

# Variétés non-commutatives, algèbre des instantons et déformations isospectrales

## Alain Connes, Giovanni Landi

**Résumé :** Nous présentons de nouveaux exemples de variétés non commutatives moins classiques que le tore non commutatif ou les déformations de Moyal de  $\mathbb{R}^n$ . Elles découlent naturellement de considérations fondamentales de topologie différentielle non commutative et possèdent des propriétés globales non triviales.

Parmi ces nouveaux exemples figurent l'algèbre des instantons et les 4-sphères non commutatives  $S_\theta^4$ . Nous construisons les algèbres non commutatives  $\mathcal{A} = C^\infty(S_\theta^4)$  de fonctions sur les sphères non commutatives comme solutions de l'équation d'annulation,  $\text{ch}_j(e) = 0, j < 2$ , du caractère de Chern dans l'homologie cyclique de  $\mathcal{A}$  d'un idempotent  $e \in M_4(\mathcal{A})$ ,  $e^2 = e$ ,  $e = e^*$ . Nous décrivons l'espace non commutatif universel obtenu à partir de cette équation comme une grassmannienne non commutative ainsi que la notion correspondante de morphismes admissibles. Cet espace  $\text{Gr}$  contient la suspension d'une 3-sphère non commutative intimement liée aux déformations de groupe quantique  $\text{SU}_q(2)$  de  $\text{SU}(2)$  mais pour des valeurs inhabituelles (valeurs complexes de module un) du paramètre  $q$  des  $q$ -analogues,  $q = \exp(2\pi i\theta)$ .

Nous construisons ensuite la géométrie non commutative de  $S_\theta^4$  donnée par un triplet spectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  et vérifions tous les axiomes des variétés non commutatives. Dans un article précédent, il a été démontré que pour toute métrique riemannienne  $g_{\mu\nu}$  sur  $S^4$  dont la forme volume  $\sqrt{g} d^4x$  est la même que celle de la métrique ronde, l'opérateur de Dirac correspondant fournit une solution à l'équation quartique :

$$\left\langle \left( e - \frac{1}{2} \right) [D, e]^4 \right\rangle = \gamma_5$$

où  $\langle \rangle$  est la projection sur le commutant des matrices  $4 \times 4$ .

Nous allons montrer comment construire l'opérateur de Dirac  $D$  sur les 4-sphères non commutatives  $S_\theta^4$  de sorte que l'équation précédente reste valide sans modification. Enfin, nous montrons que toute variété spinorielle riemannienne compacte dont le groupe d'isométries est de rang  $r \geq 2$  admet des déformations isospectrales vers des géométries non commutatives.

## 1 Introduction

Il est important de disposer d'exemples de variétés non commutatives moins classiques que le tore non commutatif [C3], [Co-R], ou la déformation de Moyal classique de  $\mathbb{R}^n$  dont l'algèbre est peu intéressante.

Ceci est d'autant plus important compte tenu du regain d'activité dans l'interaction entre la théorie des cordes et la géométrie non commutative, initiée dans [CDS], [N-S], [Witten]. Ces nouveaux exemples doivent émerger naturellement, présenter des propriétés globales non triviales (et également satisfaire aux critères des variétés non commutatives définies dans [Co3]).

Cet article fournira et analysera de tels exemples très naturels, notamment l'algèbre des instantons et les 4-sphères non commutatives  $S_\theta^4$ , obtenus à partir de considérations fondamentales de topologie différentielle non commutative.

---

Référence : <https://arxiv.org/pdf/math/0011194>.

Traduction : Denise Vella-Chemla assistée de Google traduction, octobre 2025.

Nous montrerons également de manière assez générale que toute variété spinorielle riemannienne compacte dont le groupe d'isométrie a un rang  $r \geq 2$  admet des déformations isospectrales vers des géométries non commutatives.

Une géométrie non commutative est décrite par un triplet spectral :

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D) \quad (1)$$

où  $\mathcal{A}$  est une algèbre non commutative munie d'une involution  $*$ , agissant dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , tandis que  $D$  est un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte et tel que :

$$[D, a] \text{ est borné } \forall a \in \mathcal{A}. \quad (2)$$

L'opérateur  $D$  joue en général le rôle de l'opérateur de Dirac [19] en géométrie riemannienne ordinaire. Il spécifie à la fois la métrique sur l'espace d'états de  $\mathcal{A}$  par

$$d(\varphi, \psi) = \text{Sup} \{ |\varphi(a) - \psi(a)|; \|[D, a]\| \leq 1 \} \quad (3)$$

et la classe fondamentale de  $K$ -homologie (cf. [6]). Ce qui assure la cohérence de ce point de vue spectral en géométrie non commutative, c'est la non-trivialité du couplage entre la  $K$ -théorie de l'algèbre  $\mathcal{A}$  et la classe de  $K$ -homologie de  $D$ , donnée dans le cas pair par

