Alain Connes contre (puis pour ?) l'ordinateur

Je ne suis pas sûr d'utiliser le tableau, et je pense que vous verrez suffisamment d' écrans d'ordinateurs dans la journée, vous savez, je vais juste donner un exposé comme ça [1]. Donc je suis mathématicien et ce que je veux expliquer, c'est si vous voulez le genre de relation très étrange entre les ordinateurs et les mathématiques, et le rôle de `Mathematica` dans ce que j'ai fait.

Donc depuis longtemps, j'ai été un fervent défenseur du fait que l'on devrait calculer à la main, et que les longs calculs, très longs, je vais vous donner un exemple, sont exactement le moment où un mathématicien peut, l'esprit si vous voulez est suffisamment libre pour que les concepts puissent émerger et l'exemple que je vais vous donner est le suivant : j'ai un collaborateur, Henri Moscovici, et avec lui, à un moment donné, nous travaillions sur un problème. Et à un moment donné, c'était en 1995 ou quelque chose comme ça, à un moment donné, nous avons réalisé que pour calculer le résultat que nous voulions absolument obtenir, nous devions calculer une expression qui était vraiment très compliquée et qui représentait environ mille fois une page de calcul. Nous avons donc décidé de le faire indépendamment, en compétition bien sûr, et je ne mens pas, nous avons calculé pendant 3 semaines, 8 heures par jour, donc cela vous donne une idée de la taille du calcul en question.

Après avoir fait ce calcul, nous avons communiqué, bien sûr, nous avons constaté que chacun de nous avait fait des erreurs. Nous avons donc corrigé ces erreurs et essayé de déterminer si le résultat avait la propriété attendue. Il n'avait pas la propriété attendue car nous avions fait une erreur stratégique. Une erreur, une vraie erreur. Nous avons alors compris pourquoi, bien sûr, car nous avions été très lents à vérifier le calcul, pour comprendre. Et finalement, environ un an plus tard, un concept a émergé, et ce concept est celui de cohomologie cyclique pour les algèbres de Hopf, qui est un concept très évolué.

À cette époque, j'étais un fervent défenseur du fait que ce concept n'aurait jamais émergé si nous avions utilisé un ordinateur. La raison que j'avançais était la suivante : c'est seulement parce que nous étions si familiers avec chaque terme du calcul que le concept avait émergé d'une manière libre. Je veux dire qu'après ça, notre esprit était suffisamment habitué à tous les détails du calcul, à tous les petits rouages du calcul, que la structure a émergé et elle a émergé complètement naturellement sans aucun effort.

Ça avait été la même chose lorsque, des années auparavant, je faisais des calculs avec la cohomologie cyclique et finalement, il y a eu une petite catégorie qui a émergé avec la classification de l'espace $\Pi_\infty(\mathbb{C})$ et elle a émergé comme étant la structure des calculs.

Ok, donc le problème que j'avais à ce moment-là avec les ordinateurs était le suivant : je savais qu'il y avait des jeunes qui, lorsqu'ils voulaient multiplier par 10, utilisaient une machine à calculer pour le faire ! J'étais donc complètement conscient du fait que si vous abandonnez et si vous ne

Traduction d'un extrait d'exposé, Google translate, 1er avril 2025.
Transcription en LaTeX: Denise Vella-Chemla.
Référence de la vidéo : https://www.youtube-nocookie.com/embed/jVdBLFit8_w.

[1] *sans diaporama projeté.*

nourrissez pas votre esprit avec des calculs en temps réel, effectués à la main, vous courez un risque très sérieux, qui est le risque de déléguer à quelqu'un d'autre et de ne pas être vraiment conscient du contenu du calcul. C'était ma situation en 1995-1996.

