{E}(f)$ à l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ donne naissance à la fonction k_λ de (17) sur laquelle QW_λ prend des valeurs non nulles, mais extrêmement petites, donnant ainsi une supposition naturelle comme approximation du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre $\epsilon(\lambda)$ de A_λ .

6.5 Convergence des transformées de Fourier $\hat{k}_\lambda \rightarrow \hat{k}$

Grâce aux estimations classiques sur la convergence des fonctions d'onde prolates vers la fonction de Hermite-Weber, on contrôle la convergence de k_λ de (17) vers $k = \mathcal{E}(h)$, ce qui donne le :

Fait 6.4 *La transformée de Fourier de k_λ converge, lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, vers la fonction Ξ de Riemann uniformément sur les sous-bandes fermées de la bande ouverte $\Im(z) < \frac{1}{2}$.*

La différence est contrôlée sur la droite $\Im(z) = \alpha$ où $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ par $c\lambda^{-\frac{1}{2}-\alpha}(1-2\alpha)^{-1}$ où c est une constante finie.

16. Notez que le calcul de $\mathcal{E}(h_\lambda)(u)$ pour $u \in [\lambda^{-1}, \lambda]$ n'implique que la somme sur les entiers $\leq \lambda^2$

6.6 Étapes restantes

Pour appliquer le théorème 6.1, il faut démontrer que la plus petite valeur propre de la forme quadratique de Weil QW_λ est simple et associée à un vecteur propre pair. L'analogie de cette propriété est connu pour l'opérateur d'onde prolate. De plus, il reste à montrer que k_λ est une approximation suffisamment bonne de θ_x , $\lambda = \sqrt{x}$.

7 Perspectives géométriques

L'approche géométrique adoptée dans l'article commun [19], décrit dans [20], a révélé un paysage géométrique inédit qui constitue un analogue naturel, pour le corps global \mathbb{Q} , de la géométrie associée aux corps globaux en caractéristique finie. En particulier, les correspondances de Frobenius prennent sens sur le carré du site de mise à l'échelle et la fonction zêta de Riemann complète apparaît comme l'analogie de la fonction génératrice de Hasse-Weil. Le traitement des valeurs principales délicates intervenant dans la formule explicite de Riemann-Weil a nécessité l'utilisation de l'incarnation adélique du site de mise à l'échelle, que nous comprenons maintenant comme son homologue en théorie des corps de classes [26].

Dans l'article [24], nous avons commencé à exploiter l'interprétation adélique des correspondances de Frobenius pour le corps de nombres \mathbb{Q} afin d'étudier progressivement la positivité de Weil. Comme expliqué au § 4.1, la positivité de Weil, qui n'implique qu'un nombre fini de nombres premiers à la fois, est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Dans le cadre géométrique adélique, les correspondances sont encodées par des noyaux de Schwartz, qui sont des distributions dans le carré des données adéliques et qui jouent le rôle de l'équivalent, en théorie des corps de classes, de la courbe géométrique. Plus généralement, le lien entre les points de vue de la théorie des opérateurs et de la géométrie est établi par les noyaux de Schwartz associés aux opérateurs. En implémentant la structure additive des adèles, on constate que le noyau de Schwartz de l'opérateur d'échelle correspond géométriquement au diviseur de la correspondance de Frobenius.

La structure additive des adèles de \mathbb{Q} permet d'écrire le noyau de Schwartz $k(x, y)$ de l'action de mise à l'échelle $f(x) \mapsto f(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, sous la forme (avec $\underline{\delta}$ la distribution de Dirac)

$$k(x, y) = \underline{\delta}(\lambda x - y).$$

7.1 Formule de trace archimédienne

Il existe un parallèle très important entre la forme quadratique de Weil et la formule de trace, d'une part, et le monde de la théorie de l'information, d'autre part. Le point de départ de ce parallèle est la réécriture du cas archimédien de la formule de trace de [17] en faisant intervenir deux paramètres indépendants qui jouent le rôle de limitation temporelle et de limitation fréquentielle dans l'approche de Shannon, Slepian et leurs collaborateurs concernant la transmission d'information. On travaille dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ des fonctions paires de carré intégrable. L'action d'échelle de \mathbb{R}_+^* est définie comme

$$(\vartheta_\lambda \xi)(v) := \lambda^{-1/2} \xi(\lambda^{-1} v), \quad \vartheta(f) = \int f(\lambda) \quad \vartheta_\lambda d^* \lambda, \quad \forall \xi \in L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$$

Le paramètre T , qui impose la limitation temporelle à l'intervalle $[-T, T]$, définit la projection orthogonale P_T , et le paramètre W , qui impose la limitation fréquentielle à l'intervalle $[-W, W]$, définit la projection \widehat{P}_W . On peut écrire le cas archimédien de la formule de trace de [17] comme suit, où $W_\infty := -W_{\mathbb{R}}$ a été défini dans (10) :

$$W_\infty(f) = \log(TW) f(1) + \text{Trace} \left(\vartheta(f) (1 - P_T - \widehat{P}_W) \right) \quad (19)$$

Nous considérons cette formule comme un pont entre les formules explicites et le monde de la théorie de l'information, où les projections P_T et \widehat{P}_W jouent un rôle central. Elle sera étendue ci-dessous dans le §7.4 afin d'intégrer la contribution des nombres premiers aux formules explicites.