$$[e] \in K_0(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Index } D_e^+ \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Ici,  $[e]$  est la classe d'un idempotent

$$e \in M_r(\mathcal{A}), \quad e^2 = e, \quad e = e^* \quad (5)$$

dans l'algèbre des matrices  $r \times r$  sur  $\mathcal{A}$ , et

$$D_e^+ = e D^+ e, \quad (6)$$

où  $D^+ = D \left( \frac{1+\gamma}{2} \right)$  est la restriction de  $D$  à l'image  $\mathcal{H}^+$  de  $\frac{1+\gamma}{2}$  et  $\gamma$  est la graduation  $\mathbb{Z}/2$  de  $\mathcal{H}$  dans le cas pair ; Ainsi,  $D$  est de la forme :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & D_+^* \\ D_+ & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

La pierre angulaire de la théorie générale est une formule d'indice issue de la théorie des opérateurs [6], [12], [16] qui exprime l'appariement d'indices ci-dessus (4) par des cocycles cycliques locaux explicites sur l'algèbre  $\mathcal{A}$ . Ces formules locales deviennent extrêmement simples dans le cas particulier où seule la composante supérieure du caractère de Chern  $\text{Ch}(e)$  en homologie cyclique ne s'annule pas. (Ceci est facile à comprendre dans le cas analogue plus simple des variétés ordinaires puisque la formule de l'indice d'Atiyah-Singer donne l'intégrale du produit du caractère de Chern  $\text{Ch}(E)$ , du fibré  $E$  sur la variété  $M$ , par la classe d'indices ; si la seule composante de  $\text{Ch}(E)$  est  $\text{ch}_n$ ,  $n = \frac{1}{2} \dim M$ , seule la composante de dimension 0 de la classe d'indice intervient dans la formule

de l'indice.

Sous cette hypothèse, la formule de l'indice se réduit en effet à :

$$\text{Indice } D_e^+ = (-1)^m \oint \gamma \left( e - \frac{1}{2} \right) [D, e]^{2m} D^{-2m} \quad (8)$$

à condition que les composantes  $\text{ch}_j(e)$  s'annulent toutes pour  $j < m$ . Ici,  $\gamma$  est la  $\mathbb{Z}/2$ -graduation de  $\mathcal{H}$  comme ci-dessus, la résolvante de  $D$  est d'ordre  $\frac{1}{2m}$  (c'est-à-dire que ses valeurs caractéristiques  $\mu_k$  sont en  $O(k^{-\frac{1}{2m}})$ ) et  $\oint$  est le coefficient de la divergence logarithmique dans la trace d'opérateur ordinaire [15] [26].

Nous avons commencé dans [10] à étudier les relations algébriques impliquées par l'annulation,

$$\text{ch}_j(e) = 0 \quad j < m, \quad (9)$$

du caractère de Chern de  $e$  dans l'homologie cyclique de  $\mathcal{A}$ . Notez que cette annulation au niveau de la chaîne est une condition bien plus forte que l'annulation de la forme différentielle de Chern usuelle.

Pour  $m = 1$  (et  $r = 2$  dans (5)), nous avons trouvé des solutions commutatives avec  $\mathcal{A} = C^\infty(S^2)$  comme algèbre engendrée par les composantes de la matrice,

$$e_{ij}, \quad e = [e_{ij}] \in M_2(\mathcal{A}). \quad (10)$$

En fait, pour  $m = 1$ , la commutativité est imposée par les relations  $e^2 = e$ ,  $e = e^*$  et  $\text{ch}_0(e) = 0$ .

Pour  $m = 2$  (et  $r = 4$  dans (5)), nous avons également trouvé des solutions commutatives avec  $\mathcal{A} = C^\infty(S^4)$ , où  $S^4$  apparaît comme espace projectif quaternionique. Cependant, les calculs de [10] utilisaient une “ansatz” et n'analysaient pas la solution générale. En particulier, cela laissait ouverte la possibilité d'une solution non commutative pour  $m = 2$  (et  $r = 4$ ). Nous montrerons dans cet article que de telles solutions non commutatives existent et fournissent des exemples très naturels de 4-sphères non commutatives  $S_\theta^4$ . Nous décrirons également l'espace non commutatif associé à (9) pour  $m = 2$  (et  $r = 4$ ) comme une grassmannienne non commutative, ainsi que la notion correspondante de morphismes admissibles.

Cet espace Gr contient la suspension d'une 3-sphère non commutative, intimement liée aux déformations du groupe quantique de  $SU(2)$ , mais pour des valeurs complexes de module un du paramètre usuel  $q$  des  $q$ -analogues,  $q = \exp(2\pi i\theta)$ .

