Transcription et traduction de l'intervention d'Alain Connes dans le cadre de la conférence intitulée *Fundamental geometries*, seconde conférence JHU [1]-Unibo, qui s'est tenue à Bologne en Italie du 22 au 26 juin 2026.

Sur la géométrie absolue de Spec $\mathbb{Z}$

Alain Connes

Très bien, mon exposé sera, si vous le souhaitez, divisé en trois parties. La première portera sur le jacobien de Spec $\mathbb{Z}$. La deuxième présentera une nouvelle structure sur Spec $\mathbb{Z}$ au-dessus de $\mathbb{F}_1$, répondant ainsi à une question posée par Peter Scholze. La troisième, relative à la géométrie non commutative, sera le fruit d'une collaboration avec Katia Consani et Henri Moscovici, qui interviendra cet après-midi.

Bon, alors, commençons par le début. Voyez-vous, il y a 30 ans, en revenant de Seattle où s'était tenue une conférence pour le centenaire du théorème des nombres premiers, j'ai découvert cet espace et j'ai rédigé une courte note aux Comptes-Rendus qui traitait, si vous voulez, de la relation entre cet espace, l'espace des classes d'adèles, et l'hypothèse de Riemann. J'ai envoyé cette note à Bombieri, qui m'a répondu - c'était il y a 30 ans - en disant qu'il considérait cela comme une avancée majeure dans la recherche du cadre adéquat pour résoudre l'hypothèse de Riemann.

Il était donc extrêmement optimiste. De plus, il a indiqué qu'à l'époque, il envisageait la possibilité d'utiliser la puissance symétrique infinie de cet espace des classes d'adèles pour tenter de déterminer ce qui jouerait le rôle du jacobien dans ce contexte. En d'autres termes, il affirmait que le jacobien, lorsqu'on considère une courbe, est quasiment identique, en d'autres termes, il est birationnellement équivalent, à la puissance symétrique de la courbe à la puissance de son genre. Mais comme nous le savons tous, dans le cas de Spec $\mathbb{Z}$, le genre doit être infini, car s'il ne l'était pas, il serait impossible de trouver les zéros de zêta dans la région. Pendant des années, j'ai donc cru que je n'avais pas le bon espace, car j'utilisais l'espace des classes d'adèles.

L'espace des classes d'adèles donnait les zéros de zêta sous forme d'un spectre d'absorption. Mais d'après le courriel de Bombieri, je comprenais que je me trouvais en quelque sorte dans la même situation que Weil, lorsqu'il avait la courbe, mais pas encore le jacobien, qu'il a utilisé, bien sûr, pour démontrer l'hypothèse de Riemann pour les courbes. Donc, ce que nous avons découvert, le premier point abordé concerne nos résultats obtenus avec Katia cette année, plus précisément en janvier, nous avons donc déposé un article à ce sujet sur Arxiv. Il révèle que l'espace des classes d'adèles est en fait *déjà* le jacobien, ce qui est véritablement miraculeux, car cela signifie qu'il n'est pas nécessaire de chercher bien loin pour trouver cet espace. Il est déjà là.

Ainsi, cela jouera un rôle majeur, car il existe une structure que nous n'avons jamais utilisée auparavant pour cet espace des classes d'adèles : la structure monoïde. Et cette structure monoïde, à laquelle nous n'avions pas pensé, remplace la structure de groupe dans le jacobien. D'accord.

1. John Hopkins University

Je vais donc vous expliquer cela. Deuxièmement, le fait d'avoir ce jacobien, etc., ne vous indique pas encore ce qu'est la courbe, car cela signifie que l'espace des classes d'adèles n'est pas la courbe, la courbe est à l'intérieur, la courbe est définie par l'application d'Abel-Jacobi et vous avez cette application pour savoir où se trouve la courbe à l'intérieur.

De plus, une fois sa position interne identifiée, il faut trouver sa structure. Et bien sûr, je veux dire que cette courbe est de type $\mathbb{Z}$. Or, des études ont été menées sur $\mathbb{Z}$, notamment à l'aide de la topologie étale. Cependant, la topologie étale ne permet pas de trouver les zéros de zêta, car les différents espaces cohomologiques obtenus sont tous de dimension finie.

On sait donc qu'avec la structure étale, Spec $\mathbb{Z}$ s'apparente à une 3-sphère. Cependant, il est impossible d'y trouver les zéros de zêta. Un cas test très important pour cette nouvelle structure sur Spec $\mathbb{Z}$ est une idée heuristique proposée par Peter Scholze.

Cette idée heuristique nous indique que si l'on considère un corps algébrique clos et complètement valué de caractéristique p, alors l'ensemble des éléments à valeurs dans F (donc, rappelons que F est le corps) sur $\mathbb{Z}$ est un bon remplacement de l'ensemble des points F-valués de la courbe de Fargues-Fontaine avec les points du perfectoïde F lui-même, tous les perfectoïdes-tilts, ce qui est égal à F. Cela devrait jouer le rôle des points de $(\text{Spec } \mathbb{Z})/F$. Et comme nous le verrons, notre nouvelle structure remplit exactement cette condition, voire une forme plus forte, où il n'est pas nécessaire de prendre F de caractéristique p. Enfin, le troisième point que j'aborderai concerne la géométrie non commutative : dès le départ, je trouvais les zéros de zêta sous forme de spectre d'absorption. Mais il s'agit d'une découverte récente, qui remonte à environ un an et demi, lorsque j'effectuais des calculs.

Et par hasard, en effectuant des calculs basés sur une idée que j'avais développée avec Walter van Suijlekom, j'ai découvert des valeurs très proches des zéros de la fonction zêta. Nous avons donc approfondi cette idée avec Henri Moscovici et Katia Consani. Le résultat est absolument stupéfiant : contrairement à l'idée reçue selon laquelle les zéros de la fonction zêta sont dus à l'infinité de nombres premiers et n'apparaissent qu'à cause du produit d'Euler infini, nous avons trouvé un moyen d'accéder à ces zéros en considérant un nombre très restreint de termes du produit d'Euler.

En fait, je vais vous montrer ce que l'on obtient en ne considérant que les nombres premiers 2, 3, 5, 7 et 11, auxquels on ajoute 13. Cela change complètement notre perspective sur les zéros de la fonction zêta. De plus, un théorème général nous indique que, quelle que soit l'approximation que nous faisons des zéros, ils se situent sur la droite critique.

Je vais donc vous montrer le tableau. Voici un tableau numérique.

	$\lambda = \sqrt{12}$	$\lambda = \sqrt{13}$	$\lambda = \sqrt{14}$
1	3.41×10^{-50}	2.44×10^{-55}	1.07×10^{-60}
2	5.89×10^{-47}	4.5×10^{-52}	2.08×10^{-57}
3	5.18×10^{-45}	4.16×10^{-50}	$2. \times 10^{-55}$
4	4.2×10^{-42}	3.65×10^{-47}	1.89×10^{-52}
5	7.84×10^{-41}	7.11×10^{-46}	3.81×10^{-51}
6	1.07×10^{-38}	1.06×10^{-43}	6.13×10^{-49}
7	9.42×10^{-37}	$1. \times 10^{-41}$	6.17×10^{-47}
8	1.05×10^{-35}	1.19×10^{-40}	7.66×10^{-46}
9	3.25×10^{-33}	4.12×10^{-38}	2.94×10^{-43}
10	2.99×10^{-32}	3.98×10^{-37}	2.96×10^{-42}
11	3.76×10^{-31}	5.5×10^{-36}	4.42×10^{-41}
12	1.87×10^{-29}	3.04×10^{-34}	2.68×10^{-39}
13	1.28×10^{-27}	2.29×10^{-32}	2.19×10^{-37}

Dans ce tableau, à gauche, vous voyez de quel zéro je parle.

Donc, il s'agit des premiers zéros de zêta, soit environ 14, et ainsi de suite. Ici, j'ai indiqué l'approximation obtenue en ne considérant que les nombres premiers jusqu'à 11. Le nombre 12 représente donc la limite supérieure des nombres premiers.

Pour le premier nombre, vous obtenez 50 décimales. Pour le second, vous en obtenez 47. Mais si vous poussez jusqu'à 13, vous obtenez 55 décimales. Si vous poussez jusqu'à 14, vous obtenez 60 décimales. À l'époque, j'utilisais donc une simple calculatrice informatique.

Et depuis lors, plusieurs groupes indépendants de personnes ont entrepris le même calcul.

Bien sûr, quand j'y réfléchissais, j'avais un programme informatique. Mais avec un programme informatique, on peut toujours critiquer et se demander comment le prouver. C'était donc très encourageant de voir que d'autres personnes faisaient des calculs. Et maintenant, certains ont réussi à obtenir, pour le premier zéro, 999 décimales exactes.

Lorsque j'ai constaté ce résultat, j'ai écrit à Riemann. Cette lettre figure dans un article que j'ai rédigé sur l'hypothèse de Riemann pour la nouvelle revue, le *Journal of Open Problems in Mathematics*. J'ai écrit à Riemann car, en juin dernier, j'ai été invité à Varèse, où se trouve un Centre

Riemann [2].