7.2 Positivité de Weil archimédienne

L'ingrédient-clé est la formule de trace semi-locale, que nous avons utilisée dans le cas simple où aucun nombre premier n'intervient. Nous avons constaté que non seulement la positivité de Weil est vérifiée dans ce cas, comme expliqué dans le §4.1, mais que la principale source de positivité provient de l'espace de Sonin, introduit initialement dans le contexte de l'hypothèse de Riemann par Burnol [9, 10, 11]. L'espace de Sonin \mathfrak{S}_λ est l'espace des fonctions de carré intégrable qui s'annulent identiquement sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, ainsi que leur transformée de Fourier. Par construction, il est orthogonal aux images des projections P_λ et \widehat{P}_λ . On note \mathfrak{S} la projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})_{\text{ev}}$ sur l'espace de Sonin \mathfrak{S}_1 (pour $\lambda = 1$). On a alors (voir [24]) le

Théorème 7.1 *Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ une fonction à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$ et dont la transformée de Fourier s'annule en $\frac{i}{2}$ et en 0. Alors l'inégalité suivante est vérifiée.*

$$W_\infty(g * g^*) \geq \text{Tr}(\vartheta(g) \mathfrak{S} \vartheta(g)^*)$$

7.3 L'espace des classes d'adèles semi-local

La formule de trace semi-locale présentée dans le §7.4 repose sur les espaces de classes d'adèles semi-locaux.

Ces espaces géométriques Y_S sont associés à un ensemble fini S de places de \mathbb{Q} contenant la place infinie. Par construction, Y_S est le quotient

$$Y_S := \mathbb{A}_S / \Gamma_S, \quad \mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v \quad (20)$$

du produit adélique des complétions des corps locaux du corps global \mathbb{Q} aux places $v \in S$. Le groupe Γ_S est le sous-groupe de \mathbb{Q}^\times défini par

$$\Gamma_S := \{\pm p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k} : p_j \in S \setminus \{\infty\}, n_j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}^\times \quad (21)$$

L'anneau \mathbb{A}_S contient \mathbb{Q} comme sous-anneau par injection diagonale, ce qui induit l'action de Γ_S sur \mathbb{A}_S par multiplication. Les espaces de classes d'adèles semi-locales sont le mieux encodés par les

algèbres non commutatives $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S) \rtimes \Gamma_S$ produits croisés des algèbres de Bruhat-Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ de fonctions sur les adèles semi-locales, par les groupes multiplicatifs Γ_S . Ces algèbres non commutatives constituent un faisceau d'algèbres sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. Le groupe Γ_S est proprement compris comme les sections \mathbb{Z}_S^\times du faisceau \mathbf{G}_m sur le complémentaire ouvert de S dans $\text{Spec } \mathbb{Z}$. On montre que l'algèbre de Bruhat-Schwartz semi-locale $\mathcal{S}(\mathbb{A}_S)$ forme un faisceau \mathcal{O} d'algèbres commutatives sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$. On obtient alors le résultat suivant, qui établit la compatibilité des constructions géométriques non commutatives avec la géométrie algébrique de $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

Théorème 7.2 - *Le produit vectoriel algébrique $\mathcal{O} \rtimes \mathbf{G}_m$ définit un faisceau d'algèbres sur $\text{Spec } \mathbb{Z}$ tel que pour tout ensemble fini de places $S \ni \infty$*

$$(\mathcal{O} \rtimes \mathbf{G}_m)(S^c) = \mathcal{S}(\mathbb{A}_S) \rtimes \mathbb{Z}_S^\times$$

- *La fibre de $\mathcal{O} \rtimes \mathbf{G}_m$ au point générique est le produit vectoriel global $\mathcal{S}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \rtimes \mathbb{Q}^\times$.*
- *Les sections globales de $\mathcal{O} \rtimes \mathbf{G}_m$ forment le produit vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rtimes \{\pm 1\}$.*

Les espaces fonctionnels impliqués dans la formule de trace semi-locale du § 7.4 sont mieux compris conceptuellement comme l'homologie de Hochschild des algèbres semi-locales.

7.4 La formule de trace semi-locale

La difficulté restante pour démontrer la convergence des vecteurs propres θ_x vers la fonction $k = \mathcal{E}(h)$ du fait 6.2 consiste à comparer efficacement θ_x avec k_λ pour $\lambda = \sqrt{x}$. La preuve numérique a été apportée dans [25] où la comparaison a été étendue aux vecteurs propres de QW_λ correspondant aux premières valeurs propres minuscules, en utilisant l'orthogonalisation de Gram-Schmidt des vecteurs de la forme $\mathcal{E}(\psi)$, les ψ étant construits à partir des fonctions d'onde prolate suivantes. Comme étape vers une justification conceptuelle de ce résultat numérique, on peut se référer à la formule de trace semi-locale de [17].

Cette formule fournit une représentation sous forme de trace de la forme quadratique de Weil QW_λ , parfaitement analogue à (19), mais qui donne maintenant la contribution des nombres premiers $p \in S$ à la formule explicite. Elle prend la forme suivante :

$$-\sum_{v \in S} W_v(f) = \log(TW) f(1) + \text{Trace} \left(\vartheta(f) \left(1 - P_T^S - \hat{P}_W^S \right) \right) \quad (22)$$

où les projections P_T^S et \hat{P}_W^S sont définies comme dans le cas archimédien en utilisant le module¹⁰.

7.5 Les régimes infrarouge et ultraviolet

Dans le cadre de la géométrie non commutative, l'encodage d'un espace géométrique par un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ révèle des informations à travers deux régimes spectraux complémentaires de l'opérateur de Dirac D :

- Le régime ultraviolet (UV) correspond à la partie des hautes énergies du spectre, c'est-à-dire au comportement des valeurs propres de D à l'infini. Ce régime capture la structure infinitésimale de l'espace et détermine ses invariants géométriques locaux, tels que la dimension, la forme du volume et la courbure. En physique, cela s'apparente à sonder un système à très

courte distance ou à des impulsions élevées. Mathématiquement, le comportement UV régit le comportement asymptotique du noyau de la chaleur et intervient de manière cruciale dans le principe d'action spectrale.

- Le régime infrarouge (IR) concerne la partie des basses énergies du spectre de D , en particulier les petites valeurs propres. Cette partie reflète les caractéristiques topologiques et géométriques globales de l'espace, telles que la connexité, la croissance du volume et les quantités issues de la théorie des indices. En physique, le comportement infrarouge (IR) fait référence aux phénomènes de basse énergie et aux propriétés à grande échelle. Il joue un rôle central dans la compréhension des corrélations à longue portée et des effets topologiques.