Notre prochaine étape consistera à analyser les métriques (c'est-à-dire les opérateurs  $D$ ) sur nos solutions de l'équation (9).

Dans [10], il a été démontré que pour toute métrique riemannienne  $g_{\mu\nu}$  sur  $S^4$  dont la forme volume  $\sqrt{g} d^4x$  est identique à celle de la métrique ronde, l'opérateur de Dirac correspondant admet une solution de l'équation quartique :

$$\left\langle \left( e - \frac{1}{2} \right) [D, e]^4 \right\rangle = \gamma_5 \quad (11)$$

où  $\langle \rangle$  désigne la projection sur le commutant des matrices  $4 \times 4$  (rappelons que  $e \in M_4(\mathcal{A})$  est une matrice  $4 \times 4$ ).

Nous montrerons dans cet article comment construire l'opérateur de Dirac sur les 4-sphères non commutatives  $S_\theta^4$  de sorte que l'équation (11) reste valide sans modification. La combinaison de cette équation (11) avec la formule de l'indice donne une quantification du volume.

$$\oint ds^4 \in \mathbb{N} \quad ds = D^{-1} \quad (12)$$

et fixe (dans une classe de  $K$ -homologie donnée pour l'opérateur  $D$ ) le terme dominant de l'action spectrale [3],

$$\text{Trace} \left( f \left( \frac{D}{\Lambda} \right) \right) = \frac{\Lambda^4}{2} \oint ds^4 + \dots \quad (13)$$

Comme le terme suivant est l'action de Hilbert-Einstein dans le cas riemannien usuel [3], [18], [17], il est très naturel de comparer diverses solutions (commutatives ou non) de (11) à l'aide de cette action.

## 2 Composantes du caractère de Chern et de l'algèbre des instantons

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre (sur  $\mathbb{C}$ ) et

$$e \in M_r(\mathcal{A}), \quad e^2 = e \quad (14)$$

un idempotent.

La composante  $\text{ch}_n(e)$  du caractère de Chern (réduit) de  $e$  est un élément de

$$\mathcal{A} \otimes \underbrace{\overline{\mathcal{A}} \otimes \dots \otimes \overline{\mathcal{A}}}_{2n} \quad (15)$$

où  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{C}1$  est le quotient de  $\mathcal{A}$  par les multiples scalaires de l'unité 1.

La formule pour  $\text{ch}_n(e)$  est (avec  $\lambda_n$  une constante de normalisation) :

$$\text{ch}_n(e) = \lambda_n \sum \left( e_{i_0 i_1} - \frac{1}{2} \delta_{i_0 i_1} \right) \otimes e_{i_1 i_2} \otimes e_{i_2 i_3} \cdots \otimes e_{i_{2n} i_0} \quad (16)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker usuel et seule la classe  $\tilde{e}_{i_k i_{k+1}} \in \overline{\mathcal{A}}$  est utilisée dans la formule. La propriété cruciale des composantes  $\text{ch}_n(e)$  est qu'elles définissent un *cycle* dans le bicomplexe  $(b, B)$  d'homologie cyclique [5], [20],

$$B \text{ch}_n(e) = b \text{ch}_{n+1}(e). \quad (17)$$

Pour toute paire d'entiers  $m, r$ , on note  $\mathcal{A}_{m,r}$  l'algèbre universelle associée aux relations,

$$\text{ch}_j(e) = 0 \quad \forall j < m. \quad (18)$$

Plus précisément, soit  $\mathcal{A}_{m,r}$  engendré par les  $r^2$  éléments  $e_{ij}$  ;  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  et nous imposons d'abord les relations

$$e^2 = e \quad e = [e_{ij}]. \quad (19)$$

Un homomorphisme admissible,

$$\rho : \mathcal{A}_{m,r} \rightarrow \mathcal{B}, \quad (20)$$

vers une algèbre quelconque  $\mathcal{B}$ , est donné par les  $\rho(e_{ij}) \in \mathcal{B}$  qui vérifient

$$\rho(e)^2 = \rho(e), \quad (21)$$

et  $\text{ch}_j(\rho(e)) = 0$  pour  $j < m$ , d'où

$$\sum \left( \rho(e_{i_0 i_1}) - \frac{1}{2} \delta_{i_0 i_1} \right) \otimes \widetilde{\rho(e_{i_1 i_2})} \otimes \cdots \otimes \widetilde{\rho(e_{i_{2j} i_0})} = 0 \quad (22)$$

où le symbole  $\sim$  signifie que seule la classe dans  $\overline{\mathcal{B}}$  est pertinente.

