

Triplets spectraux de zeta, régimes infrarouge et ultraviolet

Alain Connes, Caterina Consani, Henri Moscovici, 9 juillet 2026¹

LE MAÎTRE DE CÉRÉMONIE : Très bien, je crois que le moment est venu. Bienvenue à tous à cette séance spéciale du soir. Nous avons le grand plaisir d'accueillir le professeur Alain Connes qui nous donnera une conférence sur les triplets spectraux pour la fonction zêta, dans les régimes infrarouge et ultraviolet. Merci, la parole est à vous.

ALAIN CONNES : D'accord, merci. Mon exposé sera donc essentiellement un travail commun avec Katia Consani et Henri Moscovici, mais il s'appuiera sur un travail antérieur réalisé avec Walter van Suijlekom. Voici donc le plan de mon exposé je commencerai par exposer les résultats précédents obtenus avec Walter, qui figuraient dans un article dédié à Huzihiro Araki.

En d'autres termes, cela donne, si vous le souhaitez, les résultats généraux concernant les zéros de la transformée de Fourier des vecteurs propres extrêmes des formes quadratiques. La seconde partie traitera des triplets spectraux zêta dans l'infrarouge et décrira un travail effectué en collaboration avec Katia Consani et Henri Moscovici. Enfin, si j'en ai le temps, mais cela reste à confirmer, j'aborderai le spectre ultraviolet et les triplets spectraux pour la fonction zêta.

Et bien sûr, tout cela est lié à ce merveilleux cadeau que nous a fait Riemann : les zéros de la fonction zêta de Riemann. Ces zéros sont symétriques par rapport à l'axe réel et leur partie réelle est censée être égale à un demi.

Donc, oui, j'ai déplacé ma main. Le premier est autour de 14. Le deuxième est autour de 21, puis autour de 25, puis autour de 30.

D'accord. Quand je parle d'infrarouge, je parle de la partie basse du spectre. Et quand je parle d'ultraviolet, je parle du comportement de ce spectre aux longueurs d'onde les plus éloignées.

Bon, alors, le premier résultat que nous avons obtenu avec Walter van Suijlekom est lié à un résultat très ancien, datant en fait de 1911, de Carathéodory et Fejér, et qui concerne les matrices de Toeplitz. Ce résultat stipule que si l'on considère une matrice de Toeplitz - une matrice de Toeplitz est une matrice dont les coefficients ne dépendent que de la différence entre les deux indices de la matrice, autrement dit, ils sont constants le long de la diagonale, si l'on considère une telle matrice, supposée semi-définie positive et dotée d'un noyau unidimensionnel, et si l'on prend un vecteur non nul de ce noyau, on obtient un résultat remarquable et extrêmement puissant : le polynôme, somme des coefficients de ce vecteur non nul multiplié par z^j (i.e. z à la puissance j), a toutes ses racines sur le cercle unité. Autrement dit, cela nous offre un outil incroyablement puissant pour obtenir ces polynômes particuliers, omniprésents en théorie des nombres, dont tous les zéros sont situés sur un cercle. Ici, il s'agit du cercle unité, mais bien sûr, en modifiant la normalisation, on peut obtenir n'importe quel cercle.

Donc, la première chose que nous avons faite avec Walter, c'est de fournir une démonstration de ce résultat à l'aide de l'algèbre de C^* . Et, je veux dire, la démonstration est facile à comprendre.

1. Transcription en $\text{\LaTeX}$ et traduction : Denise Vella-Chemla, assistée de divers logiciels informatiques.

Essentiellement, on prend, si on veut, l'anneau des polynômes de Laurent, qui est sous-jacent, bien sûr, à la C^* -algèbre du groupe $\mathbb{Z}$, et on divise par le polynôme P , qui est donné, si on veut, par la somme des coefficients p_j multipliés par x^j (i.e. x à la puissance j).

Et il s'avère qu'on peut alors définir, naturellement, une forme linéaire positive sur cet anneau des polynômes de Laurent, qui s'annule sur cet idéal.

On considère ensuite la représentation GNS, la représentation de Gelfand-Neimark-Segal, pour la paire donnée par cette algèbre, et l'état ϕ . Si l'on souhaite connaître l'algèbre de C^* , on dispose d'une représentation unitaire de l'algèbre de C^* des entiers du groupe $\mathbb{Z}$. Dans cette algèbre, l'élément X est unitaire. Il s'ensuit immédiatement que toutes les valeurs absolues des éléments de son spectre sont égales à un.

On constate, bien sûr, que son spectre est constitué des zéros du polynôme P . On en déduit donc immédiatement que les racines de ce polynôme sont toutes de module un. C'était donc un point de départ assez satisfaisant. Ensuite, avec Walter, nous avons démontré un premier théorème, qui est une généralisation simple du résultat précédent.

D'accord, car nous prenons une fonction continue sur l'intervalle $[-L, L]$, une fonction paire, réelle et continue, et nous considérons ensuite l'opérateur sur les fonctions à support dans $[0, L]$, défini par cette transformation

$$(Kf)(x) = \int h(x-y)f(y)dy.$$

Or, il est très facile de voir que K est en fait un opérateur auto-adjoint compact. Plus précisément, c'est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Si l'on suppose que sa plus grande valeur propre est simple, et que l'on note ξ le vecteur propre correspondant, alors, comme on l'a démontré, avec Walter, tous les zéros de la fonction entière, donnée par la transformée de Fourier de ξ , sont réels. Pourquoi dis-je que ce résultat n'est pas surprenant ? Parce qu'en substance, ce théorème s'obtient comme limite du théorème de Carathéodory-Fejér. Autrement dit, on approche la fonction continue par des fonctions en escalier, ce qui nous ramène au cas de la matrice de Toeplitz.

Enfin, on utilise le théorème de Hurwitz, qui stipule que, lorsqu'une limite de fonctions holomorphes converge uniformément, aucun nouveau zéro ne peut apparaître dans cette limite. Or, si l'on contrôle tous les zéros de la suite, on contrôle également les zéros de la limite, ce qui constitue un résultat remarquable et fondamental dans ce contexte. C'était donc relativement simple, car on l'obtient en appliquant simplement la situation précédente.