Ok, alors ce qui s'est passé, c'est que quelques années plus tard plus tard, je travaillais sur un problème avec un autre collaborateur, Michel Dubois-Violette, et à un moment donné, il y avait encore une expression que nous devions calculer. C'était encore une expression cruciale car c'était une jacobienne en géométrie non-commutative d'une certaine application, et nous devions savoir si cette jacobienne était nulle ou non nulle en fonction des valeurs du paramètre, ok. Cette jacobienne était donnée comme une somme de certaines intégrales sur une période de certaines fonctions. Mais cette somme avait 1 440 termes et chaque intégrale était une intégrale de fractions rationnelles de fonctions θ et de leurs dérivées elles étaient de degré 16, ce qui signifie qu'on avait des fonctions θ de degré 16 qu'on devait utiliser là. Ok, donc à ce moment-là, euh, nous savions que même, vous savez, en essayant de calculer l'une d' entre elles, euh, la seule chose que nous pouvions faire, puisque ça dépendait de certains paramètres, donc la seule chose que nous pouvions faire était de calculer le q-développement, il n'y avait aucun moyen d'obtenir une forme fermée, donc nous devions calculer le q-développement de cette expression et bien sûr le q-développement avait des coefficients qui étaient des expressions trigonométriques. Ok, donc à ce stade, la seule chose que je pouvais faire, bien sûr, c'était d'utiliser l'ordinateur.

J'ai donc utilisé l'ordinateur et j'avais un ordinateur portable, bien sûr, j'avais `Mathematica` sur l'ordinateur et la seule chose que je pouvais faire était de calculer ce qu'on appelle l' expression trigonométrique. La limite trigonométrique, si vous voulez, c'est une limite, vous ne prenez pas en compte q, vous prenez une limite, d'accord, et c'est bien sûr compatible avec `Mathematica`. Je l'ai donc entré dans mon ordinateur portable. J'ai mis l'ordinateur portable au travail et il a fallu une nuit entière à l'ordinateur portable pour me donner l' expression.

L'expression était magnifique parce que vous savez, si vous faites la somme de 1 440 termes, vous ne vous attendez pas... je veux dire... si vous avez une raison conceptuelle, bien sûr, d'accord, alors vous pourriez vous attendre à un miracle, c'est une bonne chose. Mais là, c'était factorisé, d'accord, donc vous pouviez obtenir les zéros pour cette limite d'une manière très simple, c'était bien, mais bien sûr, cela ne nous donnait aucun indice sur l'expression complète.

D'accord, j'ai eu la chance de communiquer avec Michael Trott de `Mathematica` et nous avons discuté et nous étions exactement face à ce type de problème où il faut réduire la longueur du calcul, si vous mettez l'expression mathématique avec des intégrales et ainsi de suite, c'est fini, je veux dire, Vous pouvez le faire, vous savez, c'est extrêmement long mais les intégrales étaient d'une forme spéciale et ainsi de suite, donc nous pouvions simplifier le programme pour calculer l'intégrale, donc nous avons eu de longs échanges et ainsi de suite et puis, nous pouvions calculer jusqu'au terme comme q^2. Mais ce n'était pas suffisant ce n'était pas suffisant parce que cela dépendait des paramètres il y avait deux paramètres, η et M, et il y avait ce paramètre q donc vous savez, avec deux termes, vous ne pouvez pas aller très loin.

Alors, avec Michel Dubois-Violette, nous sommes revenus, nous avons vu mathématiquement et ainsi de suite et nous avons trouvé une simplification mathématique qui réduisait le temps d'un facteur 60, d'accord, et c'était bien sûr déjà grand. Alors nous avons pu calculer le terme en q à la troisième puissance. Mais ce n'était pas suffisant ; avec un terme à la troisième puissance, nous pouvions commencer à voir des fonctions elliptiques qui apparaissaient comme une fonction des paramètres η et m mais nous n'avions aucune idée pour le champ de dépendance, ok, donc finalement, j'ai trouvé un moyen de me connecter au gros ordinateur de l'École Polytechnique, et je pouvais utiliser du temps de calcul sur ce gros ordinateur et alors, ce qui s'est passé, c'est qu'avec le calcul de la puissance suivante, il est devenu évident que nous avions raison avec l'estimation que nous avions pour les fonctions précédentes.