On définit  $\mathcal{A}_{m,r}$  comme le quotient de l'algèbre définie par (19) par l'intersection des noyaux de tous les morphismes admissibles  $\rho$ .

Les éléments de l'algèbre  $\mathcal{A}_{m,r}$  peuvent être représentés comme des polynômes en les générateurs  $e_{ij}$  et pour prouver qu'un tel polynôme  $P(e_{ij})$  est non nul dans  $\mathcal{A}_{m,r}$ , il faut construire une solution aux équations ci-dessus pour laquelle  $P(e_{ij}) \neq 0$ .

Pour obtenir une  $C^*$ -algèbre, on munit  $\mathcal{A}_{m,r}$  de l'involution donnée par :

$$(e_{ij})^* = e_{ji} \quad (23)$$

ce qui signifie que  $e = e^*$  dans  $M_r(\mathcal{A})$ . On définit une norme par :

$$\|P\| = \text{Sup } \|(\pi(P))\| \quad (24)$$

où  $\pi$  parcourt toutes les représentations des équations ci-dessus dans l'espace de Hilbert. Un tel  $\pi$  est donné par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et un idempotent auto-adjoint,

$$E \in M_r(\mathcal{L}(\mathcal{H})), \quad E^2 = E, \quad E = E^* \quad (25)$$

tels que (22) soit vérifiée pour  $\mathcal{B} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

On vérifie que pour tout polynôme  $P(e_{ij})$ , la quantité (24), c'est-à-dire le supremum des normes,

$$\|P(E_{ij})\| \quad (26)$$

est finie.

Soit  $A_{m,r}$  la  $C^*$ -algèbre obtenue comme complétion de  $\mathcal{A}_{m,r}$  pour la norme ci-dessus.

Pour se familiariser avec les espaces (a priori non commutatifs)  $\text{Gr}_{m,r}$  tels que :

$$A_{m,r} = C(\text{Gr}_{m,r}) \quad (27)$$

nous rappellerons d'abord, d'après [10], ce qui se passe dans le cas le plus simple :  $m = 1, r = 2$ .

On a  $e = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$  et la condition (20) signifie simplement que

$$e_{11} + e_{22} = 1 \quad (28)$$

tandis que (19) signifie que

$$e_{11}^2 + e_{12} e_{21} = e_{11}, \quad e_{11} e_{12} + e_{12} e_{22} = e_{12}, \quad (29)$$

$$e_{21} e_{11} + e_{22} e_{21} = e_{21}, \quad e_{21} e_{12} + e_{22}^2 = e_{22}.$$

D'après (28), on obtient  $e_{11} - e_{11}^2 = e_{22} - e_{22}^2$ , donc (29) montre que  $e_{12} e_{21} = e_{21} e_{12}$ . On constate également que  $e_{12}$  et  $e_{21}$  commutent tous deux avec  $e_{11}$ . Ceci montre que  $\mathcal{A}_{1,2}$  est commutatif et permet de vérifier que  $\text{Gr}_{1,2} = S^2$  est la 2-sphère. Ainsi,  $\text{Gr}_{1,2}$  est un espace commutatif ordinaire.

Nous passons maintenant au cas  $m = 2, r = 4$ . Notre objectif principal est de montrer que  $\text{Gr}_{2,4}$  est un espace non commutatif très intéressant. Remarquons que la notion de morphisme admissible est un élément de structure non trivial sur  $\text{Gr}_{2,4}$ , puisque l'application identité n'est pas admissible.

On peut d'abord reformuler la construction de la section XI de [10] et obtenir une surjection admissible :

$$A_{2,4} \xrightarrow{\sigma} C(S^4) \quad (30)$$

où  $S^4$  apparaît naturellement comme espace projectif quaternionique,  $S^4 = P_1(\mathbb{H})$ .

Rappelons d'après [10] que l'égalité,

$$E(x) = \begin{bmatrix} t & q \\ \bar{q} & 1 - t \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C}) \quad (31)$$

pour  $x = (q, t)$  donné par une paire de quaternions  $q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}$  et un nombre réel  $t$  tel que :

$$q \bar{q} = t - t^2 \quad (32)$$

définit une application de la 4-sphère  $S^4$  (le double du 4-disque  $|q| \leq 1$ ) vers la grassmannienne des projections bidimensionnelles  $E = E^2 = E^*$  dans  $M_4(\mathbb{C})$  telle que :

$$\text{Trace}(F(x) F(y) F(z)) = 0 \quad \forall x, y, z \in S^4 \quad (33)$$

où  $F(x) = 2E(x) - 1$  est l'isométrie auto-adjointe correspondante.