Mais nous avons démontré avec Walter un théorème bien plus difficile, qui consiste à remplacer la fonction continue par une distribution. Le théorème est le suivant : si l'on considère une distribution réelle sur l'intervalle $[0, L]$, et la distribution paire associée, obtenue par symétrie sur l'intervalle $[-L, L]$, et si l'on suppose, comme précédemment, que cette forme quadratique à noyau de Schwartz définit un opérateur auto-adjoint minoré sur cet espace inverse, et que le minimum de son spectre est une valeur propre isolée simple associée à une fonction propre paire, alors tous les zéros de la fonction (on a que la transformée de Fourier de ce vecteur, défini entre $-L/2$ et $L/2$, est une

fonction entière) sont inclus dans l'ensemble des nombres réels. On peut alors démontrer que tous les zéros de cette fonction entière appartiennent à l'ensemble des nombres réels.

Et cela jouera un rôle-clé, bien sûr, dans ce qui va suivre. La démonstration est en réalité assez complexe, car nous travaillons avec des distributions. Elle consiste à approximer, si vous préférez, la forme quadratique par un type de matrices très particulier.

Il existe donc des matrices obtenues en prenant une base de l'espace de Hilbert donné par les fonctions trigonométriques. Lorsqu'on calcule la matrice de la forme quadratique dans cette base, on constate qu'il s'agit d'un type de matrice très particulier, car ses coefficients sont de la forme $\frac{\psi(n) - \psi(m)}{n - m}$, ou encore, sur la diagonale, $\psi'(n)$, où ψ est une certaine fonction. Ces matrices portent un nom : ce sont des matrices de Galerkin.

Si vous prenez les exemples les plus simples de telles matrices, elles ressemblent à ceci. Sur la diagonale, elles sont assez arbitraires, mis à part la symétrie qui fait que les valeurs sont identiques ici et là. Et en dehors de la diagonale, ce sont également des matrices réelles symétriques².

Mais elles ont une forme très particulière : leurs éléments sont de la forme $\frac{b_i - b_j}{i - j}$. Et voici le point crucial : pour comprendre cette forme très spéciale des matrices, nous utiliserons l'opérateur de Dirac, c'est-à-dire l'opérateur diagonal qui vaut n à la position n , ce qui est bien sûr l'exemple le plus simple de l'opérateur de Dirac dans cette configuration. Un simple calcul montre que le commutateur de l'opérateur de Dirac avec cette matrice est l'opérateur de rang 2. C'est assez facile à comprendre d'après la forme de la matrice, car en prenant le commutateur de Dirac, on multiplie essentiellement l'élément générique par $i - j$. On obtient ainsi uniquement $b_i - b_j$.

Mais il s'agit en réalité d'un opérateur de rang 2. Le lemme principal est donc le suivant : on obtient un opérateur de rang 2 en commutant avec l'opérateur de Dirac. Ensuite, on effectue une perturbation de rang 1 de l'opérateur de Dirac.

On ajoute donc à l'opérateur de Dirac un opérateur de rang 1 approprié. On constate que ce nouvel opérateur est auto-adjoint pour le produit scalaire défini par la forme quadratique. Il s'ensuit que ses zéros sont réels.

Ensuite, nous relierons ces zéros à la transformée de Fourier. Bon, il y a beaucoup de manipulations, etc. Mais en résumé, le résultat, si vous voulez, repose sur l'auto-adjonction, ce qui implique un spectre réel. D'accord. Ce point est détaillé dans l'article que j'ai coécrit avec Walter, intitulé "*Formes quadratiques, zéros réels et échos de l'action spectrale*", car il s'avère étroitement lié à l'action spectrale en physique mathématique. J'aborde maintenant le vif du sujet : l'application de ce résultat à la fonction zêta, un article coécrit avec Katia Consani et Henri Moscovici, comme je l'ai mentionné.

Nous allons donc maintenant examiner le triplet spectral zêta pour l'infrarouge. Ce triplet spectral zêta sera déduit de la démonstration que je viens d'expliquer avec Walter van Suijlekom. En fait,

2. Note de la transcriptrice : symétrie dans l'autre sens, par rapport à la diagonale principale.

l'espace de Hilbert et l'algèbre sont très simples.

Ils correspondent essentiellement, si vous voulez, au quotient des nombres réels positifs par le produit par le carré de λ . Ceci est le domaine fondamental pour ce quotient.

Et l'espace de Hilbert est simplement cela, sauf que sur l'espace de Hilbert, nous allons maintenant placer un produit scalaire, qui est dérivé de la forme quadratique de Weil, que je vais immédiatement expliquer.

L'opérateur de Dirac sera décalé d'une perturbation de rang un par rapport à l'opérateur de Dirac ordinaire pour le cercle. Il s'agit donc, en quelque sorte, du cœur de la construction dans l'infra-rouge. Je dois maintenant expliquer ce qu'est cette forme quadratique de Weil.

L'origine de cette notion remonte donc à Riemann. Dans son article, Riemann a proposé une formule. Son objectif était d'obtenir une formule exacte pour la fonction qui donne le nombre de nombres premiers inférieurs à x . En réalité, il a d'abord donné une formule non pas pour cette fonction, mais pour la fonction qui est la somme des $\frac{1}{n}$ multiplié par le nombre de nombres premiers inférieurs à x à la puissance $\frac{1}{n}$. Bien sûr, cette somme est finie et représente une petite variante du nombre de nombres premiers.

Et ce que Riemann a écrit dans son article, c'est que cette fonction est égale à la fonction logarithme intégral évaluée en x , moins la somme des zéros de la fonction zêta de Riemann du logarithme intégral évalué en x^ρ , plus l'intégrale de x à l'infini de cette expression, qui est une intégrale convergente, et ainsi de suite. Or, il y a un point que je tiens à souligner. Lors de mes conférences, je mentionne toujours que cette formule a été reprise de Riemann dans de nombreux ouvrages, notamment celui d'Edwards sur la fonction zêta de Riemann.