Et avant de partir pour Varèse avec ma femme, nous sommes allés visiter l'endroit où Riemann est mort en 1865. Et nous sommes allés sur la tombe de Riemann. Là-bas, je me demandais ce que je pourrais bien dire à Riemann pour le rassurer quant à la véracité de son hypothèse. Car c'est un fait.

C'est donc un fait avéré. C'est un fait calculatoire. Et si quelqu'un peut prouver que ces zéros, que cette approximation est vérifiée, alors l'hypothèse de Riemann est démontrée.

Bon, maintenant, il vous faut démontrer que ce fait numérique est bien un fait mathématique. J'y reviendrai à la fin de mon exposé. Mais vous voyez, c'est du concret.

Donc, la première partie concerne ce que nous appelons, avec Katia, les diviseurs arithmétiques. Voyez-vous, si vous prenez les diviseurs ordinaires sur Spec $\mathbb{Z}$, vous n'obtenez aucun résultat. Pourquoi ? Parce que les diviseurs ordinaires, qu'est-ce que c'est ? Ils vous donnent un entier pour chaque nombre premier, ce qui vous permet de définir la possibilité d'avoir un pôle de cet ordre.

Arithmetic divisors

An arithmetic divisor on Spec $\mathbf{Z}$ is a formal sum :

$$D = \sum_p n_p\{p\}$$

where the coefficients n_p belong to $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ and satisfy the condition that $n_p < 0$ for at most finitely many rational primes p.

$$\mathcal{L}(D) = \{x \in \mathbf{Q} \mid v_p(x) \geq -n_p \text{ for all primes } p\}.$$

The map $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ defines a bijection between the set of arithmetic divisors Div(Spec $\mathbf{Z}$) and the set of rank-1 subgroups of $\mathbf{Q}$.

En utilisant les règles ordinaires, on n'autorise qu'un nombre fini de pôles d'ordre fini. Dans ce cas, le calcul du jacobien conduit à un jacobien trivial. Ceci amène, d'une certaine manière, à penser que Spec $\mathbb{Z}$ a une structure d'espace projectif, $\mathbb{P}^1$, et donc une cohomologie triviale.

2. Le Centre Riemann à Varèse, en Italie, est connu formellement sous le nom de RISM (Riemann International School of Mathematics). Situé dans l'ancienne Villa Toeplitz, c'est une institution prestigieuse non lucrative fondée en 2009 et dédiée à l'éducation de haut niveau et à la recherche en mathématiques pures et appliquées.

Bien sûr, nous savons que sa cohomologie n'est pas triviale à cause des zéros de la fonction zêta. Alors, comment y parvenir ? Eh bien, on y parvient en assouplissant la condition de diviseur. Et voici comment on l'assouplit : on considère désormais un diviseur comme une somme infinie, indicée par les nombres premiers, où les coefficients peuvent être infinis.

Ainsi, à certains endroits, on autorise des pôles d'ordre quelconque. Mais on n'impose pas de zéros. Autrement dit, il n'y aura qu'un nombre fini de coefficients strictement négatifs.

Maintenant, si vous avez un tel diviseur, un diviseur arithmétique, vous pouvez définir les sections du "faisceau" correspondant. Et qu'est-ce que c'est ? C'est un ensemble de nombres rationnels tels que, pour chaque nombre premier, la valuation de ce nombre rationnel est supérieure ou égale à $-n_p$. Mais c'est l'histoire habituelle : lorsqu'on a un diviseur, on ajoute le diviseur aux diviseurs principaux pour définir l'ensemble des sections.

Il s'avère donc que c'est un fait simple, vérifiable et bien connu, que les diviseurs de ce type sont en correspondance biunivoque avec les sous-groupes de rang un des nombres rationnels. Ainsi, tout sous-groupe des nombres rationnels est entièrement défini par les valeurs qu'il prend pour chaque nombre premier. Ces nombres premiers sont, si on le souhaite, indépendants les uns des autres grâce au théorème de Bézout.

Vous obtenez donc cela. De plus, vous avez une structure de monoïde évidente sur cet espace. Et nous avons maintenant un monoïde quotient, car on peut diviser par les diviseurs principaux, comme on le fait habituellement en géométrie algébrique.

Vous voyez donc que les diviseurs principaux forment un sous-groupe de ce monoïde, ce qui permet la division. Concernant les sous-groupes de $\mathbb{Q}$, cela signifie simplement qu'ils sont isomorphes, car ce sont des groupes de rang un. Et lorsque deux groupes de ce type sont isomorphes, ils le sont par multiplication par un nombre rationnel. C'est très facile à voir, car il suffit de déterminer où se place un élément. Tous les autres éléments se placeront alors automatiquement à l'endroit correspondant. On obtient ainsi une bijection entre ce monoïde de Picard arithmétique et un ensemble de classes d'isomorphisme de groupes abéliens de rang un sans torsion.

Picard monoid of $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$

The arithmetic Picard monoid of $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ is the quotient

$$\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}\mathbf{Z}) = \operatorname{Div}(\operatorname{Spec}\mathbf{Z}) \big/ \operatorname{PDiv}(\operatorname{Spec}\mathbf{Z}),$$

where $\operatorname{PDiv}(\operatorname{Spec}\mathbf{Z})$ denotes the subgroup of principal arithmetic divisors.

$$L_1 \cong L_2 \iff L_1 = qL_2,\ q \in \mathbf{Q}^\times$$

The assignment $D \mapsto \mathcal{L}(D)$ induces a bijection between the arithmetic Picard monoid $\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec}\mathbf{Z})$ and the set of isomorphism classes of torsion-free rank-1 abelian groups.

À ce stade, vous pourriez être totalement perplexe et vous dire : “Ah, d’accord, cet espace est facile à comprendre.”. Pas du tout. Il s’agit d’un prototype d’espace non commutatif.

Et si vous voulez, voici ce qui se passe : il s’agit précisément du quotient d’un espace borélien standard par une relation d’équivalence ergodique. Qu’est-ce que cela signifie ? Cela signifie qu’on ne peut pas classifier de tels groupes par des invariants réels.

Pourquoi ? Parce que tout invariant réel que l’on peut construire est une fonction mesurable. Et la fonction mesurable sur un tel espace est presque partout constante. Il s’agit donc d’un prototype d’espace non commutatif.

Pic($\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}$)

An arithmetic divisor on $\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}$ is a pair $\mathcal{D} = (L, \|\cdot\|)$ where :

- L is a torsion-free abelian group of rank 1.
- $\|\cdot\|$ is a semi-norm on the real vector space $L_{\mathbf{R}} = L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ which is proportional to the standard absolute value $|\cdot|$ on $\mathbf{R}$ (via any identification $L_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}$)

The arithmetic Picard monoid Pic($\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}$) is the set of isomorphism classes of arithmetic divisors on $\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}}$ endowed with the product $\mathcal{D}_1 \cdot \mathcal{D}_2$.

8

L'étape suivante consiste donc à introduire la place archimédienne. Notre introduction de la place archimédienne est parfaitement similaire à celle d'Arakelov dans sa théorie. Cependant, nous l'appliquons ici à une classe de diviseurs beaucoup plus large, comme je l'ai expliqué précédemment.

Alors, que fait-on ensuite ? On prend l'un de ces diviseurs arithmétiques et on définit l'accès à l'espace archimédien en lui attribuant une norme. On obtient ainsi un groupe de rang un. On peut le tensoriser avec $\mathbb{R}$. Et on peut définir une norme comme étant la norme de ce produit tensoriel.

Le produit tensoriel avec $\mathbb{R}$ est unidimensionnel. On obtient donc une famille scalaire de normes. C'est très simple.

Et il reste vrai qu'il s'agit d'un monoïde car on a une notion de produit, ce qui est assez évident.

Ok, donc le premier résultat que nous avons trouvé avec Katia est que lorsque vous faites cela, lorsque vous effectuez cette opération, lorsque vous définissez cet espace, ce monoïde de Picard, alors vous avez un théorème fondamental. Il s'agit du secteur de Riemann de l'espace des classes d'adèles.

Autrement dit, cet espace quotient, qui est un espace non commutatif, s'avère canoniquement isomorphe au secteur de Riemann de l'espace des classes d'adèles. En effet, l'espace des classes d'adèles est le quotient des adèles par le groupe multiplicatif des nombres rationnels. De plus, lorsqu'on prend le quotient à droite par les éléments inversibles du complété profini de $\mathbb{Z}$, qui est le noyau du module dans le groupe des classes d'idèles, on obtient que le caractère de Hecke (*Grössencharakter*) est trivial, ou, si l'on préfère, l'élément neutre sur $\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$.

On obtient donc précisément le secteur de Riemann dans l'espace des classes d'adèles. Voici ce qui

se passe ensuite : nous avons étendu le secteur de Riemann de l'espace des classes d'adèles à un espace que je pourrais vous définir sans mentionner les adèles.

Je ne vous ai pas expliqué ce que sont les adèles. Mais je vous ai expliqué ce que sont les groupes libres sans torsion de rang un munis d'une norme. Et à isomorphisme près, ils correspondent exactement à l'espace recherché.