L'égalité XI.54 de [10] est plus faible que cette affirmation mais en examinant la démonstration, on obtient (33). Pour formuler le résultat pour des sphères paires arbitraires  $S^{2m}$ , on remarque d'abord qu'en utilisant (17), l'égalité

$$\omega = \text{ch}_m(e) \quad (34)$$

définit un *cycle de Hochschild*  $\rho(\omega) \in Z_{2m}(\mathcal{B})$  pour tout morphisme admissible  $\rho : \mathcal{A}_{m,r} \rightarrow \mathcal{B}$ . On pose  $r = 2^m$  et on construit une surjection admissible,

$$A_{m,2^m} \xrightarrow{\sigma} C(S^{2m}) \quad (35)$$

qui est non triviale dans la mesure où

$$\sigma(\omega) = v \quad (36)$$

est la forme volume de la sphère ronde orientée.

Pour construire  $\sigma$ , on pose  $C = \text{Cliff}(\mathbb{R}^{2m})$  l'algèbre de Clifford de l'espace euclidien (orienté)  $\mathbb{R}^{2m}$ . On identifie  $S^{2m}$  à l'espace des paires  $(\xi, t)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{2m}$  et  $t \in [-1, 1]$  telles que  $\|\xi\|^2 + t^2 = 1$ . On définit alors une application de  $S^{2m}$  vers la grassmannienne des idempotents auto-adjoints dans  $C$  par :

$$E(\xi, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\gamma(\xi) + t\gamma) \quad (37)$$

où  $\gamma(\xi)$  est l'inclusion usuelle de  $\mathbb{R}^{2m}$  dans  $C$  telle que

$$\gamma(\xi)^2 = \|\xi\|^2, \quad \gamma(\xi) = \gamma(\xi)^* \quad (38)$$

et  $\gamma \in C$ ,  $\gamma^* = \gamma$ ,  $\gamma^2 = 1$  est la  $\mathbb{Z}/2$  graduation associée à l'orientation choisie de  $\mathbb{R}^{2m}$ . On a  $\gamma\gamma(\xi) = -\gamma(\xi)\gamma$  pour tout  $\xi$ , ce qui permet de vérifier que  $\gamma(\xi) + t\gamma$  est une involution et  $E$  un idempotent auto-adjoint. Ensuite, pour  $\ell < 2m$ ,  $\ell$  impair,

$$\text{Trace}((\gamma(\xi_1) + t_1\gamma) \dots (\gamma(\xi_\ell) + t_\ell\gamma)) = 0 \quad \forall \xi_j, t_j. \quad (39)$$

En effet, le coefficient des monômes en  $t$  de degré pair est de la forme  $\text{Trace}(\gamma(\xi_1) \dots \gamma(\xi_{2k+1}))$  qui s'annule par anticommutation avec  $\gamma$ . Le coefficient des monômes de degré impair dans  $t$  est de la forme  $\text{Trace}(\gamma(\xi_1) \dots \gamma(\xi_{2k})\gamma)$  où  $k < m$ .

Il s'annule car  $\gamma$  est orthogonal à toute filtration inférieure de  $C$ .

On obtient ainsi :

$$\text{Trace} \left( \left( E(x_1) - \frac{1}{2} \right) \dots \left( E(x_\ell) - \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \quad \forall x_1, \dots, x_\ell \in S^{2m} \quad (40)$$

pourvu que  $\ell$  soit impair,  $\ell < 2m$ .

Par conséquent,  $E$  définit un homomorphisme admissible  $\sigma : A_{m,2^m} \rightarrow C(S^{2m})$  et l'on a, comme dans [10], le résultat suivant :

- Théorème 1**    a)  $E \in C^\infty(S^{2m}, M_r(\mathbb{C}))$  satisfait  $E = E^2 = E^*$  et  $\text{ch}_j(E) = 0 \ \forall j < m$ .  
 b) Le cycle de Hochschild  $\omega = \text{ch}_m(E)$  est la forme volume de la sphère ronde  $S^{2m}$ .  
 c) Soit  $g$  une métrique riemannienne sur  $S^{2m}$  de forme volume  $\sqrt{g} d^{2m}x = \omega$ , alors l'opérateur de Dirac correspondant  $D$  vérifie :

$$\left\langle \left( e - \frac{1}{2} \right) [D, e]^{2m} \right\rangle = \gamma$$

où  $e = E$  comme ci-dessus et  $\langle \rangle$  est la projection sur le commutant de  $M_r(\mathbb{C})$ .

Nous avons identifié  $M_r(\mathbb{C})$  à l'algèbre de Clifford  $C$ ,  $r = 2^m$ . Ce résultat montre en particulier que  $\text{Gr}_{m,r}$ ,  $r = 2^m$ , contient  $S^{2m}$  de telle sorte que  $\omega|_{S^{2m}}$  soit la forme volume de la métrique ronde. La démonstration est la même que dans [10].