En particulier, une telle perspective duale permet à la géométrie non commutative d'accéder à la fois aux invariants spectraux locaux et aux caractéristiques arithmétiques ou topologiques globales grâce au langage unifié de la théorie des opérateurs.

Pour le régime infrarouge, nous construisons dans [30] des opérateurs auto-adjoints $D_{\log}^{(\lambda, N)}$ obtenus comme perturbations de rang un du triplet spectral associé à l'opérateur de mise à l'échelle sur l'intervalle $[\lambda^{-1}, \lambda]$ et dont le spectre coïncide avec l'approximation remarquable des zéros de zêta de basse énergie tels que décrits dans la lettre à Riemann. Nous calculons ensuite les déterminants régularisés $\det_{\text{reg}}(D_{\log}^{(\lambda, N)} - z)$ de ces opérateurs et discutons du rôle analytique qu'ils jouent dans le contrôle et la démonstration potentielle du résultat ci-dessus en montrant que, convenablement normalisés, ils convergent vers la fonction Ξ de Riemann.

Pour le régime ultraviolet, nous décrivons brièvement dans la section 7.6 les résultats de [27] qui montrent que l'opérateur d'onde prolate fournit un opérateur auto-adjoint qui correspond au comportement ultraviolet des zéros. En guise de préparation, on peut utiliser les formules explicites pour calculer l'expansion de la chaleur, en supposant HR, d'un opérateur dont le spectre est formé des parties imaginaires des zéros non triviaux de $\zeta(z)$:

Théorème 7.3 [28] *Supposons HR et soit D l'opérateur auto-adjoint dont le spectre est formé des parties imaginaires des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann. On obtient alors le développement asymptotique suivant pour $t \rightarrow 0$:*

$$\text{Tr}(\exp(-tD^2)) \sim \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}} - \frac{(\log 4\pi + \frac{1}{2}\gamma)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} + 2\exp(t/4) + \sum a_n t^{n/2} \quad (23)$$

où $a_0 = -\frac{1}{4}$ et pour $k > 0$, en utilisant les nombres de Bernoulli B_j et les nombres d'Euler $E(k)$,

$$a_{2k-1} = \frac{\Gamma(k) (2^{2k-1} - 1) B_{2k}}{2\sqrt{\pi}(2k)!}, \quad a_{2k} = -\frac{1}{4}\Gamma(k + \frac{1}{2}) \frac{E(2k)}{\sqrt{\pi}(2k)!}.$$

Les nombres d'Euler sont définis ainsi

$$E(2n) := \sum_{k=1}^{2n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} (k-j)^{2n} \quad (24)$$

On a le comportement asymptotique lorsque $k \rightarrow \infty$

$$\frac{E(2k)}{(2k)!} \sim (-1)^k 2^{2k} \frac{4}{\pi} \pi^{-2k}$$

qui montre que le développement asymptotique (23) n'est en aucun cas convergent puisque son coefficient général a_n diverge comme une factorielle.

7.6 L'opérateur d'onde prolate

Les fonctions d'onde sphéroïdales prolates jouent un rôle-clé, comme nous l'avons vu précédemment en relation avec la fonction zêta de Riemann. Dans toutes ces applications, elles apparaissent comme fonctions propres de l'opérateur d'angle entre deux projections orthogonales dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})^{\text{ev}}$ des fonctions paires de carré intégrable sur \mathbb{R} . Ces projections dépendent d'un paramètre $\lambda > 0$. La projection P_λ est donnée par le produit de λ par la fonction caractéristique de l'intervalle $[-\lambda, \lambda] \subset \mathbb{R}$. La projection \widehat{P}_λ est sa conjuguée par la transformée de Fourier $\mathbb{F}_{c_{\mathbb{R}}}$. Dans toutes les applications mentionnées ci-dessus des fonctions d'onde sphéroïdales allongées, l'existence miraculeuse, découverte par le groupe des laboratoires Bell Labs, d'un opérateur différentiel PW_λ commutant avec l'opérateur d'angle, ne joue qu'un rôle auxiliaire. Dans la présente section, nous expliquons un autre "miracle" découvert lors de notre collaboration avec H. Moscovici [27] : une étude approfondie de l'extension auto-adjointe naturelle de PW_λ étendue à $L^2(\mathbb{R})$ montre qu'elle possède toujours un spectre discret et que ses valeurs propres négatives reproduisent le comportement ultraviolet des carrés des zéros de la fonction zêta de Riemann. De manière similaire, le spectre positif correspond, dans le régime ultraviolet, aux zéros triviaux de la fonction zêta de Riemann. Cette coïncidence est valable pour deux valeurs : $\lambda = 1$ et $\lambda = \sqrt{2}$. La raison conceptuelle de cette coïncidence réside dans le lien entre l'opérateur de (15), c'est-à-dire

$$(PW_\lambda \psi)(q) = -\partial((\lambda^2 - q^2)\partial) \psi(q) + (2\pi\lambda q)^2 \psi(q) \quad (25)$$