Mais il y avait un nouveau phénomène qui était qu'il y avait un facteur global qui ne dépendait que de q, et ce facteur global semblait très très étrange. Donc nous avons beaucoup réfléchi avec Michel sur les différents termes que nous avions dans ce truc et nous avons reconnu la puissance neuvième de la fonction η de Dedekind, je veux dire les premiers termes dans le développement. Donc ensuite nous avons fait une prédiction, vous savez, c'est comme une prédiction en physique, nous avons dit "ok, ça devrait être comme ça, ok..." Et puis finalement, en faisant de plus en plus de simplifications, à la fois dans les mathématiques et aussi dans le programme informatique avec Michael Trott, et encore une fois en utilisant l'ordinateur de l'École Polytechnique, nous avons été capables de calculer plusieurs des termes suivants et nous avons vérifié la conjecture. Puis nous avons entré cette conjecture dans l'article sur lequel nous travaillions, ok, et finalement nous avons trouvé une erreur dans une certaine Encyclopédie dont nous avions utilisé des formules, ces formules étaient fausses (nous avons vérifié cela par des q-développements, etc.), et nous avons finalement découvert que ce résultat était extrêmement simplifié. Nous avons donc trouvé un résultat algébrique qui nous permettait d' éliminer l'utilisation des fonctions θ dans ce problème.

Ici, je pense, il est tout à fait évident que par un calcul humain, vous ne pouvez pas faire cela. C'est impossible. Que se serait-il passé autrement ? Nous aurions abandonné. Nous aurions arrêté. Nous aurions dit : "Peut-être qu'un jour, nous pourrons trouver...". Finalement, le chemin vers..., disons, la racine de la façon dont nous avons trouvé ce concept, c'est grâce à la reparamétrisation et à tout ce qui est en termes rationnels, ce qui était incroyable dès le départ. Il est donc tout à fait évident que l'ordinateur a joué un rôle majeur. Mais ce que je dois dire, c'est que la raison pour laquelle j'utilisais `Mathematica` à cette époque, c'est que c'est quelque chose qui, a priori, est très utile pour les ingénieurs, etc. Pour un mathématicien, c'est extrêmement bien car c'est convivial, les gens croyaient que les mathématiciens se mettraient à apprendre l'informatique et connaitraient le langage C et non, je veux dire que nous sommes des mathématiciens, nous faisons autre chose, et ce dont nous avons besoin, c'est de quelque chose qui est convivial, d'accord, et là, j'ai trouvé si vous voulez un énorme avantage, mais je serais honnête, je ne serais pas allé très loin si je n'avais pas connu Michael Trott, qui était capable de communiquer avec moi et vous savez, de me donner accès à une sorte de partie plus difficile du calcul. Alors ce qui s'est passé, c'est que bien sûr, j'ai été convaincu par la puissance de l'ordinateur.

Mais il s'est avéré que le concept que nous avions découvert avec mon ami Moscovici dans notre travail, cette algèbre de Hopf et cette cohomologie cyclique de Hopf se sont avérées être liées aux formes modulaires, et il s'est avéré que, là encore, nous avions des formules mais ces formules étaient d'un niveau qui était beaucoup plus abstrait que le niveau que j'avais rencontré lorsque je calculais avec Michel Dubois-Violette avec les fonctions θ et ainsi de suite.

Donc le niveau d' abstraction était comme ça, il y avait une algèbre de Hopf et ce qu'il fallait faire pour prouver l'associativité, nous devions faire un produit tensoriel de l'algèbre de Hopf sur une sous- algèbre, d'accord, et encore une fois, en discutant avec Michael Trott et ainsi de suite, nous avons été capables de mettre en place un programme, qui était capable de faire ça ; je n'ai pas les diapositives mais je veux dire que si vous voyiez les diapositives, vous verriez que ce sont des formules pour certaines expressions pour le produit tensoriel d'algèbres de Hopf et ce sont des crochets de Rankin-Cohen donc vous avez un RC_2, RC_3 RC_4, RC_5. RC_2 est très simple, c'est une expression très simple, donc vous pouvez vérifier l'associativité à la main et vous pouvez donner cela comme un exercice d'accord. RC_3 prend déjà une demi-page de formules, d'accord ; donc si vous voulez vérifier l'associativité, vous pouvez le faire, mais cela nécessitera beaucoup de manipulation, beaucoup de travail ; donc en fait, nous voulions être sûrs qu'il n'y avait pas d'erreur, et nous voulions vérifier l'associativité pour RC_5. Alors cette fois, je n'ai pas contacté Michael Trott parce que je voulais vraiment pouvoir le faire moi-même, mais ce que j'ai dû faire, j'ai dû aller à l'intérieur[2], j'ai dû dire à l' ordinateur qu'au lieu d'itérer, je ne sais pas, 250 fois comme il le faisait habituellement, j'ai dû élever le niveau d'itération à plus de 10 000, puis l' ordinateur a tourné, tourné, tourné, et il a finalement prouvé l' associativité pour RC_5, et c'était vraiment incroyablement impressionnant, si vous savez que c'était quelque chose au niveau... Je me souviens à l'Académie une fois, il y avait un rapport à l'Académie sur le rôle des mathématiques dans la société, etc. Et certaines personnes avaient écrit que l'ordinateur ne serait capable de vérifier que certains cas numériques donc vous savez, quand j'ai vu ça, j'ai sauté parce que je savais déjà bien sûr comment utiliser l'ordinateur pour faire des vérifications réelles et des preuves réelles qui sont des preuves complètes, bien sûr, vous savez, et qui ne traitent pas bien sûr d'évaluations numériques. Je veux dire que cela n'a absolument rien à voir avec les évaluations numériques, je veux dire que c'est, vous savez, c'est un calcul, c'est un calcul qui est très élaboré mais bon, l'ordinateur le fait.