### 3 La 4-sphère non commutative

Considérons maintenant l'inclusion  $S_\theta^4 \subset \text{Gr}_{2,4}$  où  $S_\theta^4$  est la 4-sphère non commutative que nous allons décrire.

Il convient d'observer d'emblée que le groupe de Lie compact  $SU(4)$  agit par automorphismes,

$$PSU(4) \subset \text{Aut}(C^\infty \text{Gr}_{2,4}) \quad (41)$$

par l'opération suivante,

$$e \rightarrow U e U^* \quad (42)$$

où  $U \in SU(4)$  est vue comme une matrice  $4 \times 4$  et  $e = [e_{ij}]$  comme ci-dessus.

Nous allons maintenant montrer que l'algèbre  $C(\text{Gr}_{2,4})$  est non commutative en construisant des surjections admissibles explicites,

$$C(\text{Gr}_{2,4}) \rightarrow C(S_\theta^4) \quad (43)$$

dont la forme est dictée par des déformations naturelles de la 4-sphère, semblables dans leur esprit à la déformation standard de  $\mathbb{T}^2$  en  $\mathbb{T}_\theta^2$ .

Nous déterminons d'abord l'algèbre engendrée par  $M_4(\mathbb{C})$  et une projection  $e = e^*$  telle que  $\langle e - \frac{1}{2} \rangle = 0$  comme ci-dessus et dont l'expression matricielle 2x2 est de la forme :

$$[e^{ij}] = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (44)$$

où chaque  $q_{ij}$  est une matrice  $2 \times 2$  de la forme :

$$q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\lambda\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}, \quad (45)$$

et  $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$  est un nombre complexe de module un, différent de -1 par commodité.

Puisque  $e = e^*$ ,  $q_{11}$  et  $q_{22}$  sont auto-adjoints. De plus, puisque  $\langle e - \frac{1}{2} \rangle = 0$ , on peut trouver  $t = t^*$  tel que,

$$q_{11} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \quad q_{22} = \begin{bmatrix} (1-t) & 0 \\ 0 & (1-t) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

On pose  $q_{12} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\lambda\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}$ , et on obtient alors de  $e = e^*$ ,

$$q_{21} = \begin{bmatrix} \alpha^* & -\bar{\lambda}\beta \\ \beta^* & \alpha \end{bmatrix}. \quad (47)$$

On constate ainsi que le commutant  $\mathcal{B}_\theta$  de  $M_4(\mathbb{C})$  est engendré par  $t, \alpha, \beta$  et il nous faut d'abord déterminer les relations imposées par l'égalité  $e^2 = e$ .

En fonction de  $e = \begin{bmatrix} t & q \\ q^* & 1-t \end{bmatrix}$ , l'équation  $e^2 = e$  signifie que  $t^2 - t + qq^* = 0$ ,  $t^2 - t + q^*q = 0$  et  $[t, q] = 0$ . Ceci montre que  $t$  commute avec  $\alpha, \beta, \alpha^*$  et  $\beta^*$  et puisque  $qq^* = q^*q$  est une matrice diagonale

$$\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha, \quad \alpha\beta = \lambda\beta\alpha, \quad \alpha^*\beta = \bar{\lambda}\beta\alpha^*, \quad \beta\beta^* = \beta^*\beta \quad (48)$$

donc la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{B}_\theta$  n'est pas commutative pour  $\lambda$  différent de 1. La seule autre relation est, (outre  $t = t^*$ ),

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* + t^2 - t = 0. \quad (49)$$

On note  $S_\theta^4$  l'espace non commutatif correspondant, de sorte que  $C(S_\theta^4) = \mathcal{B}_\theta$ . Par construction, il s'agit de la suspension de la 3-sphère non commutative  $S_\theta^3$  dont l'algèbre de coordonnées est engendrée par  $\alpha$  et  $\beta$  comme ci-dessus, et par exemple par la valeur spéciale  $t = 1/2$ . Cette 3-sphère non commutative est liée par prolongement analytique du paramètre au groupe quantique  $SU(2)_q$ , mais la théorie usuelle exige que  $q$  soit réel alors que nous avons besoin d'un nombre complexe de module un, ce qui compromet l'unitarité du coproduit [27].

Si nous avons considéré le paramètre de déformation comme réel,  $\lambda = q \in \mathbb{R}$ , comme dans [14], nous aurions obtenu une déformation différente  $S_q^4$  de la sphère commutative  $S^4$ , dont l'algèbre diffère de celle présentée ci-dessus. Plus important encore, la composante bidimensionnelle  $ch_1(e)$  du caractère de Chern ne s'annulerait pas.