La division par $\mathbb{Q}^\times$ est celle que nous avons déjà rencontrée. En effet, lorsque je vous ai dit que deux groupes étaient isomorphes s'ils étaient obtenus l'un à partir de l'autre par multiplication par un élément de $\mathbb{Q}^\times$, c'est là que $\mathbb{Q}^\times$ apparaît. Ainsi, si vous voulez, $\mathbb{Q}^\times$ que j'utilisais pour diviser les adèles et obtenir l'espace des classes d'adèles est, en réalité, simplement l'équivalence linéaire des diviseurs. C'est tout. Il s'agit de l'équivalence linéaire des diviseurs. Ok. C'est donc la première étape fondamentale.

Theorem

The map which associates to a rational adele $a = (a_f, a_\infty)$ the pair consisting of :

- The group $L_a := \{q \in \mathbf{Q} \mid a_f q \in \hat{\mathbf{Z}}\}$,
- The semi-norm $\|\cdot\|_a$ on $L_a \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ defined by $\|v\|_a = |a_\infty| \cdot |v|$ (via the canonical identification $L_a \otimes \mathbf{R} \cong \mathbf{R}$),

induces a canonical monoid isomorphism

$$\mathbf{Q}^\times \backslash \mathbb{A}_{\mathbf{Q}} / \hat{\mathbf{Z}}^* = X_{\mathbf{Q}} \cong \mathrm{Pic}(\overline{\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}})$$

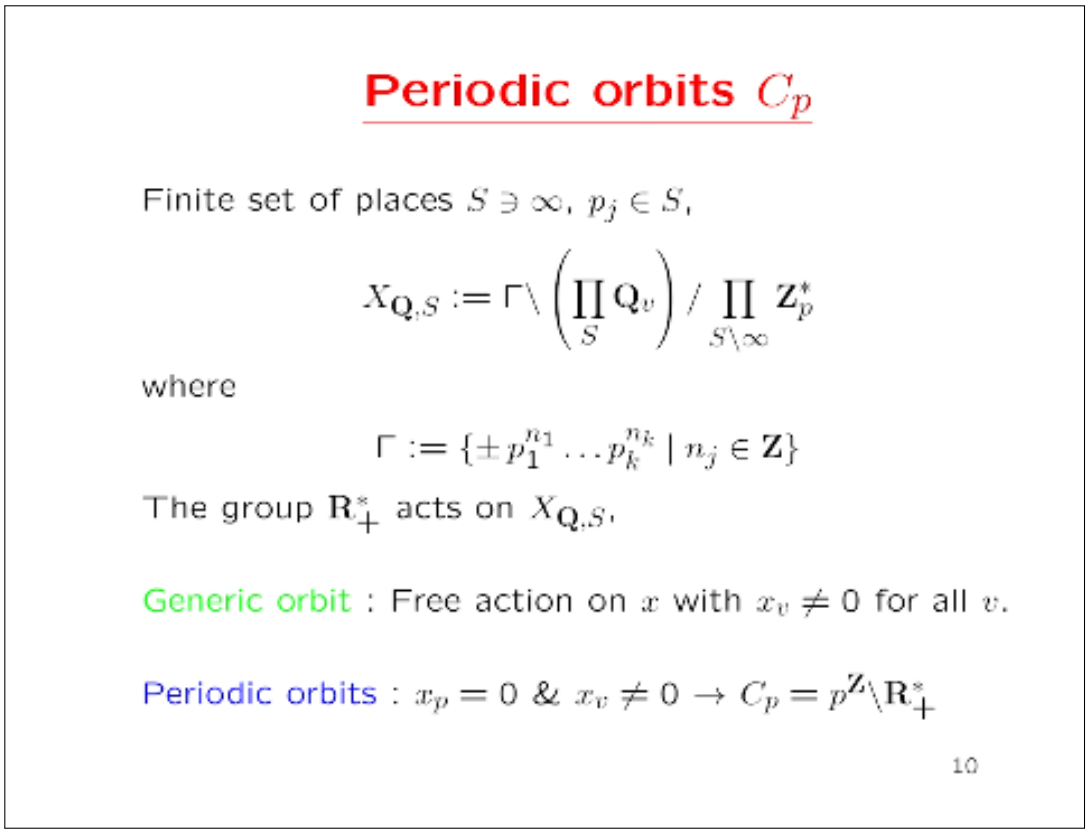
between the Riemann sector $X_{\mathbf{Q}}$ of the adele class space and the moduli space of isomorphism classes of arithmetic divisors $\mathcal{D} = (L, \|\cdot\|)$.

9

Et une fois que vous avez cela, bien sûr, ce que vous voulez, c'est voir où se situe la courbe à l'intérieur et quelle est l'application d'Abel-Jacobi, évidemment. Ok, alors où se situe la courbe à l'intérieur ?

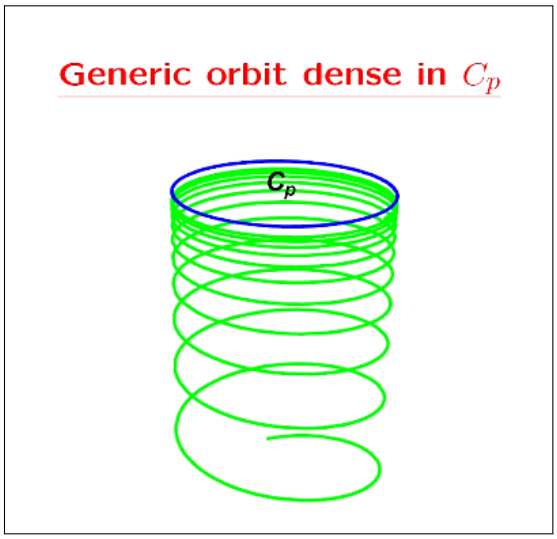
Vous voyez, vous avez un monoïde. Le fait que vous ayez un monoïde vous indique que la courbe doit être telle qu'elle engendre, plus ou moins, ce monoïde à partir de l'image de l'application d'Abel-Jacobi.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je voudrais vous montrer une image de cet espace, le secteur de Riemann. Et je vais vous montrer deux images instantanées. D'accord ?

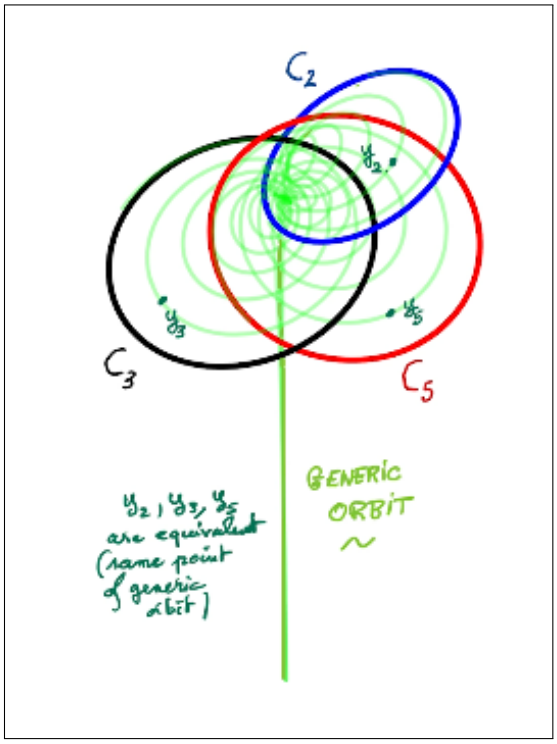


Car cette image est la première que j'ai vue où l'on constate que le point générique dans Spec $\mathbb{Z}$ est dense. En effet, en géométrie algébrique, on sait que le point générique de Spec $\mathbb{Z}$ est censé être dense. Mais comment trouver une image de cela sur Internet ? Il n'y a pas d'image. Bien, alors je vous en montre une. D'accord, et que représente cette image ? Pourquoi ? Tout d'abord, le rôle des nombres premiers sera joué par des orbites périodiques de longueur $\log p$. Et nous savons qu'il s'agit nécessairement d'orbites périodiques de longueur $\log p$ par analogie avec le cas d'un corps de fonctions.

Mais où se situe le point générique et pourquoi est-il dense ? Voici ce qui se passe pour une orbite générique unique. Si l'on considère une orbite périodique unique, C_p, de longueur $\log p$, l'orbite générique, représentée en vert, tournoie de manière dense autour de ce cercle. Bien sûr, son adhérence (sa fermeture) contient un cercle.



Que se passe-t-il si je considère plusieurs orbites périodiques ? Si vous en prenez plusieurs, il devient très difficile de se représenter la situation. Ainsi, si vous considérez plusieurs orbites périodiques, l'orbite générique y sera très dense. Et c'est probablement pourquoi l'espace des classes d'adèles a intrigué de nombreuses personnes.



Pourquoi ? Parce que quelle est l'orbite générique dans l'espace des classes d'adèles ? C'est l'idèle. Et les idèles sont denses dans les adèles. Et c'est très déstabilisant, car on constate cette densité et on se demande : "En fait, quand on prend des adèles, on ne change pas grand-chose.".

Non, mais c'est précisément pourquoi vous êtes lié à Spec $\mathbb{Z}$, car le point générique est dense dans Spec $\mathbb{Z}$. Et c'est précisément ce qui se passe ici. Si vous essayez de représenter ce schéma, vous verrez que cette orbite générique tourbillonne autour de toutes les orbites périodiques, celles de

longueur log 2, log 3, log 5, etc. La raison de cette interaction réside dans un espace sous-jacent, que l'on peut comprendre comme un espace non commutatif.