Et un autre exemple, qui est un exemple très récent, très récent, c'est que comme je l'ai dit vous savez, j'ai toujours aimé faire ces très longs calculs à la main, la raison étant que je crois que c'est une sorte de... "Éloge de la durée", si vous voulez. Je crois que lorsque vous faites ces calculs, l'esprit est dans un certain état qui est très spécial parce qu'après un certain temps, vous faites plus ou moins la même chose, et l'esprit est libre mais il sait de quoi il parle. C'est une sorte d'état de méditation. Si vous voulez, c'est une sorte de méditation. Vous apprenez à compter un, deux, trois, quatre, etc., et non pas à le faire de manière répétée. Votre esprit est libre. Lorsque vous calculez à la main, vous atteignez un tel état de méditation.

Ce qui s'est passé, c'est que j'avais une autre collaboratrice, en 1989. Nous avons fait un calcul avec Paula Cohen. Nous avons fait un calcul très élaboré et, à un moment donné, nous avons trouvé un résultat. Nous avons fait ce calcul à la main et, encore une fois, c'était quelque chose qui consistait à prendre un carnet complet, je veux dire un petit livre comme celui-ci, qui était plein de calculs. Nous ne l'avons pas publié parce que nous n'étions pas satisfaits du résultat. L'année dernière, je l'ai rencontrée et nous avons décidé que nous devrions peut-être publier nos calculs. Mais vous savez comment fonctionne le cerveau. À un moment donné, dans mon cerveau, j'ai dit "ok" mais ce calcul était très étrange parce que nous obtenions une expression très compliquée en fonction de l'opérateur modulaire, en fonction du laplacien, et ainsi de suite et j'ai dit que ce calcul

[2] *Note de la transcriptrice : i.e. modifier le code.*

ne correspondait pas à un autre résultat que j'avais trouvé avec un autre collaborateur et ce n'était pas une preuve, c'était une sorte d'argument formel, mais cet argument formel aurait dû impliquer que ce résultat aurait dû être beaucoup plus simple que ce qu'il était, ok. Mais le problème était le suivant : le problème est qu'à ce moment-là, quand nous avons fait ce calcul, il y avait tellement de raisons d'être incertain du résultat, parce qu'il y avait tellement d'étapes faites à la main, que la probabilité que nous ayons fait une erreur en cours de route était si grande que nous n'avons pas essayé de simplifier le résultat à la fin. Ok, donc ce que j'ai décidé de faire récemment, c'est de réduire ce calcul avec un ordinateur, ok. Donc, bien sûr, j'ai refait le calcul avec un ordinateur, vraiment, et l'ordinateur a trouvé les doigts dans le clavier, le même résultat que nous avions trouvé. Donc nous n'avions pas fait d'erreur, ok ; mais ensuite, j'ai dit "ok maintenant je devrais essayer de montrer que le résultat est en effet aussi compliqué que ça". Ça a l'air correct. Alors j'ai essayé quelques exemples, cette fois c'étaient des exemples numériques et j'ai toujours trouvé quelque chose de très simple, d'accord, alors j'ai dit, d'accord, il doit y avoir une raison, vous savez, il doit y avoir une raison pour laquelle... d'accord. Et finalement, bien sûr, en utilisant un peu l'ordinateur et aussi en utilisant le calcul à la main, j'ai trouvé que le résultat était plus simple qu'il n'y paraissait et qu'en fait, il impliquait l'analogue du théorème de Gauss-Bonnet, pour ce qu'on appelle le tore non-commutatif. Et l'épilogue de l'histoire est très amusant parce qu'ensuite, nous avons écrit un article, je vous aurais montré la page de l'article où nous avons mis la formule parce que la formule prenait trois quarts d'une page, dense, vous savez, la formule dense de trois quarts de page ; d'un autre côté, nous avons fait cette preuve uniquement pour une structure conforme très spécifique sur le tore non-commutatif, qui est le rectangle 1, c'est comme si vous vouliez que la courbe elliptique que vous obtenez soit très spéciale, je veux dire, c'est une valeur très spéciale du paramètre tour dans la courbe elliptique.