Telle qu'elle est écrite dans les livres, la formule n'a aucun sens. La raison est simple : il n'existe aucune fonction, le logarithme intégral, pour laquelle le terme général de cette série converge vers zéro. Pourquoi ? Parce que si l'on considère les zéros de la fonction zêta de Riemann et que l'on prend x à la puissance ρ , alors, si l'hypothèse de Riemann est vérifiée, tous ces nombres auront pour module $x^{1/2}$ et ils parcourront de manière très dense le cercle de rayon $x^{1/2}$. Par conséquent, le terme général de cette série ne peut en aucun cas tendre vers zéro.

En fait, ce qui est faux, c'est que Riemann était extrêmement rigoureux car il utilisait des fonctions multivoques, et il explique très clairement à la fin de son article quelle branche il convient de considérer. De même, si vous consultez l'article de von Mangoldt, dans lequel il justifie la formule de Riemann, vous constaterez que von Mangoldt était lui aussi extrêmement rigoureux et que l'expression correcte n'est pas le logarithme intégral de x à la puissance ρ , mais l'intégrale exponentielle de $\rho \log x$. Or, lorsque ρ tend vers l'infini, l'exponentielle intégrale de $\rho \log x$ tend vers zéro, contrairement à cette expression, ce qui la rend cohérente. Si vous effectuez un calcul informatique, vous constaterez que cette formule est élégante, mais que celle-ci est erronée. Tandis qu'avec celle-là, la convergence est parfaite. Quelle est donc la formule explicite de Riemann-Weil, connue de Riemann, bien entendu ? Elle stipule que si l'on considère une fonction sur le groupe multiplicatif des nombres réels positifs et que l'on prend sa transformée de Fourier, appelée ici

transformée de Mellin, alors on peut écrire l'évaluation de cette transformée de Fourier en ce qui correspondrait en théorie de la cohomologie à H^0 (*Alain Connes désigne le $\hat{f}(i/2)$*), à H^2 , (*Alain Connes désigne le $\hat{f}(-i/2)$*) puis soustraire la somme sur les zéros de la fonction ζ de Riemann (*Alain Connes désigne l'élément central $\sum_{\frac{1}{2}+is \in Z} \hat{f}(s)$*). On obtient ainsi une somme calculable en termes de nombres premiers, qui est la somme des termes de Weil locaux.

Ces termes de Weil locaux sont simples à calculer pour les nombres premiers, car pour un nombre premier p , ils sont donnés par $\log p$ multiplié par une somme, qui est régulière, convergente, etc., c'est-à-dire la somme des valeurs de la fonction sur les puissances positives et négatives du nombre premier. Mais l'expression de ce qu'on appelle la contribution archimédienne est beaucoup plus complexe. Et cette expression correspond, dans la formule de Riemann, à l'intégrale de x à l'infini de cette quantité.

Mais sauf que, lorsqu'elle est écrite ici, c'est très délicat, car il y a un dénominateur égal à zéro : x moins $\frac{1}{x}$ est égal à zéro pour $x = 1$. C'est pourquoi il faut être très prudent en écrivant cette expression afin qu'elle s'annule pour 1. Ceci étant dit, comme je l'ai mentionné, il existe cette distribution délicate des valeurs principales, mais nous avons un théorème d'André Weil : l'hypothèse de Riemann est équivalente à la négativité de la forme quadratique, obtenue en considérant la somme sur les différents termes de la contribution de Weil.

Bon, c'est un fait, un fait, et c'est déjà assez frappant en soi. Mais en un sens, cela nous donnera, si vous voulez, la forme quadratique que nous recherchons, à un changement de signe près, bien sûr.

Dans l'article co-écrit avec Katia et Henri, nous démontrons que, si l'on considère la distribution définie par la formule de Riemann-Weil, elle vérifie l'hypothèse selon laquelle l'opérateur correspondant est non borné et possède un spectre discret est vérifiée. Ce résultat était fondamental. Nous pouvons donc maintenant appliquer notre théorème avec Walter.

Pour ce faire, il faut examiner l'opérateur correspondant, dont le spectre est donné par les zéros de la transformée de Fourier du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la forme quadratique de Weil. La tâche consiste donc à calculer, à l'aide d'un ordinateur, la plus petite valeur propre, le vecteur propre correspondant, puis à calculer sa transformée de Fourier. J'ai commencé ces calculs en novembre 2024.

Je faisais ce calcul pour λ égal à trois. Voici donc le graphique de la transformée de Fourier que j'avais obtenu. Et bien sûr, vous savez, quand on regarde cette fonction, on ne voit rien, car elle présente une grosse bosse, puis elle semble presque nulle.

Il faut donc prendre de bonnes lunettes et observer ce que la courbe fait autour de 14. Elle coupe l'axe réel autour de 14, et 14 est le premier zéro de zêta. Comme je vous l'ai dit, le deuxième zéro de zêta se situe autour de 21.

Vous continuez donc à observer cette fonction et vous constatez qu'elle coupe la droite réelle exactement à 21, ou très près de cette valeur. Puis, en continuant l'observation, vous constatez qu'elle

la coupe à nouveau aux alentours de 25. Et ceci est toujours valable pour λ égal à trois.

Et vous continuez, et vous constatez qu'elle traverse environ 30 virgule quelque chose. D'accord. À ce moment-là, je ne savais pas comment calculer très précisément les zéros d'une fonction comme cette transformée de Fourier.

En fait, j'avais fait une erreur dans mon système informatique. Du coup, quand j'ai essayé d'augmenter la précision, tout a foiré. Finalement, j'ai trouvé mon erreur.

Et puis, lorsque j'ai poussé le calcul à l'aide d'un petit programme pour déterminer précisément où la fonction change de signe, la correspondance s'est avérée incroyable. En effet, j'avais utilisé ici la valeur trouvée par le zéro de ma transformée de Fourier, et là le zéro correspondant de zêta. Vous voyez donc que, pour toutes ces valeurs, pour tous ces zéros, la concordance était frappante. Au bout d'un moment, la situation est devenue critique.

D'accord, et ceci concernait λ égal à trois. Ensuite, après un certain temps, j'ai découvert qu'il existait une bien meilleure façon de calculer les zéros de la transformée de Fourier de la fonction, car cette transformée de Fourier, lorsqu'on l'exprime sous forme matricielle, peut en fait être factorisée par un polynôme. Il suffit alors de calculer les zéros de ce polynôme.