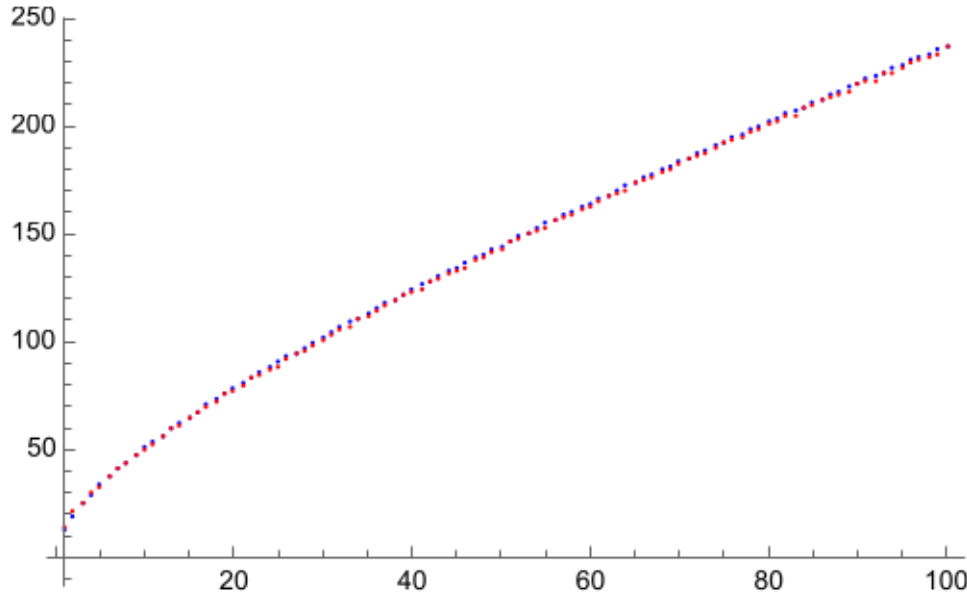
et le carré de l'opérateur de mise à l'échelle $\mathcal{J} := x\partial_x$. Comme nous l'avons vu précédemment, la compression de l'opérateur dde mise à l'échelle $\vartheta(f)$ dans l'espace de Sonin est la racine de la positivité de Weil à la place archimédienne sur les fonctions-tests à support dans l'intervalle $[2^{-1/2}, 2^{1/2}]$. Or, j'ai démontré en 1998 que l'opérateur d'onde prolate admet une unique extension auto-adjointe commutant avec les projections orthogonales P_λ et \widehat{P}_λ . Cette extension est invariante par transformation de Fourier et se restreint à l'espace de Sonin, c'est-à-dire à l'espace des fonctions paires de carré intégrable qui s'annulent identiquement, ainsi que leur transformée de Fourier sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$.

Nous avons découvert dans [27] que cette restriction de PW_λ à l'espace de Sonin, qui est un opérateur auto-adjoint, fournit une réalisation spectrale du régime ultraviolet des zéros de la fonction zêta de Riemann.

Plus précisément, le spectre de cet opérateur est formé par une suite discrète ν_k de nombres négatifs, et les nombres $2\sqrt{\nu_k}$ pour le choix $\lambda = \sqrt{2}$ ont le même comportement ultraviolet que $\rho - \frac{1}{2}$, où les ρ sont les zéros de la fonction zêta.

En utilisant le procédé de Darboux, nous avons construit une racine carrée de Dirac D de PW_λ dépendant d'un paramètre de déformation, et dont le spectre est constitué des nombres $2\sqrt{\nu_k}$ pour $\lambda = \sqrt{2}$. Ce spectre présente le même comportement ultraviolet que les zéros de la fonction zêta de Riemann. La figure 7.6 montre le spectre de l'opérateur D et les parties imaginaires des zéros de la

fonction zêta. Cette similarité spectrale ultraviolette suggère que nous avons capturé spectralement la contribution de la place archimédienne au spectre zêta. L'ambiguïté dans le choix de la racine carrée de l'opérateur de Dirac D est étroitement liée à la théorie de Galois différentielle de l'équation différentielle prolata étudiée par J. P. Ramis et ses collaborateurs [45, 89].



Le graphe montre la proximité du $n^{\text{ième}}$ zéro de zeta avec le $n^{\text{ième}}$ élément de $\text{Spec } D$.

8 Conclusion

L'hypothèse de Riemann a catalysé le développement de vastes domaines des mathématiques, de l'analyse classique à la géométrie arithmétique moderne et à la physique mathématique. Chaque approche a enrichi notre compréhension de la fonction zêta et de ses généralisations, même sans que l'on soit parvenu à une démonstration.

Dans cette étude, nous avons proposé une vue d'ensemble de ce paysage mathématique. Nous avons commencé par un examen détaillé des connaissances actuelles sur la fonction zêta de Riemann et ses zéros, puis nous avons passé en revue la remarquable variété des théories mathématiques développées au cours des 165 dernières années pour tenter de résoudre l'hypothèse de Riemann : des méthodes analytiques classiques et de la théorie des fonctions L aux approches modernes via la théorie des matrices aléatoires, la théorie des opérateurs et la géométrie arithmétique. Nous avons exploré des formulations équivalentes de l'hypothèse, chacune offrant sa propre perspective sur les raisons pour lesquelles ce problème s'est avéré si difficile à résoudre. Si cette étude exhaustive démontre la richesse des idées mathématiques engendrées par l'hypothèse de Riemann, elle révèle également que même les approches modernes les plus sophistiquées n'ont pas encore réussi à percer ce mystère vieux de 165 ans.

Dans ce contexte de connaissances accumulées, la seconde partie de cet article a proposé une approche différente : un retour au point de vue initial de Riemann sous un angle nouveau. Notre découverte d'une vaste classe de fonctions directement liées à la forme quadratique de Weil et dont

les zéros se situent sur la droite critique, de manière démontrable, combinée aux résultats numériques exceptionnels reliant les produits d'Euler tronqués aux zéros réels de la fonction zêta, suggère que les intuitions initiales de Riemann pourraient recéler une portée insoupçonnée. La précision obtenue en utilisant uniquement des nombres premiers inférieurs à 13 – avec des erreurs aussi faibles que $2,6 \times 10^{-55}$ – ne saurait être considérée comme une simple coïncidence.

Le cadre géométrique présenté ici, utilisant la formule de trace et les méthodes spectrales, offre une voie prometteuse : démontrer que les zéros de fonctions d'approximation convenablement construites convergent vers les zéros de la fonction zêta. Cette synthèse de découvertes numériques, d'analyse classique et de techniques géométriques modernes représente une approche novatrice qui honore l'héritage de Riemann tout en employant des outils mathématiques contemporains.