Donc dans l'article, nous avons écrit "d'accord, nous croyons que le résultat général est vrai, mais nous n'avons fait le calcul que dans ce cas." Bien sûr, nous espérions que d'autres personnes prendraient le relais et feraient ce calcul. Et bien sûr, très peu de temps après, d'autres personnes travaillant dans le même domaine ont dit : "Ok, nous allons essayer de faire ce calcul dans le cas général".

J'ai correspondu avec eux pendant environ six mois et je commençais à m'inquiéter, car il était absolument crucial que le résultat soit le même, sinon la preuve formelle que j'avais faite échouerait. Et très récemment, ils ont archivé le document lundi ou cette semaine, ils ont finalement réussi à faire le calcul jusqu'au bout. Mais voilà ce que je vous aurais montré dans le fichier, mais cela vous aurait distrait. La formule qui, dans le document de Cohen occupait une demie-page occupe dans leur article sept pages et, bien sûr, vous ne pouvez pas le faire à la main.

Le point est le suivant : si vous essayez de faire cela à la main, ce n'est pas la peine, oubliez une telle initiative. C'est assez intéressant.

La seule chose que je regrette de ne pas vous avoir montrée, c'est une page de Galois, que j'ai sur la diapositive, dans laquelle, de manière très intéressante (vous pouvez la trouver dans les Œuvres complètes de Galois), Galois réfléchissait déjà à ce problème de la complexité des calculs et, si vous voulez, à la façon de le traiter. Ce qu'il disait, bien sûr, vous savez, c'est que nous savons tous qu'il y a quelque chose qui s'appelle l'élégance en géométrie, etc. Et bien sûr, je veux dire que la meilleure situation est une situation dans laquelle vous pouvez deviner une formule courte et trouver une preuve abstraite de la formule courte, mais Galois ne préconisait pas du tout cela. Il disait que si nous faisions cela, nous serions très vite coincés à cause de Euler et si vous voulez, il est nécessaire de faire ces longs calculs. Mais ce qu'il disait était extrêmement intéressant : ce qu'il disait, c'est qu'il est extrêmement important de ne pas vraiment les faire complètement, mais d'imaginer le résultat, puis, après avoir imaginé le résultat, d'utiliser ce résultat.

Et ce qui s'est passé, récemment, c'est une autre utilisation que j'ai faite, à nouveau avec mon ami Michel Dubois-Violette, et qui était la suivante : à savoir que nous voulions qu'il y ait une certaine variété définie par 10 équations en 25 variables, d'accord, et nous voulions comprendre, d'accord. Et, en utilisant l' ordinateur, nous avons trouvé que c'était une variété rationnelle donc elle était paramétrée rationnellement. Mais la paramétrisation rationnelle est quelque chose que vous pouvez faire avec `Mathematica`, mais si vous demandez à `Mathematica` de vous donner la paramétrisation rationnelle, vous savez, `Mathematica` passera peut-être une minute juste pour vous la montrer et cela n'occupera pas, vous savez, une page cela occupera plusieurs pages, et encore d'autres, et d'autres, et d'autres pages ; alors que faire quand vous avez quelque chose comme ça, bien sûr, que faire, vous savez, c'est quelque chose de très simple, vous, vous, vous ne le faites pas, je ne sais pas s'il y a un morceau de craie dans ce tiroir. Je veux dire, je veux dire, vous savez, vous faites cela, d'accord ? *(Il dessine au tableau un signe $\times$, symbolisant le fait qu'on ferme la fenêtre, en se moquant éperdument du résultat qui a été fourni par l'ordinateur.)* Mais l'ordinateur l'a dans sa mémoire d'accord et ensuite ce que vous pouvez faire, c'est faire ce que Galois disait, je veux dire, maintenant, c'est dans l'ordinateur, d'accord, et maintenant, vous pouvez l'utiliser. Comment l'utilisez-vous parce que Michel disait "D'accord, vous savez, cette courbe qui est associée à la solution sera toujours triviale. - Ok, fini, d'accord, très bien, je lui ai dit, non, allez, je veux dire..." Donc j'ai pris un nombre aléatoire, j'ai pris un nombre aléatoire comme données de ce truc, d'accord, et puis, j'ai calculé la courbe, et bien sûr, la courbe était une courbe elliptique, donc ce n'était pas du tout une courbe triviale.