J'ai donc continué et j'ai calculé ces zéros avec beaucoup plus de précision. Maintenant, pour λ égal à la racine carrée de 12, d'accord, ce qui est un peu plus de trois, puis la racine carrée de 13, et la racine carrée de 14.

Et je vous montre ici la différence entre la valeur que j'ai calculée et le zéro correspondant de zêta.

Ainsi, par exemple, pour la racine carrée de 12, on obtient les 50 premières décimales du premier zéro de zêta. Pour 13, on obtient 55 décimales. Et pour 14, on obtient 60 décimales.

Et cela vaut pour les 50 premiers zéros de zêta. Prenons l'exemple du 13e zéro : on compte 27 décimales, 32 décimales, 37 décimales pour le 13e zéro, et ainsi de suite. À l'époque, c'était la limite que mon ordinateur pouvait atteindre avec Mathematica.

Et bon, alors, évidemment, c'était public puisque c'était dans notre journal avec Katia et Henri. Puis, au bout d'un certain temps, d'autres scientifiques se mirent à effectuer leurs propres calculs, mais avec des moyens bien plus puissants que ceux que je pouvais utiliser avec Mathematica. L'un d'eux était Akiva Groskin.

Akiva Groskin m'a écrit pour me dire que, si vous le souhaitez, il a pu confirmer les résultats du calcul pour 13. Malheureusement, il n'avait pas l'autorisation de publier quoi que ce soit sur Arxiv, j'ai donc dû le financer. Bref, concernant ces calculs, la personne clé est Ronnie Andrews.

D'accord, je vais vous expliquer la situation. En fait, voici ce qui s'est passé : après avoir calculé pour 13 et confirmé mes propres calculs, Groskin a essayé de calculer pour λ égal à 10, c'est-à-dire λ^2 égal à 100. Et là, il a trouvé une valeur propre négative de la forme quadratique.

Alors, je lui ai en quelque sorte écrit : “D’accord, il faut calculer avec plus de précision, etc.” Et vous savez, ce n’est pas possible, car cela invaliderait l’hypothèse de Riemann, évidemment. Mais entre-temps, Ronnie Andrews avait écrit à Henri Moscovici.

Il avait effectué lui-même le calcul pour $\lambda^2 = 100$ et constaté que la valeur propre correspondante était positive pour la forme quadratique exacte. De plus, il avait calculé que pour le premier zéro, le nombre de chiffres possibles pour $\lambda^2 = 100$ était 419.

Donc, vous obteniez 419 chiffres après la virgule pour le premier zéro de zêta pour $\lambda = 10$. D’accord. Et récemment, Ronnie Andrews a découvert que si vous prenez $\lambda = 32$, vous obtenez 999 chiffres après la virgule pour le premier zéro de zêta.

Maintenant, je dois vous expliquer un peu le contexte, car Ronnie Andrews n’est pas mathématicien de profession ; il est architecte logiciel principal dans une grande entreprise du Fortune 500. Et ce qu’il maîtrise, c’est tout simplement incroyable : il utilise des systèmes de calcul très sophistiqués, capables de gérer 1 000 décimales et dotés d’environ 512 cœurs. À titre de comparaison, mon ordinateur personnel à Paris n’en possède que 16. Évidemment, vous le savez, on n’a pas les mêmes moyens³. On dispose donc d’une puissance de calcul extraordinaire, qui est à l’œuvre et qui sera, bien sûr, essentielle pour comprendre ce qui se passe ici.

Mais ce qui est assez clair, c’est que nous nous trouvons aujourd’hui dans une situation où, en fait, cela m’a incité, bien sûr, à écrire une lettre à Riemann. J’ai donc écrit une lettre à Riemann, qui est maintenant publiée dans le *Journal of Open Mathematical Problems*, car on m’avait demandé de rédiger une synthèse sur l’hypothèse de Riemann. Et je n’ai pas résisté à la tentation d’écrire à Riemann, pour lui expliquer, vous savez, tout d’abord, tous ces développements extraordinaires des mathématiques modernes liés à la fonction zêta de Riemann.

Mais alors, je me suis rendu compte que je pouvais expliquer à Riemann que ce que je viens de vous expliquer, il aurait pu le faire parfaitement s’il avait eu un ordinateur. Autrement dit, je lui expliquais qu’il connaissait bien sûr la formule de Riemann-Weil. De plus, l’idée d’utiliser le vecteur propre minimal pour la forme quadratique de Riemann-Weil est exactement la même que celle employée par Riemann pour démontrer le théorème de l’application conforme.

Comme vous le savez, Riemann n’avait pas de démonstration du théorème de l’application conforme, car il appliquait un principe appelé principe de Dirichlet, qui fut réfuté par Weierstrass après la mort de Riemann grâce à un contre-exemple. Seul Hilbert a rendu la démonstration de Riemann rigoureuse. C’est d’ailleurs la même technique d’opérateurs que celle de Hilbert que nous utilisons pour justifier que la forme quadratique possède un spectre discret.

Donc, si vous voulez, elle possède un spectre discret. En fait, ce que je vais expliquer maintenant, et c’est ce que j’ai expliqué après ma lettre à Riemann, c’est que l’on peut désormais suivre les traces de Riemann et tenter de justifier que cette approximation des zéros est une véritable approximation.

3. Note de la traductrice : On ne boxe pas dans la même catégorie, on ne peut pas lutter, la compétition n’est pas équitable.

Eh bien, vous savez, évidemment, c'est juste.

Mais le problème en mathématiques, c'est qu'il faut faire une démonstration. Or, si on fait une démonstration, on en a fini avec l'hypothèse de Riemann (RH). Pourquoi ? Parce que, d'après les résultats de Walter van Suijlekom, on sait que, pourvu qu'on prouve que la plus petite valeur propre est simple, alors on sait que les zéros de cette transformée de Fourier sont tous réels.

Partons donc sur les traces de Riemann et examinons ce qu'il écrit dans son article. Il y définit une fonction qu'il appelle la fonction Ξ . On observe une légère divergence dans la littérature : la fonction notée $\Xi(s)$ n'est pas la fonction Ξ de Riemann, mais la fonction ζ de Riemann complète dont les pôles ont été supprimés. La fonction $\Xi(s)$ de Riemann, quant à elle, correspond à la fonction $\xi(s)$ avec $\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, c'est-à-dire la fonction à valeurs complexes évaluée sur la droite critique.