Nous allons maintenant vérifier que pour la sphère  $S_\theta^4$ , la composante bidimensionnelle  $ch_1(e)$  s'annule automatiquement en tant qu'élément du bicomplexe (normalisé)  $(b, B)$  de sorte que,

$$ch_n(e) = 0, \quad n = 0, 1. \quad (50)$$

Avec  $q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\lambda\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}$ , on obtient

$$ch_1(e) = \left\langle \left( t - \frac{1}{2} \right) (dq dq^* - dq^* dq) + q (dq^* dt - dt dq^*) + q^* (dt dq - dq dt) \right\rangle$$

où ce qui est exprimé du côté droit est à considérer dans  $M_2(\mathbb{C})$  et nous utilisons la notation  $d$  au lieu de la notation tensorielle.

Les éléments diagonaux de  $\omega = dq dq^*$  sont

$$\omega_{11} = d\alpha d\alpha^* + d\beta d\beta^*, \quad \omega_{22} = d\beta^* d\beta + d\alpha^* d\alpha$$

alors que pour  $\omega' = dq^* dq$ , on obtient,

$$\omega'_{11} = d\alpha^* d\alpha + d\beta d\beta^*, \quad \omega'_{22} = d\beta^* d\beta + d\alpha d\alpha^*.$$

Il en découle, puisque  $t$  est diagonale, que

$$\left\langle \left( t - \frac{1}{2} \right) (dq dq^* - dq^* dq) \right\rangle = 0. \quad (51)$$

Les éléments diagonaux de  $q dq^* dt = \rho$  sont

$$\rho_{11} = \alpha d\alpha^* dt + \beta d\beta^* dt, \quad \rho_{22} = \beta^* d\beta dt + \alpha^* d\alpha dt$$

alors que pour  $\rho' = q^* dq dt$ , ce sont

$$\rho'_{11} = \alpha^* d\alpha dt + \beta d\beta^* dt, \quad \rho'_{22} = \beta^* d\beta dt + \alpha d\alpha^* dt.$$

Similairement pour  $\sigma = q dt dq^*$  and  $\sigma' = q^* dt dq$ , on obtient les éliminations requises de telle façon que,

$$ch_1(e) = 0, \quad (52)$$

On obtient alors,

**Théorème 2** a)  $e \in C^\infty(S_\theta^4, M_4(\mathbb{C}))$  satisfait  $e = e^2 = e^*$  et  $ch_j(e) = 0 \quad \forall j < 2$ .

b)  $\text{Gr}_{2,4}$  est un espace non commutatif et  $S_\theta^4 \subset \text{Gr}_{2,4}$ .

Puisque  $ch_1(e) = 0$ , il s'ensuit que  $ch_2(e)$  est un cycle de Hochschild qui jouera le rôle de la forme volume ronde sur  $S_\theta^4$  et que nous allons maintenant calculer.

Avec les notations précédentes, on a :

$$ch_2(e) = \left\langle \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} & q \\ q^* & \frac{1}{2} - t \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} dt & dq \\ dq^* & -dt \end{bmatrix} \right)^4 \right\rangle \quad (53)$$

et la somme des éléments diagonaux est

$$\begin{aligned} & \left( t - \frac{1}{2} \right) \left( (dt^2 + dq dq^*)^2 + (dt dq - dq dt)(dq^* dt - dt dq^*) \right) \\ - & \left( t - \frac{1}{2} \right) \left( (dq^* dt - dt dq^*)(dt dq - dq dt) + (dq^* dq + dt^2)^2 \right) \\ + & q \left( (dq^* dt - dt dq^*)(dt^2 + dq dq^*) + (dq^* dq + dt^2)(dq^* dt - dt dq^*) \right) \\ + & q^* \left( (dt^2 + dq dq^*)(dt dq - dq dt) + (dt dq - dq dt)(dq^* dq + dt^2) \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Puisque  $t$  et  $dt$  sont des matrices diagonales  $2 \times 2$  d'opérateurs et que les mêmes termes diagonaux apparaissent dans  $dq dq^*$  et  $dq^* dq$ , par le même raisonnement qui nous a permis d'obtenir l'annulation (51), les deux premières lignes ne contribuent que par :

$$\left\langle \left( t - \frac{1}{2} \right) (dq dq^* dq dq^* - dq^* dq dq^* dq) \right\rangle. \quad (55)$$

De même, les deux dernières lignes ne contribuent que par :

$$\begin{aligned} & \left\langle q^* (dt dq dq^* dq - dq dt dq^* dq + dq dq^* dt dq - dq dq^* dq dt) \right. \\ & \left. - q (dt dq^* dq dq^* - dq^* dt dq dq^* + dq^* dq dt dq^* - dq^* dq dq^* dt) \right\rangle. \end{aligned} \quad (56)$$