Donc ce que j'ai dit, c'est qu'il y a cette façon, d'utiliser la machine, qui est très proche de ce que Galois avait en tête, d'accord, et qui est incroyablement puissante si, en plus de cela, on a la possibilité de prendre un point générique, à savoir d'utiliser un nombre aléatoire, etc.

Et le dernier exemple que je voulais vous montrer, mais il n'est pas nécessaire de montrer le graphe, c'est qu'il y a une autre utilisation, bien sûr beaucoup plus simple, de `Mathematica`, car ce n'est pas du calcul formel, si vous voulez, mais il y a une autre utilisation qui est en fait assez convaincante, c'est la suivante : `Mathetmatica` a les zéros de la fonction zeta mémorisés dans ses bibliothèques, d'accord, et dans notre travail avec Katia Consani, nous travaillions avec une expression qui était censée être une fonction de comptage et qui était censée donner une sorte de fonction qui serait positive mais qui aurait un comportement extrêmement étrange. C'était une distribution qui devait être positive pour les valeurs de $q > 1$, d'accord, mais la valeur en $q = 1$ devait être $-\infty$. Donc c'est un comportement très, très étrange auquel on ne s'attendrait jamais, ok. Maintenant avec un ordinateur... l'expression qui était donnée était une somme sur les zéros de la fonction ζ de Riemann. Donc c'est quelque chose que, si vous travaillez avec un mathématicien ordinaire, il se peut que vous puissiez calculer trois zéros avec quelques chiffres et ainsi de suite, mais vous n'obtiendrez jamais rien d'aussi proche que vous le souhaitez de la fonction, euh avec trois zéros, vous avez besoin de quelque chose comme mille zéros et ainsi de suite je veux dire que l'expression était une expression comme celle-ci $\sum \frac{q^{\rho+1}}{\rho+1}$ et ρ varie sur les zéros non-triviaux de zeta, ok. C'était un autre terme mais, je veux dire, c'était le terme principal. Donc maintenant, ce qui est vraiment étonnant et extrêmement convaincant, c'est que si vous prenez la somme, bien sûr pas sur tous les zéros, mais par exemple, sur les 10 000 premiers zéros, ok, et vous demandez à `Mathematica` de tracer le graphe de cette fonction, alors il s'avère que `Mathematica` trace exactement ce que vous attendiez, et je veux dire et c'est assez étonnant parce que si vous voulez, cela vous montre que vous n'avez fait aucune erreur. Donc ceci est une autre utilisation de `Mathematica` au sens où je le considère comme... c'est un peu comme si vous étiez un physicien et que vous travailliez sur une théorie très abstraite et que vous n'auriez jamais aucun contact avec le réel, vous savez, les expériences et ainsi de suite. Donc ici, c'est la même chose, il y a beaucoup de domaines dans lesquels les formules semblent alors comment dire si abstraites, et si compliquées, et etc. que personne ne peut vraiment les tester concrètement, d'accord, comme tester une erreur de signe, etc. Mais maintenant c'est parfaitement possible.