Voici pourquoi. Je peux reproduire le schéma précédent pour 2, 3, 5, etc. Mais je dois alors préciser que l'orbite générale reste la même.

Pour affirmer que l'orbite générique est identique, le meilleur moyen est d'utiliser des matrices. Ceci étant dit, passons maintenant à l'application d'Abel-Jacobi, et étudions le jacobien. Vous voyez, lorsqu'on travaille avec une courbe, pour construire l'application d'Abel-Jacobi, il faut faire un choix : associer à chaque point le diviseur, qui est la différence entre ce point p et le point choisi p_0.

Vous savez très bien, par exemple, que si vous avez une courbe elliptique, il est faux d'affirmer qu'une courbe elliptique est un groupe. Il faut choisir l'origine.

D'accord, il s'agit donc d'un espace affine. Et il s'avère que, pour les courbes ordinaires, on peut obtenir, si on le souhaite, une décomposition de la suite exacte qui va de la courbe de Picard aux entiers selon le degré, ce qui donne le jacobien comme noyau. On a donc une décomposition de cette suite.

Et c'est cette division qui permet de définir l'application d'Abel-Jacobi. En fait, pour se situer dans cette application, il faut diviser le vecteur de Picard par le groupe, qui est ici $\mathbb{R}_+^*$, une opération de mise à l'échelle, et qui est, bien sûr, un groupe impliqué dans la réalisation des zéros de zêta.

Voilà, il suffit de faire cela. On obtient alors une application d'Abel-Jacobi. Cette application a la propriété suivante : à un nombre premier, elle associe le groupe sans torsion de rang un, c'est-à-dire le groupe des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de p. Autrement dit, il s'agit du groupe des entiers que l'on obtient en inversant p dans l'ensemble des entiers, ce groupe étant alors considéré comme un groupe additif. Quant à l'espace archimédien, il lui est associé, si l'on veut placer une norme nulle à l'infini.

Et ce qu'elle associe au point générique, c'est le groupe $\mathbb{Z}$, mais avec une norme non nulle. Vous avez donc maintenant, si vous le souhaitez, une application d'Abel-Jacobi, qui s'insère dans ce jacobien.

On peut voir où se situe la courbe, du moins dans le secteur de Riemann.

La courbe est obtenue en ramenant ce revêtement de la jacobienne par la courbe de Picard, c'est-à-dire en le ramenant par l'application d'Abel-Jacobi. On constate alors qu'il s'agit de l'union des orbites périodiques C_p. En fait, dans un article dédié à Manin et co-écrit avec Katia, nous avions déjà, si l'on peut dire, pressenti que cet espace était correct à ce niveau d'information.

Ok. Voici donc la carte d'Abel-Jacobi. Elle indique où se situe la courbe.

La courbe devrait donc être l'union d'orbites périodiques, et bien sûr, aussi de l'orbite générique, etc. D'accord. Mais cela ne vous dit rien de la structure géométrique algébrique de cette courbe avec de nombreux guillemets.

Cela indique que cette courbe se situe dans l'espace des classes d'adèles, plus précisément dans le secteur de Riemann correspondant. On peut ensuite l'étendre à l'espace des classes d'adèles complet. Cependant, cela ne renseigne pas sur la structure de cette courbe.

Je vais maintenant passer à la suite, si vous le voulez bien.

Nous voulons donc déterminer la structure de cette courbe. La première étape pour comprendre cette structure consiste à examiner le topos.

Vous voyez, bien sûr, Spec $\mathbb{Z}$ est un topos. Mais c'est un espace topologique. Dire que c'est un topos revient à utiliser un terme savant pour quelque chose que l'on peut comprendre intuitivement : un espace topologique, ce n'est pas compliqué du tout, car les ouverts sont les complémentaires d'un nombre fini de nombres premiers.

Donc, à ce stade, le terme "topos" n'est pas vraiment approprié. Il y a plusieurs années, avec Katia, nous avions établi un lien entre Spec $\mathbb{Z}$ et un autre topos, un topos au sens strict du terme. Pour le décrire au mieux, je vous explique ce qui est l'analogue de la théorie des ensembles dans ce topos. D'accord ? Autrement dit, dans le topos que nous avions défini avec Katia, nous considérons d'abord $\mathbb{N}^\times$, et non $\mathbb{N}_0^\times$. Il y a donc une petite nuance. Mais parlons plutôt de $\mathbb{N}^\times$. Quel est le topos associé à $\mathbb{N}^\times$? C'est un topos d'ensembles muni d'une action des entiers multiplicatifs.

D'accord ? Donc, quand on pense à un ensemble dans ce topos, ce n'est pas juste un ensemble. Il a une action des entiers multiplicatifs. Et Jim Borger [3], qui est ici, bien sûr, appréciera ça. Pourquoi ? Parce qu'un λ-anneau, dans ce topos, est simplement un anneau, en réalité. D'accord ? Autrement dit, ce topos est en quelque sorte un don de Dieu. D'accord ? Et il possède de très nombreuses propriétés intéressantes. Et l'une de ses propriétés les plus fascinantes est que, lorsqu'on examine les points de ce topos, la situation n'est pas si simple. En effet, les points de ce topos correspondent exactement à ce que nous appelions les diviseurs arithmétiques, ou classes, notamment ces "Picard", d'accord ? Je vais m'expliquer.

D'accord ? Voilà. Voici ce qui se passe maintenant. Il y a plusieurs années, avec Katia, nous avions construit un morphisme géométrique topossique de Spec $\mathbb{Z}$ vers une petite variante de ce topos $\mathbb{N}^\times$, auquel il faut ajouter 0. Ce n'est pas, si vous voulez, le même chose que ce qui se passe pour les points de ce topos lorsque vous ajoutez 0 aux entiers, aux entiers multiplicatifs.

La nuance que l'on obtient est que ce ne sont plus des groupes de rang un sans torsion. Cela autorise également un sous-groupe trivial de $\mathbb{Q}$. Et il est important d'autoriser ce sous-groupe trivial car il est à la fois un objet initial et final dans la catégorie des groupes. Et c'est important pour le point générique, car c'est là que nous voulions l'orienter.

Bon, il s'avère, si vous voulez, qu'il existe un diagramme commutatif. Donc, cette application que nous avions définie il y a des années avec Katia coïncide avec l'application d'Abel-Jacobi, ce qui est magnifique. Elle coïncide donc avec l'application d'Abel-Jacobi.

3. James Borger.

Et cela relève, si vous voulez, l'application d'Abel-Jacobi au niveau des topos. Elle coïncide donc avec la carte d'Abel-Jacobi pour tous les points, sauf le point générique. Il faut alors l'étendre jusqu'à l'origine et associer l'origine au point générique de Spec $\mathbb{Z}$. Ainsi, les points génériques sont respectés.

Donc, au niveau topossique, nous avons cette image. D'accord, nous avons cette belle image au niveau topossique. Mais maintenant, bien sûr, il ne suffit pas de connaître la nature de l'espace au niveau topossique, nous voulons savoir ce qu'est le faisceau entre les structures. D'accord ? Et maintenant, le faisceau entre les structures sera au-dessus de $\mathbb{F}_1$. Je dois donc vous expliquer ce qu'est $\mathbb{F}_1$ en termes simples.

Je ne veux pas aller au tableau. Je veux parler, d'accord ? Et pour définir ce qu'est $\mathbb{F}_1$, il y a une longue histoire derrière $\mathbb{F}_1$, Tits [4], Steinberg, vous savez, je veux dire, il y a une très longue histoire.

Mais au fil des années, avec Katia, nous avons essayé de concrétiser $\mathbb{F}_1$. La raison qui m'a poussé à tenter de trouver une concrétisation de $\mathbb{F}_1$ remonte à une réunion à Oberwolfach en 1997, consacrée à la cohomologie cyclique, où se réunissaient des spécialistes de la théorie de l'homotopie. Tom Goodwillie était présent.

Et Tom Goodwillie a donné une conférence où il expliquait que les entiers forment une algèbre sur le spectre de la sphère. J'ai adoré ça ! Parce que, enfin, les entiers sont trop primitifs pour être... vous savez, on ne les comprend pas. Le problème, c'est que lorsqu'on aborde ce sujet, on entre dans le domaine de la théorie de l'homotopie.

Pour un analyste, le domaine de la théorie de l'homotopie est comme un nuage là-haut. Impossible de travailler avec, vous comprenez ? On essaie d'attraper un nuage, mais c'est impossible. Impossible d'attraper un arc-en-ciel, d'accord ? En fait, ce que nous cherchions, c'était une description beaucoup plus concrète du spectre de la sphère, de ce que représente $\mathbb{F}_1$. Et nous l'avons trouvée.

Et nous en avons trouvé une en travaillant sans relâche et en consultant l'ouvrage de Dundas, Goodwillie et McCarthy. En étudiant ce livre, nous avons découvert qu'il existe en réalité une notion beaucoup plus primitive que celle présente au niveau de l'homotopie. Quelle est cette notion ? Il s'agit d'étendre l'idée de groupe abélien, car si l'on étend cette idée de manière à obtenir une catégorie tensorielle, alors on obtient une extension de la notion d'anneau. Et comment étendre la notion de groupe abélien ? Je vais vous l'expliquer clairement, sans l'écrire au tableau, pour que vous la reteniez.