Donc, maintenant, c'est une fonction réelle, si vous voulez. Bien, et ce que Riemann démontre dans son article, si vous regardez attentivement, c'est que sa fonction

$$\Xi(t) = 4 \int_1^\infty \frac{d\left(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x)\right)}{dx} x^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{1}{2}t \log x\right) dx$$

est donnée par l'intégrale de 1 à l'infini d'une dérivée. C'est exactement la formule de Riemann.

Si oui, ce que vous découvrirez en travaillant un peu avec cette formule de Riemann, c'est qu'elle signifie en réalité qu'une certaine fonction $k(u)$ est obtenue par ce qu'on appelle l'application $\mathcal{E}$ d'une certaine fonction h , et que la fonction $\Xi(t)$ est simplement la transformée de Fourier (ou transformée de Mellin) de cette fonction $k(u)$. Le problème qui se pose alors est de savoir ce qui caractérise cette fonction qui, après application de l'application $\mathcal{E}$, donne la fonction k , laquelle donne la fonction Ξ de Riemann. Il faut donc caractériser cette fonction. Cette fonction n'est pas la fonction d'Hermite.

Il s'agit d'une combinaison de deux fonctions d'Hermite, et il est essentiel de comprendre de quelle combinaison il s'agit. Ceci est lié à un opérateur célèbre, l'opérateur d'Hermite, un pain quotidien pour les physiciens. Cet opérateur correspond à ce que l'on appelle l'oscillateur harmonique en physique.

La fonction $h(u)$ peut donc être caractérisée comme suit. On considère l'opérateur d'Hermite, qui est l'oscillateur harmonique, et la fonction propre normalisée pour les valeurs propres, qui est discrète bien sûr. La fonction Ξ de Riemann est alors simplement la transformée de Fourier de l'application $\mathcal{E}$ appliquée à la fonction h , où h est, à un scalaire multiplicatif près, la seule combinaison linéaire de h_0 , la valeur propre pour la plus petite valeur propre, et h_4 avec intégrale nulle.

Je veux dire que la motivation, qui était certainement celle de Riemann, était de pouvoir appliquer directement la formule de Poisson, et pour cela, il faut que la fonction s'annule en zéro et que sa transformée de Fourier le fasse aussi.

C'est pourquoi on ne peut pas simplement prendre l'exponentielle moins πx^2 , c'est-à-dire la fonction h_0 . Bon. Voici ce qui se passe maintenant.

Ce qui se produit est, là encore, quelque chose que Riemann aurait immédiatement compris. Il existe une variante de l'opérateur d'Hermite qui permet désormais de se localiser sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, où λ est le même qu'auparavant. C'est dans ce cas que l'on observe la forme quadratique de Weil.

Et quel est cet opérateur ? Il s'agit de l'opérateur d'onde prolate. Et à quoi ressemble-t-il ? Eh bien, il ressemble à λ^2 multiplié par l'opérateur d'Hermite, car on a $PW_\lambda := -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$. C'est donc précisément l'opérateur d'Hermite.

D'accord. Mais vous avez ajouté ce terme, qui est $-\partial_x(X\partial_x)$. Et l'effet de ce terme est de créer deux points singuliers dans cet opérateur, qui sont à $x = \pm\lambda$.

C'est ce qui vous permet, si vous souhaitez ce que nous verrons plus tard, que cet opérateur commute avec la projection sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$. À présent, grâce à cet opérateur, vous pouvez fournir une approximation éclairée du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre de la forme quadratique de Weil. Quelle est cette approximation ? Eh bien, vous remplacez $k_\lambda(u) := \mathcal{E}(h_\lambda)(u)$, où h_λ est, à un scalaire multiplicatif près, l'unique combinaison linéaire des deux fonctions propres $h_{0,\lambda}, h_{4,\lambda}$ de cet opérateur d'onde prolate à intégrale nulle.

Vous suivez donc exactement la même méthode que pour Riemann afin d'obtenir la fonction Ξ . D'accord.

Et vous comparez maintenant.

Voilà donc ce que nous avons fait avec Katia en 2021, je crois, oui. Avec Katia, nous avons comparé les fonctions propres de la matrice paire, donc de la forme quadratique de Weil, pour les 16 valeurs de λ^2 , comprises entre 3,5 et 11. L'important, c'est que vous ne voyez qu'un seul graphique.

Le fait que vous ne voyiez qu'un seul graphique signifie que les deux graphiques sont identiques. Sinon, vous verriez deux graphiques.

Donc, je veux dire, cette estimation est plutôt bonne. Désolé. Donc, cette estimation est plutôt bonne pour la fonction propre.

Et maintenant, si cela vous intéresse, il y a une découverte qui est probablement l'une des plus remarquables réalisées par des ingénieurs, des spécialistes de la théorie de la communication, dans la lignée de Shannon. Ils travaillaient aux Bell Labs dans les années 60. L'un d'eux est David Slepian.

Mais enfin, Landau et Pollack ont également mené des recherches et publié plusieurs articles, notamment ceux de Slepian et Pollack. Qu'ont-ils découvert ? Ils ont découvert quelque chose d'une utilité inestimable pour nous, et qui est que le même opérateur, l'opérateur prolate, intervient lorsqu'on tente de contraindre une fonction à avoir son support compris entre $-\lambda$ et λ , et que sa

transformée de Fourier a également son support compris entre $-\lambda$ et λ . D'accord. Et, vous le savez bien sûr, nous savons que c'est impossible, car toute fonction dont le support est compris entre $-\lambda$ et λ , lorsqu'on prend sa transformée de Fourier, cette transformée de Fourier étant dans l'espace de Paley-Wiener, c'est une fonction holomorphe. Elle ne peut donc pas avoir de support dans un intervalle fini. C'est donc impossible.

C'est impossible. Mais ce que les spécialistes de la théorie de la communication ressentaient, c'est que, bien qu'impossible, cela devrait en un sens rester vrai. Pourquoi? Parce que, par exemple, lorsqu'on donne une conférence, on la donne dans un laps de temps précis.