Reste à savoir si cette voie mènera à une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Toutefois, ce cheminement a déjà révélé des liens inattendus entre la forme quadratique de Weil et le monde de la théorie de l'information, ainsi qu'entre les résultats numériques et la structure théorique. Comme nous l'écrivions dans notre lettre à Riemann, les vérités les plus profondes se cachent parfois dans les observations les plus simples.

Pour des études exhaustives de l'hypothèse de Riemann et de ses multiples facettes, voir [6], [37], [39], [44], [63], [86]. Le présent travail, qui se poursuivra en collaboration avec C. Consani et H. Moscovici, ouvre un nouveau chapitre dans cette histoire en cours.

Notes

¹Le théorème de Wiener-Ikehara stipule que si $A(x)$ est une fonction non négative et croissante et

$$f(s) = \int_0^\infty A(x)e^{-xs}dx$$

converge pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, et si $f(s) - c/(s-1)$ admet un prolongement continu à $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ pour une certaine constante $c \geq 0$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} A(x) = c.$$

Ce résultat a fourni précisément le cadre nécessaire pour convertir l'information concernant la non-annulation de la fonction zêta sur $\operatorname{Re}(s) = 1$ en énoncés asymptotiques précis sur les fonctions de comptage des nombres premiers. L'application au théorème des nombres premiers consiste à exprimer la dérivée logarithmique de la fonction zêta comme une transformée de Mellin de la fonction de Tchebychev $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p$, c'est-à-dire l'égalité $-\zeta'(s)/\zeta(s) = s \int_1^\infty \psi(x)x^{-(s+1)}dx$. La non-annulation de $\zeta(s)$ sur $\operatorname{Re}(s) = 1$, combinée au comportement connu de $\zeta(s)$ en $s = 1$, garantit que $\zeta'(s)/\zeta(s) + 1/(s-1)$ possède les propriétés analytiques requises pour l'application du théorème de Wiener-Ikehara. Ce théorème implique alors directement que $\psi(x) \sim x$, d'où découle le théorème des nombres premiers par des arguments élémentaires.

²Le coefficient de lissage de Selberg était de la forme suivante :

$$\sum_{n \leq \xi} \frac{\alpha_n \left(1 - \frac{\log n}{\log \xi}\right)}{n^s}$$

où les α_n sont les coefficients de la série de Dirichlet de $1/\sqrt{\zeta(s)}$ avec $\alpha_1 = 1$. Il avait besoin d'une moyenne de $|\zeta(1/2 + it)|^2$ multipliée par la quatrième puissance de ce coefficient de lissage.

³Pour une fonction méromorphe f dans le plan complexe, la caractéristique de Nevanlinna est définie par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f), \quad r > 0,$$

où

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$$

est la fonction de proximité est

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r$$

est la fonction de comptage intégrée des pôles, avec $n(t, f)$ désignant le nombre de pôles de f (avec multiplicité) dans $|z| \leq t$. Pour une fonction entière, $N(r, f) = 0$ et donc $T(r, f) = m(r, f)$.

Dans le cas de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$, méromorphe dans \mathbb{C} avec un unique pôle en $s = 1$, on peut définir $T(r, \zeta)$ de la même manière. Un résultat classique de Borchsenius et Jessen (1948) montre que :

$$T(r, \zeta) \sim \frac{\log r}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |\zeta(re^{i\theta})| d\theta \quad (r \rightarrow \infty),$$

et, plus précisément, ils ont obtenu le comportement asymptotique

$$T(r, \zeta) \sim \frac{1}{\pi} r \log r \quad \text{lorsque } r \rightarrow \infty.$$

Ainsi, la caractéristique de Nevanlinna de $\zeta(s)$ croît essentiellement comme $r \log r$, ce qui est du même ordre de grandeur que la croissance de $\log M(r, \zeta)$, où $M(r, \zeta) = \max_{|s|=r} |\zeta(s)|$.

⁴Le théorème stipule que pour $\sigma > 1/2$ fixé, les valeurs

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\log \zeta(\sigma + it)) dt$$

convergent lorsque $T \rightarrow \infty$ pour les fonctions continues bornées $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, la distribution limite μ_σ est une mesure de probabilité sur \mathbb{C} telle que :

- Elle ne possède pas d'atomes (distribution continue)
- Son support est tout le plan complexe lorsque $1/2 < \sigma < 1$.

De plus, malgré l'ambiguïté qui entoure la définition de $\log \zeta(\sigma + it)$ en présence de zéros de zeta, le théorème de Borchsenius-Jessen ne suppose pas l'hypothèse de Riemann.

⁵Oltre le théorème de Hahn-Banach, on utilise le lemme suivant (voir lemme 1.15 de Laurincikas) : Soient $x_1, \dots, x_n \in H$ et soient b_1, \dots, b_n des nombres complexes avec $|b_j| \leq 1, j = 1, \dots, n$. Alors il existe des nombres complexes a_1, \dots, a_n tels que $|a_j| = 1, j = 1, \dots, n$, tels que :

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j - \sum_{j=1}^n b_j x_j \right\|^2 \leq 4 \sum_{j=1}^n \|x_j\|^2$$

⁶Il est de la forme $\sum_0^2 (-1)^j \dim H^j(X, \mathcal{O}(D)) = \frac{1}{2} D \cdot (D - K) + \chi(X)$ où D est un diviseur, $\mathcal{O}(D)$ son faisceau de sections, $\chi(X)$ est le genre arithmétique.