Alors, quelle est l'idée ? L'idée est que si j'ai un groupe abélien, alors je peux assigner à un ensemble pointé X, un nouvel ensemble pointé. Qu'est-ce que ce nouvel ensemble pointé ? Ce nouvel ensemble pointé est un ensemble de diviseurs à valeurs dans le groupe, sur l'ensemble X. Qu'est-ce qu'un diviseur ? C'est une application qui, d'accord, ne prend qu'un nombre fini de valeurs non nulles sur cet ensemble. Quelle est la beauté de ce foncteur ? Il est covariant. C'est un fait étonnant. Pourquoi ? Parce que si j'ai un diviseur sur un ensemble X, et si j'ai une application de X vers Y,

4. Voir https://denisevellachemla.eu/transc-Tits-1957.pdf, page 18.

je peux pousser le diviseur en avant. Comment ? Je le pousse en avant en disant que si je prends un point dans l'espace cible, je peux adapter les valeurs du groupe qui sont dans l'antécédent de ce point.

Et il s'avère que l'on obtient ainsi un foncteur covariant. Ce foncteur covariant possède toute la structure de groupe : l'associativité, tout, absolument tout.

Il s'agit d'un exercice pour retrouver le groupe. Comment retrouve-t-on le groupe comme un ensemble ? Eh bien, on prend les diviseurs de l'ensemble à un point, d'accord ? On ajoute le point de base, d'accord ? Et ainsi de suite. Comment obtient-on l'addition ? On regarde l'ensemble à deux points et les applications diverses, d'accord ?

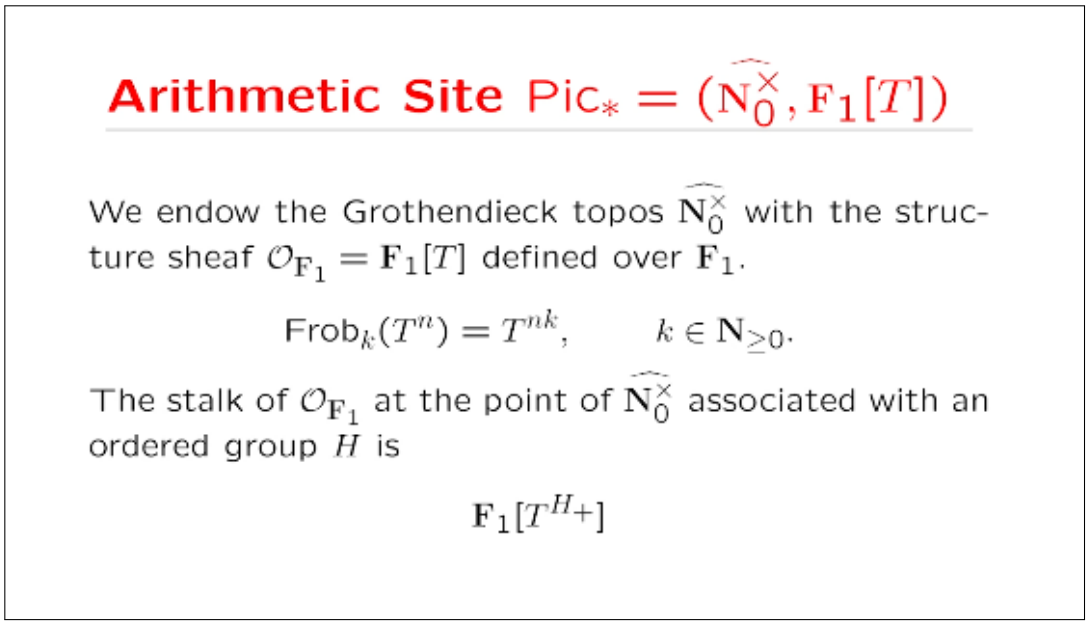
Mais ce que nous avons découvert avec Katia, c'est qu'une catégorie donnée par Cartier, notre grand ami Pierre Cartier, est une sous-catégorie des catégories obtenues en élargissant la catégorie des anneaux à partir de la catégorie des groupes abéliens, en considérant tous les foncteurs covariants possibles. On utilise ensuite la structure de catégorie tensorielle due à Lydakis sur cette catégorie. Donc, vous devez me dire : "Oui, d'accord, mais donnez-moi un exemple de nouveau foncteur qui ne provienne pas d'un groupe."

Quel est ce nouveau foncteur ? C'est d'une simplicité étonnante. Il s'agit du foncteur identité. Autrement dit, le foncteur qui associe à un ensemble pointé l'ensemble pointé lui-même.

Cela ne provient pas d'un groupe. Il n'existe aucun groupe qui fasse cela. Alors, à quoi correspond l'anneau associé à $\mathbb{F}_1$, au rêve de Tits, etc. ? Eh bien, il correspond à ce foncteur.

Ce foncteur s'avère être non seulement un groupe, mais aussi un anneau, et c'est $\mathbb{F}_1$. Donc, c'est $\mathbb{F}_1$, d'accord, c'est $\mathbb{F}_1$. Et comme je l'ai dit alors, il s'est avéré que nous avions également travaillé avec Katia et beaucoup d'autres personnes, Deitmar et tous les autres, en considérant les monoïdes comme un bon cadre pour obtenir le $\mathbb{F}_1$ de Tits. Oui, mais si vous faites cela, d'accord, vous avez des monoïdes mais pas d'anneaux. Et Cartier nous avait donné une méthode pour faire correspondre les monoïdes aux anneaux afin d'obtenir une catégorie qui les contient tous deux. Mais il s'avère que c'est une sous-catégorie à part entière de notre nouvelle catégorie.

Une fois que nous avons trouvé la solution avec Katia, nous étions sûrs d'avoir la bonne idée pour le nouveau $\mathbb{F}_1$. D'accord, nous l'avons donc, mais maintenant, question : quelle est la structure de Spec $\mathbb{Z}$?



Il s'avère que Spec $\mathbb{Z}$ est obtenue en ramenant la structure naturelle de ce côté arithmétique, qui provient de ce nouveau topos lié aux entiers multiplicatifs. Et sur celui-ci, il existe une structure canonique donnée par $\mathbb{F}_1[T]$, donc on prend des polynômes sur $\mathbb{F}_1$, à une variable, et sur ces polynômes, on constate qu'il y a, bien sûr, une action de $\mathbb{N}_0^\times$, car on a son Frobenius, car on peut transformer T^n, on peut l'élever à la puissance k, et obtenir la puissance nk de T (i.e. T^{nk}).

Il s'avère que c'est un endomorphisme de l'anneau. On peut alors calculer la fibre de ce topos en ce point et transporter la structure sur la nouvelle vision (la nouvelle structure). La nouvelle structure sur Spec $\mathbb{Z}$ est donc obtenue en effectuant le pullback du faisceau de structures de ce topos sur Spec $\mathbb{Z}$. Qu'obtenez-vous ?

Eh bien, pour le comprendre, il suffit de comprendre les fibres en chaque nombre premier. Et quelle est la fibre pour un nombre premier ? C'est facile à calculer : on constate que la fibre pour un nombre premier n'est plus, si vous voulez, un polynôme en une variable où l'on prend la racine p-ième du générateur T. Donc, on a $\mathbb{F}_1$ de T à la puissance $\mathbb{Z}[1/p]$, je fais un calcul avec le temps.

$$\mathcal{F} := \Theta^*(\mathcal{O}_{\mathbf{F}_1})$$

The structure sheaf $\mathcal{O}_{\mathbf{F}_1} := \mathbf{F}_1[T]$ of Pic_* pulls back along the geometric morphism Θ.

For each prime $p \in \mathrm{Spec}\,\mathbf{Z}$, the stalk of $\mathcal{O}_{\mathbf{F}_1}$ pulls back to the spherical algebra $\mathbf{F}_1[T^{\mathbf{Z}[1/p]_+}]$, namely :

$$\mathcal{F}_p = \mathbf{F}_1[T^{\mathbf{Z}[1/p]_+}]$$

Voilà donc le changement de structure. En quelque sorte, vous pouvez oublier ce que je vous ai dit sur les topos, les calculs et tout ça. Vous avez maintenant les éléments du changement de structure principal sur Spec $\mathbb{Z}$, c'est tout.

Et nous pouvons travailler avec. Mais bien sûr, si vous avez une nouvelle structure et c'est très agréable d'avoir une nouvelle structure, il faut la tester. Le test crucial que nous avons effectué avec Katia consistait à vérifier si nous pouvions répondre à la question posée par Scholze en géométrie p-adique, que j'ai déjà évoquée et qui est la suivante.

Ce texte a donc été écrit comme une heuristique. En mathématiques, une façon d'aborder l'intelligence artificielle consiste à valoriser les idées heuristiques. Nous avons donc ici une idée heuristique.

Cette idée heuristique, due à Peter Scholze, est la suivante : pour un corps perfectoïde algébriquement clos de caractéristique p, l'ensemble des $untilts(F)$ est donné par... Si vous n'êtes pas familier avec la géométrie p-adique, permettez-moi de vous en dire quelques mots sur l'histoire, car on se trompe souvent à ce sujet. Dans l'histoire de la géométrie p-adique, un nom a été totalement effacé et oublié : celui de Krasner.