De plus, la fréquence de votre voix est limitée. Cela signifie donc qu'il existe une sorte de fonction dont le support temporel et le support de Fourier sont limités. D'accord, mais comment résoudre ce problème? Eh bien, cela semble très complexe, car il y a deux projections : P_λ et $\widehat{P}_\lambda$.

Pour les mathématiciens, une paire de projections est une véritable aubaine. Pourquoi? Parce qu'une paire de projections représente le groupe diédral. On peut en effet calculer les deux unitaires, données par $1 - 2P_\lambda$ et $1 - 2\widehat{P}_\lambda$.

Il existe deux unitaires de carré 1 qui ne satisfont aucune autre relation, mais qui engendrent, si on le souhaite, le groupe libre $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ lequel est un groupe diédral. Ce groupe diédral est un produit semi-direct des entiers par le groupe à deux éléments. On sait, d'après la théorie de Mackey, que sa théorie des représentations est très simple.

Elle est simplement définie par les orbites de la symétrie sur le dual des entiers, qui est un cercle. Cela signifie que toutes les représentations irréductibles sont bidimensionnelles et sont spécifiées par un angle. Bon, en fait, l'idée, si vous voulez, est de déterminer l'angle entre ces deux projections.

Le premier résultat, et il est très important, est que l'angle formé par ces deux projections, P_λ et $\widehat{P}_\lambda$, présente un spectre discret. De plus, les valeurs propres de l'opérateur cosinus, qui est celui-ci, sont simples.

Elles forment une séquence décroissante tendant vers zéro.

En d'autres termes, le cosinus de l'angle sera pratiquement nul pour la plupart des valeurs, ce qui signifie que ces deux projections sont presque orthogonales. Cependant, au tout début, les premières valeurs propres sont extrêmement proches de un, ce qui revient à dire que les deux projections sont quasiment identiques. Or, la découverte remarquable de Slepian et de ses collaborateurs est que les fonctions propres correspondantes sont les fonctions d'onde sphéroïdales prolate.

En d'autres termes, les fonctions propres de cet opérateur angulaire sont les solutions, c'est-à-dire les fonctions propres de l'opérateur différentiel, que nous avons vu précédemment : l'opérateur d'onde prolate. Cela signifie notamment que lorsque nous considérons h_0 et h_4 , ce sont les fonctions qui font en sorte que les deux projections coïncident presque parfaitement. Ainsi, si vous le souhaitez, le lien est établi entre les deux, et voici comment nous l'avons utilisé avec Katia. Nous disions : "eh bien, après tout, nous appliquons donc l'application $\mathcal{E}$ ". Or, la formule de Poisson nous indique

que, pour l'application $\mathcal{E}$, appliquer la transformée de Fourier d'une fonction revient à appliquer $\mathcal{E}$ à cette fonction, mais évaluée en $\frac{1}{x}$. Autrement dit, s'il était vrai qu'une fonction à support limité et dont la transformée de Fourier est également à support limité existait, on obtiendrait un élément appartenant au radical de la forme quadratique de Weil localisée, c'est-à-dire de la forme quadratique de Weil localisée sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\lambda}, \lambda\right]$. Nous savons que c'est impossible, mais c'est presque vrai. C'est presque vrai. Et le fait que ce soit presque vrai nous a évidemment obligés à comparer les valeurs minuscules du cosinus, qui, pour une raison qui m'échappe, est donné ainsi. Et bien sûr, c'est tellement minuscule que si l'on prend le logarithme de cette différence, et que le logarithme de cette différence, même pour $\lambda^2 = 17$, on obtient quelque chose comme -180 . Je veux dire, c'est donc incroyablement petit. Et quand on l'a comparé aux minuscules valeurs propres de la forme quadratique de Weil, lorsqu'on la compare aux valeurs propres minuscules de cette forme, et qu'on fait le travail correctement en imposant une contrainte sur h_0 et h_4 , on constate que les deux graphiques coïncident. On découvre donc qu'il existe une sorte de conspiration au niveau de ces valeurs propres minuscules, qui indique que l'on est sur la bonne voie lorsqu'on tente de représenter la plus petite fonction propre de la forme quadratique de Weil à l'aide de fonctions sphéroïdales allongées (prolates).

Bon, alors voilà la situation. Voilà la situation. Et bien sûr, pour vous donner une idée de la petitesse de la valeur propre, il s'avère que pour l'angle, la quantité, qui est $1 - \chi_2$, qui, si vous voulez, comme le sinus carré, évolue lorsque λ tend vers l'infini, ou L est le logarithme de λ vers $\log \lambda$, lorsque L tend vers l'infini, le comportement est exponentiel de l'exponentielle.

Le comportement est donc exponentiel en $-4\pi \exp(L)$ ⁴, ce qui est incroyablement petit. D'accord. Donc, je veux dire, c'est... et j'avais donc émis une hypothèse dans mon article pour Riemann concernant la petitesse des valeurs propres pour la forme quadratique de Weil.

Cette hypothèse a été confirmée par des calculs extrêmement complexes. En 2021, avec Katia, nous avons obtenu un résultat expérimental : l'espace des vecteurs propres associés à la k -ième plus petite valeur propre de la forme quadratique de Weil correspond à la projection allongée (projection prolate). Concrètement, nous n'avons pas seulement cherché à identifier la plus petite valeur propre, mais nous avons également appliqué le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, et nous avons constaté une concordance avec les valeurs propres suivantes de la forme quadratique de Weil.

Très bien, donc dans cette configuration, la possibilité de démontrer cette approximation est bien sûr ouverte. Et, que l'on parvienne ou non à une telle démonstration, cela ouvre un champ d'exploration fascinant : celui de l'interaction entre deux mondes totalement différents. D'un côté, le monde de Riemann et de Weil, celui de la forme quadratique et de toutes ces expériences.

Il existe aussi le monde de Shannon, de Slepian et de la théorie de l'information, où l'on effectue des calculs extrêmement complexes à l'aide de ces projections et de l'opérateur prolate. Le lien entre les deux est établi par la formule de la trace, que j'ai démontrée dans mon article de 1998. Dans cette formule de trace, j'ai reformulé l'expression de manière à ce qu'elle utilise les mêmes étiquettes que celles de Slepian et de Pollack.