⁷Le fait que ce livre utilise une convention cachée n'est pas clair, mais la formule suivante est écrite dans la section 1.15 "Le terme impliquant les racines ρ "

$$\int_{C^+} \frac{t^{\beta-1}}{\log t} dt = \int_0^{x^\beta} \frac{du}{\log u}$$

(avec le commentaire “où la seconde intégrale porte sur un chemin passant au-dessus de la singularité en $u = 1$ ”) égalise deux termes qui ne peuvent être égaux puisque l’intégrale de gauche prend des valeurs différentes lorsqu’on remplace β par $\beta + \frac{2\pi i}{\log(x)}$ tandis que x^β reste inchangé. Cela implique que la formule de Riemann doit être réécrite

en utilisant plutôt la fonction $\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt$ qui présente une discontinuité de branche dans le plan complexe z allant de $-\infty$ à 0. La forme correcte de (11) est

$$f(x) = \text{Li}(x) - \sum_{\text{Im}(\rho) > 0} (\text{Ei}(\rho \log x) + \text{Ei}(\bar{\rho} \log x)) + \int_x^\infty \frac{1}{t^2 - 1} \frac{dt}{t \log t} - \log 2$$

où la somme porte sur les zéros de la fonction zêta ayant une partie imaginaire positive.

$$^8 \text{Plus précisément, on a : } h = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{2^{3/4}} h_4 - \frac{3}{2^{17/4}} h_0, \quad \|h_j\| = 1, \quad \|h\| = \frac{\sqrt{33}}{2^{17/4}}.$$

⁹La notion d’angle entre deux sous-espaces fermés d’un espace de Hilbert – ou, de manière équivalente, entre deux projections orthogonales P et Q – a été étudiée par J. Dixmier dans : “*Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert*”, Revue Sci. 86 (1948), 387-399. L’idée essentielle est qu’une paire (P, Q) correspond à une représentation unitaire du groupe diédral infini. Ses représentations irréductibles sont classées par un angle, qui, dans le plan réel, représente l’angle entre deux droites réelles. La relation $P \cos^2 \alpha = PQP$ détermine l’opérateur d’angle sur chaque composante irréductible.

¹⁰Le module s’étend à une application multiplicative $|\bullet|_S$ de l’anneau $\mathbb{A}_S = \prod_{v \in S} \mathbb{Q}_v$ à \mathbb{R}_+ , et par construction, cette application passe au quotient comme une application $\text{Mod}_S : Y_S = \mathbb{A}_S / \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\text{Mod}_S(u) := |(u_v)_{v \in S}|_S = \prod |u|_v \in \mathbb{R}_+.$$

Les groupes d’idéles et les groupes de classes d’idéles

$$\text{GL}_1(\mathbb{A}_S) = \prod_{p \in S} \text{GL}_1(\mathbb{Q}_p), \quad C_S = \text{GL}_1(\mathbb{A}_S) / \Gamma$$

agissent naturellement par multiplication sur le quotient Y_S et l’orbite de $1 \in \mathbb{A}_S$ induit un plongement $C_S \rightarrow Y_S$. Le complémentaire de C_S dans Y_S est de mesure nulle pour le produit des mesures de Haar des groupes additifs des corps locaux (produit préservé par l’action du groupe dénombrable Γ). En utilisant la dérivée de Radon-Nikodym des mesures de Haar des groupes multiplicatifs par rapport à la mesure de Haar des groupes additifs, on obtient une identification unitaire.

$$w_S : L^2(Y_S) \rightarrow L^2(C_S) \quad (\text{see [18] Proposition 2.30}).$$

Nous rappelons également (voir [18], [Eqs. (2.223) et (2.239)]) que C_S est un groupe localement compact modulé de module

$$\text{Mod}_S(\lambda) = |\lambda|_S := \prod_{p \in S} |\lambda_p|, \quad \forall \lambda = (\lambda_p) \in C_S$$

qui est (non canoniquement) isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times K_S$, où K_S est le noyau de Mod_S . La formule de trace sous la forme de (22) est la spécialisation de la formule de trace générale de [17] à la partie invariante K_S .

Remerciements

Je voudrais remercier Jacques Dixmier et le premier referee pour ses commentaires très utiles.

Références

- [1] M. Artin, A. Grothendieck, and J. L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4)*, Lecture Notes in Math., Vols. 269, 270, 305, Springer, 1972–1973.

- [2] C. Bays and R. H. Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \text{Li}(x)$* , Math. Comp. 69 (2000), no. 231, 1285–1296.
- [3] M. V. Berry and J. P. Keating, *The Riemann zeros and eigenvalue asymptotics*, SIAM Review 41 (1999), no. 2, 236–266.
- [4] M. V. Berry and J. P. Keating, *$H = xp$ and the Riemann zeros*, in : *Supersymmetry and Trace Formulae : Chaos and Disorder*, Springer, 1999, 355–367.
- [5] R. P. Boas Jr., *Entire Functions*, Academic Press, 1954.
- [6] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, in : *The Millennium Prize Problems*, J. Carlson, A. Jaffe, and A. Wiles (eds.), Clay Math. Inst./AMS, 2006, 107–124.
- [7] V. Borchsenius and B. Jessen, *Mean motion and values of the Riemann zeta function*, Acta Math. 80 (1948), 97–166.
- [8] J.B. Bost, A. Connes, *Hecke algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory*, Selecta Math. (New Series) Vol.1 (1995) no.3, 411–457.
- [9] J.-F. Burnol, *Sur certains espaces de Hilbert de fonctions entières, liés à la transformation de Fourier et aux fonctions L de Dirichlet et de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **333** (2001), 201–206.
- [10] J.-F. Burnol, *Sur les espaces de Sonine associés par de Branges à la transformation de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I **335** (2002), 689–692.
- [11] J.-F. Burnol, *Two complete and minimal systems associated with the zeros of the Riemann zeta function*, J. Théor. Nombres Bordeaux 16 (2004), no. 1, 65–94.
- [12] H. M. Bui, J. B. Conrey, and M. P. Young, *More than 41% of the zeros of the zeta function are on the critical line*, Acta Arith. 150 (2011), no. 1, 35–64.
- [13] C. Bruce, T. Takeishi, *On the C^* -algebra associated with the full adèle ring of a number field*. J. Noncommut. Geom. 19 (2025), no. 2, 383–399.
- [14] P. L. Tchebychev, *Mémoire sur les nombres premiers*, J. Mathématiques Pures Appl., 1re série, tome 17 (1852), 366–390.
- [15] Y. Chao and R. Plymen, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \text{Li}(x)$* , Int. J. Number Theory 6 (2010), 681–690.
- [16] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [17] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.
- [18] A. Connes and M. Marcolli, *Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives*, Colloquium Publications, Vol. 55, AMS, 2008.
- [19] A. Connes and C. Consani, *Schemes over \mathbb{F}_1 and zeta functions*, Compos. Math. 146 (2010), no. 6, 1383–1415.
- [20] A. Connes, *An essay on the Riemann Hypothesis*. In *Open problems in mathematics*, Springer (2016), volume edited by Michael Rassias and John Nash.
- [21] A. Connes and C. Consani, *The Scaling Hamiltonian*, J. Operator Theory 85 (2019), 257–276.
- [22] A. Connes and C. Consani, *On Absolute Algebraic Geometry, the affine case*, Adv. Math. 390 (2021), Paper no. 107909, 44 pp.
- [23] A. Connes and C. Consani, *Quasi-inner functions and local factors*, J. Number Theory 226 (2021), 139–167.
- [24] A. Connes and C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*, Selecta Math. (N.S.) 27 (2021), no. 4, Paper no. 77, 70 pp.
- [25] A. Connes and C. Consani, *Spectral triples and ζ -cycles*, Enseign. Math. 69 (2023), no. 1–2, 93–148.
- [26] A. Connes and C. Consani, *Knots, primes and class field theory*, arXiv :2501.06560, to appear in Regulators V proceedings, AMS.
- [27] A. Connes, H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA **119** (2022), no. 22.
- [28] A. Connes, *Heat expansion and zeta*. Ann. Funct. Anal. 15 (2024), no. 3, Paper No. 59, 13 pp.