Realization of Scholze's Heuristic

In the foundational philosophy of p-adic Hodge theory, P. Scholze proposed the following heuristic idea (cf. Lurie Lecture 1) :

For an algebraically closed perfectoid field F of characteristic p, the set of untilts of F modulo isomorphism serves as a good replacement for the set of F-valued points of Spec($\mathbf{Z}$).

Krasner a accompli deux choses. Premièrement, il a démontré que la clôture algébrique des nombres p-adiques, lorsqu'on la complète par une norme p-adique, reste algébriquement close. C'est ce qu'on appelle le théorème de Krasner.

Mais il a fait bien plus que cela. Car Krasner avait compris que si l'on prend un corps, comme un corps p-adique, etc., il existe un moyen de lui rattacher un autre corps de caractéristique p, une construction de caractéristique p, de sorte que les théories de Galois correspondent entre elles. Or, cela a été oublié car Krasner utilisait un outil étrange : les hyperanneaux.

Puis l'école des hyperanneaux a connu des difficultés. Mais, si vous voulez, elle a été reprise par une autre école. Le dernier terme employé par cette école est ce qu'on appelle un *tilt*.

Qu'est-ce qu'un *tilt* ? Un *tilt* est une construction qui, si l'on prend un corps p-adique de caractéristique 0, lui assignera, s'il est complet dans une norme p-adique, un corps de caractéristique p. L'idée est fondamentalement celle de Krasner. Comment y parvenir ? En considérant des suites d'éléments de ce corps telles que l'élément $n+1$ élevé à la puissance p soit égal au précédent. Et bien sûr, cela résonne avec notre construction.

Ce que nous avons découvert avec Katia, c'est le théorème suivant : il n'est même pas nécessaire de supposer que le perfectoïde est de caractéristique p. On prend un perfectoïde. En résumé, qu'est-ce qu'un perfectoïde ? C'est un corps qui a à voir avec caractéristique p. Il possède donc un corps résiduel.

Si on considère comme norme une norme p-adique, il possède un corps résiduel. Ce corps résiduel est supposé parfait. Ainsi, l'application des puissances des éléments, la norme de Frobenius, est surjective.

Donc, en résumé, nous avons ceci. Or, ce que nous avons découvert avec Katia, c'est un théorème qui stipule que si l'on considère un corps perfectoïde algébriquement clos de caractéristique résiduelle

p (ce qui inclut bien sûr le cas où le perfectoïde est lui-même de caractéristique p), alors les points de l'espace modulaire de F sont notre courbe. Considérons donc notre courbe.

Theorem

Let F be an algebraically closed perfectoid field of residue characteristic p. The moduli space of F-points of $(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z})_{\mathbf{F}_1}$, modulo the canonical symmetries of the stalks, decomposes over the closed points of Spec($\mathbf{Z}$) as follows :

1. At any prime different from p, the fiber collapses to a single point.
2. At the prime p, the fiber is canonically in bijection with the space of all untilts of $F^\flat$ modulo the Frobenius (including $F^\flat$).

On reprend ses points. Qu'obtient-on ? Eh bien, pour tout nombre premier différent de p, la fibre s'effondre lorsqu'elle prend cet espace modulaire. Mais pour le nombre premier p, la fibre est canoniquement isomorphe à l'espace de tous les *untilts* des *tilts* de F modulo le Frobenius.

Il s'agit donc précisément de la prescription de Scholze étendue, en fait, à des corps qui ne sont pas de caractéristique p, mais à tous les autres. Autrement dit, cela signifie que cette courbe doit être prise en compte, car elle satisfait pleinement ce fait fondamental, pressenti par Scholze. Ensuite, avec Katia, nous avons calculé les points de notre courbe sur l'ensemble des nombres complexes.

Theorem

Let the $\mathbf{F}_1$-curve $(\mathrm{Spec}\,\mathbf{Z})_{\mathbf{F}_1}$ be evaluated over $\mathbf{C}$ at the prime p. For each place $v \in \Sigma_p = \{p, \infty\}$, the locality condition canonically extends the Frobenius action of $\mathbf{N}^\times$ to a continuous and well-defined action of the local Weil group W_v. Moreover, the space $\mathcal{M}_p^v$ of non-trivial local points is a principal homogeneous space under W_v ; equivalently, it consists of a single W_v-orbit.

Bien sûr, il s'agit du minimum que l'on puisse faire : calculer les points correspondant aux nombres complexes. Et qu'avons-nous trouvé ? Eh bien, nous avons constaté que si l'on calcule les points

correspondant aux nombres complexes et que l'on examine ceux qui correspondent à un nombre premier p, il s'avère que p correspond à deux positions : p lui-même et la position archimédienne.

Cela nécessiterait de nombreuses explications, mais je préfère ne pas m'y attarder. Ce que nous avons constaté avec Katia, c'est que l'espace modulaire des points est en fait l'espace homogène principal pour le groupe de Weil. Il s'agit donc d'une orbite unique du groupe de Weil, et un point très important est que la division par le groupe de Frobenius donne la courbe de Tate, et par conséquent deux incarnations de cette courbe.

Je dirai un mot sur la courbe elliptique de Tate. On obtient la courbe de Tate sur $\mathbb{Q}_p$ lorsqu'on considère la position p, et lorsqu'on considère la position infinie, on obtient la courbe de Tate de module $1/p$, car le module de la courbe de Tate doit être inférieur à 1. Je vous rappelle que la courbe de Tate est une courbe elliptique sur l'anneau formel $\mathbb{Z}$ du crochet T, où, en d'autres termes, seules les séries formelles à coefficients entiers sont autorisées. On peut alors écrire une équation de la forme $y^2+xy =$ un polynôme, comme $x^3+a_1x+a_2$, par exemple, comme ça (ou bien $-a_1$ etc., je ne me rappelle plus), où maintenant a_1 et a_2 sont des séries de puissances formelles à coefficients entiers.

The Tate curve and C_p

The moduli space $\mathcal{M}_p^\infty$ modulo the discrete symmetries generated by Frobenius, $p^{\mathbf{Z}} \subset W_\infty$, produces the complex Tate curve

$$E_p \cong \mathbf{C}^\times/p^{\mathbf{Z}} = C_p \times S, \quad S := W_\infty/W_\infty^\sigma$$

where S is the moduli space of points modulo the symmetries of the completed stalk, *i.e.* the analogue of the FF-curve.

C'est la courbe de Tate. Mais il y a quelque chose d'absolument incroyable : il y a longtemps, avec Katia, nous avions doté l'orbite périodique C_p d'une structure de courbe elliptique au-dessus de $\mathbb{B}$. Qu'est-ce que $\mathbb{B}$? Ce n'est pas $\mathbb{F}_1$. $\mathbb{B}$ est ce que l'on appelle la caractéristique 1. Vous voyez, j'ai entendu dire par Katia qu'il y aurait des discussions sur les semi-anneaux.

Donc, si vous prenez les semi-anneaux comme terrain de jeu, et que vous ouvrez le livre de Weil *Théorie basique des nombres*, si vous ouvrez le livre d'André Weil, le livre d'André Weil commence par la classification de tous les corps finis. Ouvrons maintenant le même ouvrage et tentons de généraliser la notion de corps aux semi-corps. Quels sont tous les semi-corps finis ? Étonnamment, il n'y en a qu'un seul le semi-corps booléen.

Nous l'appelons $\mathbb{B}$. Avec Katia, nous l'appelions caractéristique 1, car dans ce semi-corps, $1+1 = 1$. Et avec Katia, nous avions découvert il y a des années que C_p, l'orbite périodique C_p, pouvait

être munie d'une structure de courbe elliptique sur $\mathbb{B}$. Nous avions également trouvé la formule de Riemann-Roch avec un indice réel, etc. C'était magnifique. Mais nous ne savions pas pourquoi il s'agissait d'une courbe elliptique.

Maintenant, nous le savons, car ce sont les points réels de la courbe de Tate. Et ce serait un problème passionnant pour un jeune, plein d'enthousiasme, de relire notre article avec Katia et de comprendre que ce que nous faisions secrètement avec elle, c'était d'appliquer la courbe de Tate à $(\mathbb{R}, +, \max)$, à ce demi-anneau. Bien, passons maintenant au sujet qui a motivé ma lettre à Riemann.

Pour aborder ces points, il est important de faire une petite digression sur le rôle du point générique dans la structure de Spec $\mathbb{Z}$. au niveau du site étale, dans la cohomologie étale. En résumé, lorsque l'on affirme que Spec $\mathbb{Z}$, est une sphère tridimensionnelle, il suffit d'examiner la séquence exacte de faisceaux obtenus en appliquant la translation multiplicative G_m à partir du point générique. Je n'entrerai donc pas dans les détails.

Mais il est également important de noter son lien étroit avec la théorie des corps de classes. J'en viens donc à nos travaux. La réalisation spectrale que j'ai présentée il y a 30 ans peut en fait être mise en parallèle avec ces travaux sur les étales. En effet, ce que je faisais dans cette réalisation spectrale, que j'appelais spectre d'absorption, est similaire. J'espère que cette image restera gravée dans votre mémoire.

En physique, les premiers spectres d'importance réelle furent les spectres d'absorption. Ils furent découverts lorsque Newton eut l'idée de faire passer la lumière du soleil à travers un prisme pour la décomposer en éléments élémentaires. On remarqua alors, au bout d'un certain temps, l'apparition de raies sombres. Ce phénomène fut observé par un opticien du nom de Fraunhofer.