4. Si $L = \log \lambda$, on a $\exp(\log \lambda) = \lambda$?

The image shows a presentation slide with a title in red, a mathematical formula, and a video feed of a speaker. The title is 'Trace Formula : Weil n Slepian'. The formula is
$$-\sum_{v \in S} W_v(f) = \log(TW) f(1) + \text{Trace}(\vartheta(f)(1 - P_T^S - \hat{P}_W^S))$$
. The video feed shows a man with a beard and glasses, identified as 'alain.connes'.

Le nombre T représente une limitation temporelle, et le nombre W une limitation fréquentielle. La formule permet d'obtenir, si besoin, une égalité d'opérateurs, où l'on trouve d'une part le côté de Weil et d'autre part le côté prolate, le côté Slepian. Autrement dit, nous n'en sommes qu'au tout début de la recherche.

Mais j'ai le sentiment que, à bien des égards, cette recherche ressemble un peu aujourd'hui à celle des physiciens. En d'autres termes, nous avons quelque chose comme le CERN. Autrement dit, lorsque je faisais les calculs avec mon pauvre logiciel Mathematica, etc., je ne voyais évidemment que la surface des choses.

Mais maintenant que nous avons des personnes comme Ronnie Andrews, Akiva Groskin ou Breno Andrade⁵, cela signifie que nous pourrions explorer beaucoup plus en profondeur et formuler des conjectures. Et une fois que nous aurons trouvé la conjecture correcte pour le vecteur propre minimal de la forme quadratique de Weil, alors nous aurons de bonnes chances, je pense. Et l'une des leçons que nous avons retenues, et que tout le monde devrait retenir, c'est que c'est une erreur totale de penser que l'hypothèse de Riemann a un lien avec l'infinité des nombres premiers.

Il s'agit d'une erreur totale, car le critère de Weil n'utilise qu'un nombre fini de nombres premiers. La conjecture de Riemann est vraie si et seulement si ce critère est vrai, et il n'utilise lui aussi qu'un nombre fini de nombres premiers.

La deuxième crainte est qu'on puisse croire que pour obtenir tous les zéros, il faut connaître tous les nombres premiers et effectuer une quelconque convergence. C'est totalement faux. En effet, je vous ai expliqué qu'il existe une méthode pour accéder aux zéros infiniment plus directe, qui vous donne un résultat avec une approximation incroyable.

Donc, si vous cherchez une réponse pour l'infrarouge, ce n'est évidemment pas une réponse pour l'ultraviolet. En effet, l'opérateur utilisé pour l'infrarouge se comporte comme une progression

5. Breno Wilson de Andrade Silva.

arithmétique à l’infini. Il n’a donc pas le comportement attendu à l’infini. Le comportement dans l’ultraviolet est un sujet sur lequel nous travaillons avec Henri Moscovici depuis 2021.

L’idée, c’est que, pour comprendre le comportement ultraviolet des zéros de zêta, il faut connaître la nature géométrique de l’espace sous-jacent aux zéros de zêta. On connaît bien la formule “Peut-on entendre la forme d’un tambour?”, qui nous dit, pour les surfaces par exemple, comment obtenir des informations sur leur aire, celle de leur frontière, etc., grâce à l’expansion de la chaleur. Il y a environ deux ans, j’ai calculé l’expansion de la chaleur complète d’un opérateur hypothétique qui aurait déterminé le spectre des zéros de zêta.

Et je veux dire, c’est vraiment un exercice, je dois le préciser, car pour effectuer ce calcul, il n’est pas nécessaire d’utiliser les nombres premiers, leur contribution étant essentiellement une contribution d’instanton. Donc, pour réaliser ce calcul, il suffit d’utiliser uniquement la contribution archimédienne aux formules explicites. Et en faisant cela, je suis certain que l’ia pourrait le faire en un clin d’œil.

Bon, j’espère ne pas avoir fait d’erreur, mais j’ai pu calculer le développement asymptotique complet, ce qui est inhabituel; il est très rare de pouvoir calculer tous les termes d’un développement asymptotique. Ces calculs utilisent les nombres de Bernoulli et les nombres d’Euler. On constate que les termes impairs font intervenir les nombres de Bernoulli, et les termes pairs, les nombres d’Euler.

Bon, je vous rappelle ce que sont les nombres de Bernoulli, vous le savez. Les nombres d’Euler sont un peu différents, mais du même ordre de grandeur. Et ils satisfont des identités remarquables.

D’accord. Voici donc la beauté de la chose. L’ultraviolet, si vous voulez, est tel que, d’après Riemann et von Mangoldt, on sait que le nombre de valeurs propres, le nombre de zéros de la fonction zêta de Riemann, dont la partie imaginaire est comprise entre zéro et E , est de la forme suivante :

$$\frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi} + O(\log(E)).$$

Et pour le développement asymptotique, cela revient à dire que l’on a ce terme

$$\frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{4\sqrt{\pi}\sqrt{t}} - \frac{(\log 4\pi + \frac{1}{2}\gamma)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}}$$

pour le développement asymptotique.

Mais comme vous pouvez le constater, trouver un opérateur qui fait le travail ne sera pas chose aisée, car il s’agit du logarithme de 4π plus la moitié de la constante d’Euler. Ce n’est pas quelque chose que vous pouvez obtenir facilement⁶. Ce n’est pas si simple.

Voici l’histoire. Ça, c’est la vérification, c’est le graphe qui montre que le développement est correct. Donc, ce que nous avons fait avec Henri en 2021, c’est que nous avons examiné le même opérateur, l’opérateur sphéroïdal prolata, et nous avons publié dans les Actes de l’Académie nationale

6. “Vous ne le trouvez pas par hasard sous vos chaussures”, ou “ça ne se trouve pas sous le sabot d’un cheval”.

des sciences un article dans lequel nous avons constaté que le spectre UV de l'opérateur prolate coïncide avec les zéros de zêta.