- [29] A. Connes, C. Consani, and H. Moscovici, *Zeta zeros and prolate wave operators : semilocal adelic operators*, Ann. Funct. Anal. 15 (2024), no. 4, Paper no. 87, 38 pp.
- [30] A. Connes, C. Consani, and H. Moscovici, *Zeta Spectral Triples*. To appear in Proceedings of the CIRM conference, Applications of NonCommutative Geometry to Gauge Theories, Field Theories, and Quantum Space-Time, 7–11 April 2025.
- [31] A. Connes, C. Consani, and H. Moscovici, *Riemann Zeros via Weil Forms : From Prolate Functions to Cohomology*, in preparation.
- [32] A. Connes and W. van Suijlekom, *Quadratic Forms, Real Zeros and Echoes of the Spectral Action*, Commun. Math. Phys. (2025) 406 :312, volume dedicated to H. Araki.
- [33] J. B. Conrey, A. Ghosh, *On mean values of the zeta function*, Mathematika 31 (1984), no. 1, 159–161.
- [34] J. B. Conrey, *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*, J. Reine Angew. Math. 399 (1989), 1–26.
- [35] J. B. Conrey, A. Ghosh, *A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function*, Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 15, 775–780.
- [36] J. B. Conrey, S. Gonek, *High moments of the Riemann zeta-function*. Duke Math. J. 107 (2001), no. 3, 577–604.
- [37] J. B. Conrey, *The Riemann Hypothesis*, Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), no. 3, 341–353.
- [38] J. B. Conrey and N. C. Snaith, *Applications of the L-functions ratios conjectures*, Proc. London Math. Soc. (3) 94 (2007), no. 3, 594–646.
- [39] J. B. Conrey, *Riemann’s hypothesis. The legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years*. Vol. I, 107–190, Adv. Lect. Math. (ALM), 35.1, Int. Press, Somerville, MA, 2016.
- [40] P. Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **43** (1974), 273–307.
- [41] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **52** (1980), 137–252.
- [42] E. Dueñez, *Random matrix ensembles associated with compact symmetric spaces*, Commun. Math. Phys. **244** (2004), 29–61.
- [43] F. J. Dyson, *Statistical theory of the energy levels of complex systems. I–III*, J. Math. Phys. 3 (1962), 140–175.
- [44] H. M. Edwards, *Riemann’s Zeta Function*, Dover Publications, 2001 (orig. Academic Press, 1974).
- [45] F. Fauvet, J.-P. Ramis, F. Richard-Jung and J. Thomann, *Stokes phenomenon for the prolate spheroidal wave equation*. Appl. Numer. Math. 60 (2010), no. 12, 1309–1319.
- [46] S. Feng, *Zeros of the Riemann zeta function on the critical line*. J. Number Theory 132, 511–542 (2012).
- [47] W. H. J. Fuchs, *On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory of band-limited signals*, J. Math. Anal. Appl. 9 (1964), 317–330.
- [48] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801.
- [49] A. A. Goldberg and I. V. Ostrovskii, *Value Distribution of Meromorphic Functions*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 236, AMS, 2008.
- [50] S. M. Gonek, C. P. Hughes, and J. P. Keating, *A hybrid Euler–Hadamard product for the Riemann zeta function*, Duke Math. J. 136 (2007), no. 3, 507–549.
- [51] C. Gordon and P. Sarnak, *Zeros of zeta functions of curves over finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **23** (1990), 147–182.
- [52] A. P. Guinand, *A summation formula in the theory of prime numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) 50 (1949), 107–119.
- [53] L. Guth and J. Maynard, *New large value estimates for Dirichlet polynomials*, arXiv :2405.20552.
- [54] J. Hadamard, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France 24 (1896), 199–220.
- [55] J. Hadamard, *Essai sur l’étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, J. Math. Pures Appl. (4) 8 (1892), 101–186.
- [56] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1012–1014.
- [57] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann Zeta-Function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1916), 119–196.