Bon, il y a une longue histoire, extrêmement intéressante, derrière tout ça. Les chimistes ont ensuite réalisé que ces spectres d'absorption pouvaient être traduits en spectres d'émission. Et voici ce qui se passe.

Ce qui se passe, c'est qu'il y a une histoire similaire ici, ok, et cette histoire similaire nous amène aux formules explicites de Riemann. Si vous lisez l'article de Riemann, vous constaterez qu'à la fin de celui-ci se trouve la démonstration de la formule explicite, qu'il a rédigée sous cette forme.

Ce qui est absolument incroyable, c'est que beaucoup de gens ont copié cette formule sans rien y comprendre. Or, si j'affirme cela, c'est parce que, telle qu'elle est écrite, cette formule est fausse. Pourquoi est-elle fausse ? Parce que lorsqu'on écrit le terme $\mathrm{li}(x^p)$, il est facile de comprendre que si l'hypothèse de Riemann est vraie, les puissances x à la puissance p parcourront un cercle de rayon $\sqrt{x}$. Et ce cercle les fera tourner, de manière dense, bien sûr. Alors, comment faire converger cette série si le terme général ne tend pas vers zéro ? *(Alain Connes rit.)* C'est tout simplement faux !

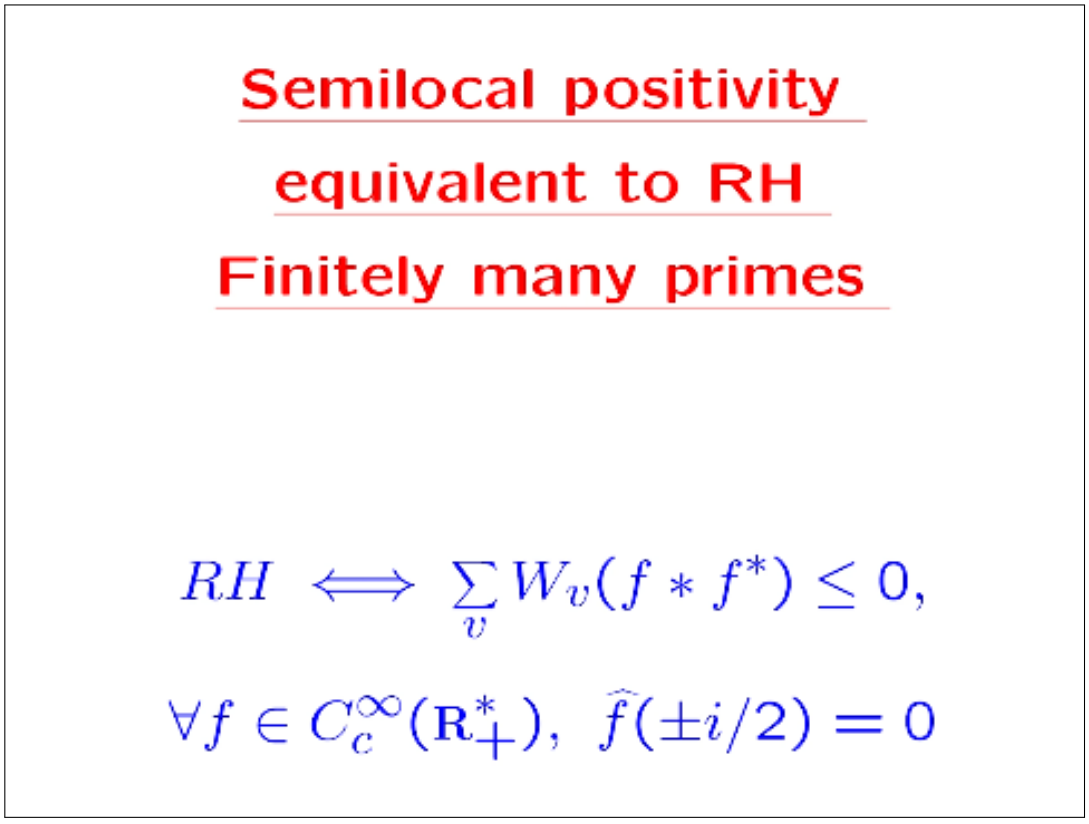
Riemann était excessivement prudent, car à son époque, les fonctions multivoques existaient. Pour lui, la fonction logarithme intégral était donc multivoque. Après Riemann, von Mangoldt a rédigé une démonstration détaillée, en prenant soin de ne pas l'écrire ainsi. Mais les années ont passé et les gens ont oublié. Et si vous prenez les ouvrages de référence sur l'hypothèse de Riemann, cette

formule est écrite sans aucune compréhension. Quelle est donc la formule correcte ?

La formule correcte consiste à remplacer cette expression par une nouvelle fonction, appelée intégrale exponentielle, appliquée à $\rho \log x$. Et cette fonction possède la propriété requise.

Vous voyez, c'est une fonction beaucoup plus précise, car $\rho \log x$ est bien plus précis que x^ρ (soit x à la puissance ρ), évidemment. On se trouve dans l'ensemble des nombres complexes non nuls, d'accord ? C'est donc la bonne façon de l'écrire. Ok, première chose.

Maintenant, poursuivons. André Weil, qui a beaucoup travaillé sur l'hypothèse de Riemann, a démontré qu'elle est équivalente à la positivité ou à la négativité, selon la convention, d'une certaine forme quadratique. La positivité d'une certaine forme quadratique est remarquable, car elle se réduit à des fonctions, des fonctions tests, qui ne font intervenir qu'un nombre fini de nombres premiers. En quelque sorte, cette reformulation de l'hypothèse de Riemann consiste à considérer un nombre fini de nombres premiers à la fois. Ce point a été crucial dans nos travaux. Il y a environ cinq ans, avec Katia, nous avons donc étudié par ordinateur cette forme quadratique sur un intervalle fini.



Et grâce à un ordinateur, nous avons fait une découverte étonnante. Nous avons constaté que, d'accord, avec un ordinateur, la valeur semblait positive. Mais la plus petite valeur propre était incroyablement petite.

Ce n'était pas nul. Cela ne peut être nul par une fonction, par la théorie des fonctions holomorphes. Ce ne peut être nul, mais c'était extrêmement petit.

Et quand je dis extrêmement petit, je le pense vraiment. Voici les valeurs du log. Donc, le logarithme est -150, voire plus petit, lorsqu'on réduit à un intervalle. Ce paramètre λ est le même que celui que je vous ai montré précédemment, d'accord ? Et il jouera un rôle-clé. Nous avons trouvé, dans notre développement, trois parties.

Il y a eu ce développement avec Katia, où nous avons démontré la positivité à la place archimédienne, en fait une forme plus forte, car elle était déjà connue. Mais ce que nous avons démontré avec Katia, c'est qu'elle est limitée inférieurement par Sonine. Ensuite, avec Walter van Suijlekom, j'ai développé le paradigme de Toeplitz.

Avec Katia et Henri Moscovici, nous avons développé le triplet spectral. C'est là qu'intervient la géométrie non commutative, car son cœur est une nouvelle notion d'espace géométrique, donnée par le triplet spectral. Elle est donc purement spectrale, d'accord ? Et elle permet de retrouver la géométrie de manière entièrement spectrale.

Mais ce que nous avons construit avec Katia et Henri est un triplet spectral, d'accord ? C'est donc un triplet spectral. Il possède, si vous voulez, une représentation dans l'espace de Hilbert d'une algèbre, qui est une algèbre de fonctions, et il possède un opérateur. Et la façon dont vous devez le concevoir est qu'il s'agit d'une nouvelle structure, légèrement différente sur l'orbite périodique.

Donc, je prendrai l'orbite périodique C_p pour $p = 13$, d'accord ? Et je modifierai légèrement la structure de l'orbite périodique traditionnelle par une petite perturbation de rang un. Mais le fait étonnant, c'est que lorsqu'on effectue cette petite perturbation de rang un, d'accord, comme nous le verrons, on atteint les décimales des zéros de zêta en observant le spectre de cet opérateur, d'accord ? Et de plus, nous savons que ce spectre est réel, car l'opérateur est auto-adjoint, d'accord ? Pour moi, c'est un résultat hallucinant. Je veux dire, je ne sais pas.

Bon, j'ai écrit à son propos, etc. Il n'y a aucune résonance. Voici donc une liste, si vous voulez, que je vous ai montrée au début, d'accord ? Elle montre que si vous prenez les nombres premiers, y compris 11, donc jusqu'à 12, si vous voulez, d'accord ? Alors vous obtenez cette approximation.

Je n'ai pas inclus l'autre approximation, mais jusqu'au 50e zéro, on obtient une très bonne approximation, jusqu'au 51e zéro de zêta, en ne considérant que les nombres premiers 2, 3, 5, 7 et 11. Franchement, c'est hallucinant. Cela signifie que l'idée selon laquelle il faut contrôler les nombres premiers est fausse, vous avez ζ, c'est déjà là. Mais il faut faire quelque chose d'assez subtil, d'accord ? Et quelque chose que je pouvais expliquer à Riemann.