Donc la seule chose que je dirais, c'est qu'il y a encore... et j'ai eu une longue discussion avec Michael Trott à l'époque à ce sujet, vous voyez, quand vous écrivez avec `Mathematica`, quand vous écrivez `Simplify...`, j'ai essayé avant de venir, mais j'ai le programme numéro sept, donc d'accord. Mais si vous écrivez

$$\text{Simplify}(\text{jacobi}(s_n)^2 + \text{jacobi}(c_n)^2)$$

(j'aurais dû mettre x, d'accord), alors `Mathematica` vous renvoie ce que vous avez écrit, d'accord, donc là, si vous voulez, vous savez ce que je dirais, c'est que je pense qu'il est extrêmement important pour le développement de `Mathematica` que les gens réalisent qu'après tout, c'est `Mathematica`, donc il a de nombreuses applications pour les ingénieurs, etc., mais je pense qu'il est très important qu'il y ait un côté du développement qui est purement mathématique, et qui essaie d'implémenter dans des fonctions spéciales, autant de règles de simplification que possible, qui ne sont pas encore présentes. Je veux dire la même chose pour les fonctions hypergéométriques. Vous savez, il existe des identités simples pour les fonctions hypergéométriques qui ne sont pas implémentées. Je pense que cela devrait être une partie très importante du projet de recherche de `Mathematica`. Si vous voulez que ces choses soient implémentées dans la méthode simplifiée, je veux dire que la méthode simplifiée fonctionne merveilleusement bien lorsque vous travaillez avec des fonctions trigonométriques.

Je dois vous dire une chose, juste pour que vous compreniez la complexité du calcul que je faisais avec Michel Dubois-Violette. Ok, lorsque nous faisions ce q-développement, nous avions cette somme de 1 440 intégrales. Ok, vous devez savoir que lorsque nous calculions jusqu'à q^9, chacune des intégrales du q-développement était de 250 pages d' expressions trigonométriques, chacune d'elles.

Ok, donc bien sûr, vous savez que la méthode de simplification était cruciale parce que vous devez simplifier au bon moment. Vous savez, si vous aviez ajouté ces expressions, je veux dire, cela aurait été totalement impossible. Je pense donc qu'il y a une partie du développement qui n'a pas été mentionnée, mais je pense qu'elle est très importante, c'est qu'elle peut être un outil formidable pour les mathématiques pures. Je l'utilise tout le temps, je l'utilise tout le temps, car je...

MAIS il y a deux choses auxquelles il faut réfléchir très attentivement. La première est d'améliorer la simplification, vraiment d'améliorer la simplification pour les fonctions spéciales, pour beaucoup de choses. La deuxième chose est que nous devons trouver un moyen de ne pas mettre en péril cette incroyable possibilité qu'un mathématicien peut avoir lorsqu'il fait des calculs et qu'en même temps son esprit peut penser, car il se met dans ce genre de mode.

J'ai plus ou moins réussi à arriver à ce stade. Par exemple, maintenant je calcule avec des bi-polynômes et ainsi de suite. Et pour cela, l'ordinateur est, vous savez, vous ne pouvez pas éviter d'utiliser l'ordinateur, mais ce que je veux dire, c'est que je pense qu'il est très important de réfléchir, car pour éviter ce fait terrible que les jeunes, lorsqu'ils doivent multiplier par 10, doivent utiliser la machine. Donc vous voyez ce que je veux dire.

Il y a une sorte d'interface très fine, une sorte de frontière très délicate à situer entre le calcul à la main... et quand je dis calcul à la main, je ne veux pas dire que vous calculez avec un morceau de papier, etc., cela peut aussi être du calcul à la main avec `Mathematica`. Vous savez, cela pourrait être le cas, vous pourriez utiliser le format de `Mathematica` pour le faire. Mais je veux dire qu'il y a des calculs où, si vous voulez, vous pensez à chaque étape, etc., et au moment où vous utilisez réellement la puissance de la machine, je pense qu'il y a une vraie question et cette question est extrêmement importante car vous savez très bien que si vous demandez à l'ordinateur de faire un calcul trop tôt, ce sera un désastre. Ce que vous obtiendrez, vous savez, c'est quelque chose d'inutile. Vous devez donc réfléchir, vous devez passer beaucoup de temps à réfléchir et même à essayer de faire les calculs vous-même en vous promenant, avant de recourir à l'ordinateur. Mais le problème dont je parle est exactement de savoir comment situer cela et comment améliorer cette interface entre le calcul fait par soi-même, et la réflexion et l'utilisation de l'ordinateur, ok, donc je pense que je vais arrêter ici.

[*Applaudissements*]