Voilà donc ce que je voudrai expliquer maintenant, pour conclure. Je dois d'abord vous convaincre du lien entre l'opérateur prolate et ces deux projections, P_λ et $\widehat{P}_\lambda$. Voyez-vous, quand on écrit, dans l'espace des phases, ce que sont ces deux projections ? Elles sont en fait définies par quatre lignes, par les droites $q = -\lambda$ et $q = \lambda$, ça, c'est pour la projection spatiale. Pour la projection de Fourier, ces droites sont celles définies par $p = -\lambda$ et $p = \lambda$. L'opérateur prolate apparaît lorsqu'on cherche le flot hamiltonien qui préserve ces quatre droites.

Donc, vous prenez l'équation du produit de ces quatre droites, d'accord ? Et vous trouvez le flux hamiltonien, qui ressemble à ceci. Il est donc parfaitement contrôlé par ces deux projections. Et cela vous donne l'opérateur.

En fait, comme le symbole... d'accord, il faut quantifier, donc il faut faire attention, mais le symbole est essentiellement $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$, ce qui est l'équation de ces droites. Bon. Or, il y a longtemps, en fait, dans mon article, non, non, dans mon cours au Collège de France en 1998, j'avais étudié l'opérateur prolate.

Désormais, on ne considère plus cet opérateur comme défini sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, mais sur la droite entière. Or, j'ai constaté que cet opérateur est, premièrement, invariant par transformation de Fourier, ce qui est trivial. Mais ce qui est loin d'être trivial, c'est qu'il n'est pas auto-adjoint. Il possède des indices de déficience de von Neumann, qui valent 4 et 4. Il n'est donc pas évident de trouver une extension auto-adjointe qui commute avec P_λ et $\widehat{P}_\lambda$, mais il en existe une, et une seule. C'est ce que j'avais démontré dans mon cours.

Puis, avec Henri, nous avons repris l'entreprise, environ 23 ans plus tard, et nous avons examiné cet opérateur sur l'ensemble de la ligne. Et nous avons été stupéfaits de constater que, en fait, cet opérateur avait un spectre discret, ce à quoi je ne m'attendais pas du tout. Je m'attendais plutôt à ce qu'en dehors de l'intervalle, on ait un spectre continu ou quelque chose de ce genre.

Nous avons donc constaté qu'il possède un spectre discret. Très bien. Sachant qu'il possède un spectre discret, nous pouvons maintenant calculer ce spectre.

Nous avons donc utilisé l'approximation semi-classique, comme tout physicien le ferait. Nous avons examiné cette approximation semi-classique, calculé les aires, etc. Et à notre grande surprise, nous avons constaté que calculer le nombre de zéros, etc., s'avérait très complexe.

Mais après beaucoup de travail, nous avons découvert que la formule pour le nombre de zéros ressemblait trait pour trait à la formule de Riemann. Génial ! C'était vraiment génial, sauf qu'on avait un peu triché.

Quand a-t-on un peu triché ? Vous allez voir... Bon, on a trouvé, si vous voulez, l'opérateur de Dirac correspondant en utilisant la méthode de Darboux, etc. Je ne veux pas trop vous ennuyer avec ça, car je veux vous dire où on a triché.

Notre erreur résidait dans le fait que nous affirmions que l'opérateur $2D$ avait un spectre simple discret, d'accord, et qu'il coïncidait avec les zéros de zêta. Certes, mais il s'agissait de $2D$. Or, cela ne fonctionnait pas, car nous avons introduit le facteur 2 pour qu'il corresponde exactement aux zéros de zêta.

Ce n'était pas agréable, d'accord ? Enfin, ça fonctionnait. On cherchait, on obtenait des graphiques identiques, etc., mais ça ne m'a jamais satisfait.

C'était le genre de chose qu'on fait, ça marche, mais on en paie le prix, parce que d'une certaine manière, c'est un peu comme tricher. On a donc calculé la géométrie correspondante, qui est un triplet spectral. C'était la géométrie minkowskienne, et de plus, Jean-Pierre Ramis et ses collaborateurs ont pris le relais et ont effectué des calculs bien plus précis que les miens.

J'avais calculé le spectre de cet opérateur de manière très rudimentaire. Ils ont fait beaucoup mieux avec de nombreuses décimales, etc., mais il y avait ce problème en $2D$. Nous l'avons résolu très récemment avec Henri, et la manière dont nous l'avons résolu est assez remarquable. Henri a eu l'idée d'effectuer une rotation de Wick, c'est-à-dire de remplacer λ par $i\lambda$. On obtient ainsi un nouvel opérateur.

$$-W_{i\lambda} := -\partial_x((\lambda^2 + x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2.$$

Ce nouvel opérateur est désormais un opérateur très standard. En calculant son spectre, nous avons constaté que pour $\lambda = 2$, alors qu'auparavant, on prenait $\lambda = \sqrt{2}$, le résultat est parfait. L'opérateur ne contient plus de facteur 2. En comparant son spectre avec les zéros de ζ , on obtient ce type de graphe. Il est donc impossible de distinguer le n -ième zéro de ζ de la n -ième valeur propre du nouvel opérateur.

J'insiste il s'agit bien du même n . Ce n'est pas comme si deux courbes se ressemblaient. Non, le n est identique pour les deux images. Et si l'on compare le nombre de valeurs propres au nombre de zéros de zêta, on constate qu'ils diffèrent d'au plus 2 jusqu'à 100, et même plus loin. Bien sûr, ce n'est pas la fin de l'histoire, mais cela nous indique que, si on le souhaite, il existe désormais un triplet spectral associé à cette nouvelle version avec une rotation de Wick.

Il y a un triplet spectral honnêtement correct et sa géométrie ressemble infiniment à une pointe (*a cusp*). Une pointe semblable à celles que l'on obtient à partir de formes modulaires, par exemple. Elle commence vraiment à ressembler à une pointe.

Ce sont donc des indices, des indices extrêmement forts dans l'infrarouge, des indices extrêmement forts dans l'ultraviolet. Bon, il faut maintenant un déclic pour les assembler et aller plus loin. Mais ce que je trouve absolument fascinant, c'est que Riemann nous a offert un merveilleux mystère, qui n'a pas fini de nous émerveiller par sa profondeur.

Je veux dire, il y a une profondeur et une émotion incroyables lorsqu'on découvre ne serait-ce qu'une infime partie de ce mystère, une joie immense. Voilà, je conclus ici mon intervention.