Pourquoi ai-je pu l'expliquer à Riemann ? J'ai pu l'expliquer à Riemann car c'est la même idée que celle utilisée par Riemann pour son théorème de l'application conforme. Quelle est cette idée ? L'idée est de prendre cette forme quadratique, que Riemann aurait pu écrire. Bien sûr, il était très savant. On prend ensuite le minimum de cette forme quadratique. Or, comme vous le savez, Riemann utilisait le principe de Dirichlet, qu'il n'a pas pu démontrer. Weierstrass a trouvé un contre-exemple.

Mais Hilbert a trouvé la preuve, d'accord, ce que Riemann ne pouvait pas savoir. Mais il ignorait donc qu'il existait un minimum. Il l'ignorait.

Je veux dire, c'était un principe, vous savez, le principe de Dirichlet. Mais ici, nous savons, nous pourrions le prouver avec Katia et Rico, que le minimum existe, d'accord ? Donc, on prend ce minimum, d'accord ? Et maintenant, on prend sa transformée de Mellin et on regarde ses zéros. Je pouvais expliquer cela à Riemann.

Je n'ai pas eu besoin de lui donner un triplet spectral. Qu'est-ce que c'est ? Je pouvais simplement lui dire : "Prenez cette fonction, sa transformée de Mellin, et ses zéros. Vous obtenez alors ce tableau.". Allons donc. De plus, nous savons que les zéros de la transformée de Mellin se trouvent tous sur la droite critique. Ce n'est donc pas une plaisanterie.

Cela signifie que si l'on pouvait justifier la convergence de cette transformée de Mellin vers la fonction Ξ de Riemann, ce qui est une conjecture naturelle, alors ce serait fait. Nous avions beaucoup travaillé sur cette approche avec Katia, car dans mon article de 1998, après l'article aux Comptes-Rendus, j'avais rédigé un long article où je démontrais la formule de la trace pour la fonction zêta de Riemann. Et dans cette démonstration, j'utilisais, de manière cruciale, les fonctions sphéroïdales allongées (*prolate*).

J'utilisais donc les fonctions sphéroïdales allongées, qu'Henri expliquera en détail dans sa présentation. Mais d'où viennent-elles ? Elles proviennent d'un problème et ont été, si l'on veut, élevées au rang de phénomène mathématique remarquable par les ingénieurs des laboratoires Bell. Quel était donc ce problème ? Il s'agissait d'un problème formulé initialement par Claude Shannon : le problème de la communication.

Vous voyez, si l'on tente de communiquer par un canal, Claude Shannon a découvert que la quantité d'information est mesurée par l'entropie, ce qui est une idée très simple. D'ailleurs, il en a discuté avec von Neumann alors qu'il n'avait pas encore trouvé de nom pour ce phénomène. Et von Neumann lui a suggéré de l'appeler entropie.

Et Shannon a demandé : "Pourquoi ?". Et von Neumann lui a répondu : "personne ne sait ce que c'est !". Il avait donc, si l'on veut, une définition mathématique de l'entropie. Et puis, les chercheurs des laboratoires Bell souhaitaient communiquer par signaux.

Et ils avaient le problème suivant : si vous prenez la parole, votre temps de parole est limité, comme Katia me le rappellera bientôt.

Vos fréquences sont également limitées, car ma voix l'est aussi. Je travaille donc avec une fonction dont le support est limité dans le temps, et dont la transformée de Fourier est également limitée à une fenêtre de fréquence finie. Or, il y a contradiction mathématique, car nous savons que la transformée de Fourier d'une fonction à support compact est holomorphe.

Il ne peut pas y avoir de support compact. Ces chercheurs ont donc analysé le fait que les deux projections, à savoir la projection temporelle et la projection fréquentielle, ne se croisent pas, pour la raison que je viens d'expliquer. En L^2, elles ne se croisent pas.

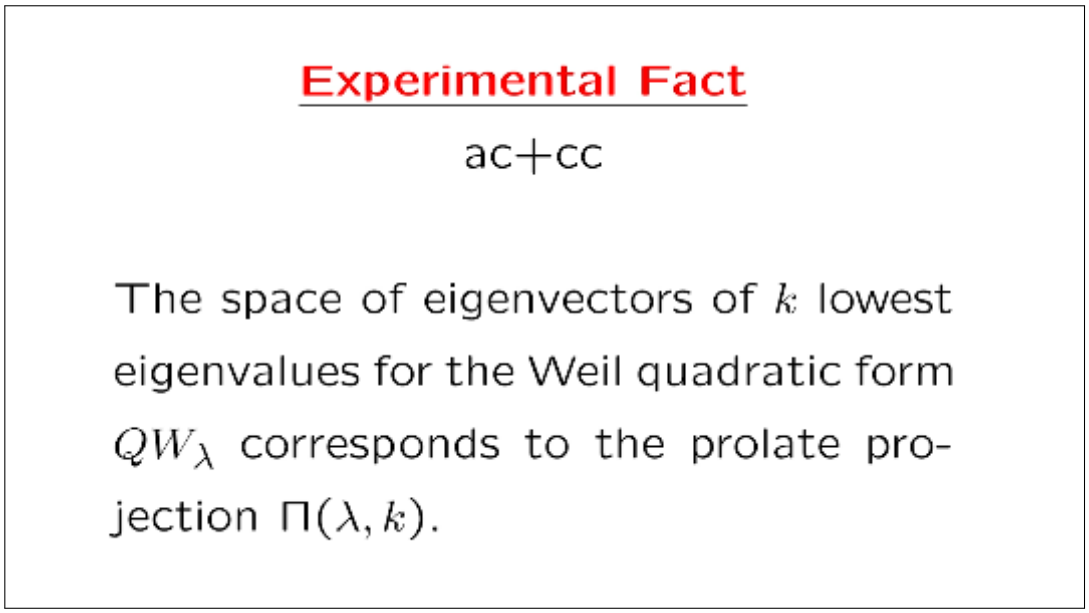
Mais elles ont une quasi-intersection, ce qui signifie qu'il existe des fonctions qui appartiennent presque aux deux. Et pour cela, il faut analyser la paire de projections, P_λ et $\widehat{P_\lambda}$. D'accord ? Les mathématiciens savent ce qu'est une paire de projections.

Une paire de projections est une représentation du groupe diédral. Or, nous savons que les représentations irréductibles du groupe diédral sont données par un angle. Ainsi, cette paire de projections engendre un spectre discret, c'est-à-dire qu'il est discret au sens où il est indexé par des entiers.

Henri va maintenant poursuivre mon exposé. Je voudrais donc vous montrer une image, qui conclura mon intervention, sur laquelle Henri reprendra. Car ces chercheurs des laboratoires Bell ont fait une découverte fantastique.

C'étaient des expérimentateurs, etc. Ils pouvaient effectuer de nombreux calculs, mais c'est tout l'art des mathématiques. Et qu'ont-ils découvert ? Ah oui, je dois dire que ce que nous avons découvert avec Katia et Henri, c'est que les minuscules valeurs propres de la forme quadratique de Weil correspondent aux nombres minuscules obtenus pour l'intersection de ces deux projections, ce qui indique qu'elles communiquent entre elles.

Avec Katia, nous avions une formule utilisant la formule de Poisson pour obtenir ce résultat. Mais je ne souhaite pas m'étendre sur ce point, car cela conclut mon intervention. Nous disposions donc d'un résultat expérimental, à savoir que nous pouvions deviner expérimentalement le vecteur propre minimal de la forme quadratique.



Mais il n'y a pas de preuve. Si vous le prouvez, c'est terminé. Si vous le prouvez, l'hypothèse de Riemann est prouvée.

Je vais donc conclure ainsi. Je voulais simplement vous montrer les découvertes qu'ont faites ces personnes, et vous en expliquer les raisons.

La découverte qu'ils ont faite est que ces deux projections, P_λ et $\widehat{P_\lambda}$, commutent en fait avec l'opérateur différentiel du second ordre, qui est appelé l'opérateur sphéroïdal prolate, parce que c'est l'opérateur que l'on obtient par séparation des variables, dans le but de comprendre le spectre d'un solide ellipsoïdal allongé plein, mais Henri en parlera. Et je finis avec une image. Cette image vous donne le flot hamiltonien, la raison de cette image est que vous avez une limitation en temps dans un sens, une limitation en fréquence dans l'autre sens, on est dans l'espace des phases, et bien sûr si vous voulez commuter avec ces deux projections, vous devez avoir un flot hamiltonien qui préserve effectivement ces 4 droites, et pour faire ça, qu'est-ce que vous faites, vous écrivez l'équation de ces 4 droites $(p^2-\lambda^2)(q^2-\lambda^2)$ et vous obtenez un opérateur différentiel que Henri vous présentera cet après-midi.

The flow lines of the Hamiltonian flow of $H_\lambda(p,q) = \left(p^2-\lambda^2\right)\left(q^2-\lambda^2\right)$

The boundary of these subsets consists of 4 lines $q = \pm\lambda$, $p = \pm\lambda$. The equation of the union of the 4 lines is $H_\lambda(p,q) = 0$ where $H_\lambda(p,q) = \left(p^2-\lambda^2\right)\left(q^2-\lambda^2\right)$. The symbol of the operator $\mathbf{W}_\lambda$ is

$$W_\lambda = -4\pi^2 H_\lambda + 4\pi^2\lambda^4$$