- [58] D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L -functions, and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. (3) 64 (1992), no. 2, 265–338.
- [59] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$* , Lecture Notes in Math., Vol. 548, Springer, 1976.
- [60] A. E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge University Press, 1932.
- [61] A. E. Ingham, *On the estimation of $N(\sigma, T)$* , Quart. J. Math. Oxford 11 (1940), 183–188.
- [62] A. E. Ingham, *Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. 27 (1926), 273–300.
- [63] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function : Theory and Applications*, Dover Publications, 2003.
- [64] N. M. Katz and P. Sarnak, *Random Matrices, Frobenius Eigenvalues, and Monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 45, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [65] N. M. Katz and P. Sarnak, *Zeros of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** (1999), 1–26.
- [66] J. P. Keating and N. C. Snaith, *Random matrix theory and $\zeta(1/2 + it)$* , Commun. Math. Phys. 214 (2000), no. 1, 57–89.
- [67] J. P. Keating and N. C. Snaith, *Random matrix theory and L -functions at $s = 1/2$* , Commun. Math. Phys. 214 (2000), 91–110.
- [68] I. Laine, *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1993.
- [69] C. L. Siegel, *Über die Anzahl der Klassen ganzer quadratischer Formen mit gegebenen Diskriminanten*, Math. Ann. 106 (1932), 538–586.
- [70] A. Laurinćikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta Function*, Mathematics and its Applications, Vol. 352, Kluwer, 1996.
- [71] R. Lehman, *On the difference $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$* , Acta Arith. 11 (1966), 397–410.
- [72] B. Ya. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 5, AMS, 1964.
- [73] N. Levinson, *More than one third of the zeros of Riemann's zeta-function are on $\sigma = 1/2$* , Advances in Math. 13 (1974), 383–436.
- [74] X.-J. Li, *The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis*, J. Number Theory 65 (1997), no. 2, 325–333.
- [75] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1869–1872.
- [76] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Math. Studies, Vol. 170, Princeton Univ. Press, 2009.
- [77] B. Mazur, *Notes on étale cohomology of number fields*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 6 (1973), 521–552.
- [78] R. Meyer, *On a representation of the idele class group related to primes and zeros of L -functions*, Duke Math. J. Vol.127 (2005), no.3, 519–595.
- [79] H. L. Montgomery, *The zeros of the zeta function*, Proc. Int. Congress Math. (Vancouver, 1974), Vol. 1, 379–381.
- [80] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, in : *Analytic Number Theory*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 24, AMS, 1973, 181–193.
- [81] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Multiplicative Number Theory I : Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [82] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard–Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [83] R. Nevanlinna, *Analytic Functions*, Springer-Verlag, 1970.
- [84] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. 48 (1987), no. 177, 273–308.
- [85] A. M. Odlyzko, *The 10^{20} -th zero of the Riemann zeta function and 70 million of its neighbors*, Preprint (1990); available at <https://www.dtc.umn.edu/~odlyzko>. (voir <https://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/odlyzko2.pdf>).
- [86] S. J. Patterson, *An Introduction to the Theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge Studies in Adv. Math., Vol. 14, Cambridge Univ. Press, 1988.

- [87] D. Platt, T. Trudgian, *The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$* . Bull. Lond. Math. Soc. 53 (2021), no. 3, 792–797.
- [88] K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu, D. Zeindler, *More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line*. Res. Math. Sci. 7 (2020), no. 2, Paper No. 2, 74 pp.
- [89] J. P. Ramis, F. Richard-Jung, J. Thomann, *New eigenfunctions for the negative part of the Connes-Moscovici prolate spectrum*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 363 (2025), 1065–1081.
- [90] B. Riemann, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen GröÙe*, Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1859), 671–680.
- [91] B. Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (On the Representability of a Function by a Trigonometric Series) Abhandlungen der Königlischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, vol. 13 (1867), pp. 87–132.
- [92] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1987.
- [93] Y. Saouter and P. Demichel, *A sharp region where $\pi(x) - \text{Li}(x)$ is positive*, Math. Comp. 79 (2010), 2395–2405.
- [94] Y. Saouter, T. Trudgian, and P. Demichel, *A still sharper region where $\pi(x) - \text{Li}(x)$ is positive*, Math. Comp. 84 (2015), no. 295, 2433–2446.
- [95] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Math., Vol. 265, Springer, 2012.
- [96] A. Selberg, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I. (1942), no. 10, 1–59.
- [97] A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*, Ann. of Math. (2) 50 (1949), 305–313.
- [98] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47–87.
- [99] B. Simon, *Lower semi-continuity of positive quadratic forms*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 79 (1977), 267–273.
- [100] S. Skewes, *On the difference $\pi(x) - \text{Li}(x)$* , J. London Math. Soc. 8 (1933), 277–283.
- [101] D. Slepian and H. Pollack, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty*, Bell Syst. Tech. J. (1961), 43–63.
- [102] D. Slepian, *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions*, J. Math. Phys. 44 (1965), 99–140.
- [103] D. Slepian, *Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling*, SIAM Review 23 (1983), 379–393.
- [104] N. Snaith, *Riemann zeros and random matrix theory*, Milan J. Math. Vol. 78 (2010) 135–152.
- [105] H. J. J. te Riele, *On the sign of the difference $\pi(x) - \text{Li}(x)$* , Math. Comp. 48 (1987), 323–328.
- [106] C. J. de la Vallée Poussin, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 20 (1896), 183–256.
- [107] H. von Mangoldt, *Zu Riemann’s Abhandlung “Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen GröÙe”*, J. Reine Angew. Math. 114 (1895), 255–305.
- [108] S. M. Voronin, *Theorem on the universality of the Riemann zeta function*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 39 (1975), 475–486; Math. USSR Izv. 9 (1975), 443–445.
- [109] A. Weil, *Sur les formules explicites de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, 1952, 252–265.
- [110] A. Weil, *Basic Number Theory*, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 144, Springer, 1967; 2nd ed. 1973; corr. reprint 1995.
- [111] H. Yoshida, *On Hermitian forms attached to zeta functions*, in : *Zeta Functions in Geometry* (Tokyo, 1990), Adv. Stud. Pure Math. 21, Kinokuniya, Tokyo, 1992, 281–325.

ALAIN CONNES
 IHES ET COLLÈGE DE FRANCE
 PARIS, 75005, FRANCE
 ADRESSE MAIL : alain@connes.org