Le calcul direct donne  $ch_2(e)$  comme la somme de cinq composantes

$$ch_2(e) = \left( t - \frac{1}{2} \right) \Gamma_t + \alpha \Gamma_\alpha + \alpha^* \Gamma_{\alpha^*} + \beta \Gamma_\beta + \beta^* \Gamma_{\beta^*}, \quad (57)$$

avec les opérateurs  $\Gamma_t, \Gamma_\alpha, \Gamma_{\alpha^*}, \Gamma_\beta, \Gamma_{\beta^*}$  explicitement donnés par

$$\begin{aligned} \Gamma_t = & (d\alpha d\alpha^* - d\alpha^* d\alpha)(d\beta d\beta^* - d\beta^* d\beta) \\ & + (d\beta d\beta^* - d\beta^* d\beta)(d\alpha d\alpha^* - d\alpha^* d\alpha) \\ & + (d\alpha d\beta - \lambda d\beta d\alpha)(d\beta^* d\alpha^* - \bar{\lambda} d\alpha^* d\beta^*) \\ & + (d\beta^* d\alpha^* - \bar{\lambda} d\alpha^* d\beta^*)(d\alpha d\beta - \lambda d\beta d\alpha) \\ & + (d\alpha^* d\beta - \bar{\lambda} d\beta d\alpha^*)(\lambda d\alpha d\beta^* - d\beta^* d\alpha) \\ & + (\lambda d\alpha d\beta^* - d\beta^* d\alpha)(d\alpha^* d\beta - \bar{\lambda} d\beta d\alpha^*); \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha = & (dt d\alpha^* - d\alpha^* dt)(d\beta^* d\beta - d\beta d\beta^*) \\ & + (d\beta^* d\beta - d\beta d\beta^*)(dt d\alpha^* - d\alpha^* dt) \\ & + (d\beta dt - dt d\beta)(d\beta^* d\alpha^* - \bar{\lambda} d\alpha^* d\beta^*) \\ & + \lambda (d\beta^* d\alpha^* - \bar{\lambda} d\alpha^* d\beta^*)(d\beta dt - dt d\beta) \\ & + (d\alpha^* d\beta - \bar{\lambda} d\beta d\alpha^*)(d\beta^* dt - dt d\beta^*) \\ & + \lambda (d\beta^* dt - dt d\beta^*)(d\alpha^* d\beta - \bar{\lambda} d\beta d\alpha^*); \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha^*} = & (dt d\alpha - d\alpha dt)(d\beta d\beta^* - d\beta^* d\beta) \\ & + (d\beta d\beta^* - d\beta^* d\beta)(dt d\alpha - d\alpha dt) \\ & + (d\alpha d\beta - \lambda d\beta d\alpha)(dt d\beta^* - d\beta^* dt) \\ & + \bar{\lambda} (dt d\beta^* - d\beta^* dt)(d\alpha d\beta - \lambda d\beta d\alpha) \\ & + (dt d\beta - d\beta dt)(d\beta^* d\alpha - \lambda d\alpha d\beta^*) \\ & + \bar{\lambda} (d\beta^* d\alpha - \lambda d\alpha d\beta^*)(dt d\beta - d\beta dt); \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_\beta &= (dt d\beta^* - d\beta^* dt)(d\alpha^* d\alpha - d\alpha d\alpha^*) \\
&\quad + (d\alpha^* d\alpha - d\alpha d\alpha^*)(dt d\beta^* - d\beta^* dt) \\
&\quad + \lambda (dt d\alpha - d\alpha dt)(d\beta^* d\alpha^* - \bar{\lambda} d\alpha^* d\beta^*) \\
&\quad \quad + (d\beta^* d\alpha^* - \bar{\lambda} d\alpha^* d\beta^*)(dt d\alpha - d\alpha dt) \\
&\quad + \bar{\lambda} (d\alpha^* dt - dt d\alpha^*)(d\beta^* d\alpha - \lambda d\alpha d\beta^*) \\
&\quad \quad + (d\beta^* d\alpha - \lambda d\alpha d\beta^*)(d\alpha^* dt - dt d\alpha^*) ;
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\beta^*} &= (dt d\beta - d\beta dt)(d\alpha d\alpha^* - d\alpha^* d\alpha) \\
&\quad + (d\alpha d\alpha^* - d\alpha^* d\alpha)(dt d\beta - d\beta dt) \\
&\quad + (d\alpha^* dt - dt d\alpha^*)(d\alpha d\beta - \lambda d\beta d\alpha) \\
&\quad \quad + \bar{\lambda} (d\alpha d\beta - \lambda d\beta d\alpha)(d\alpha^* dt - dt d\alpha^*) \\
&\quad + (dt d\alpha - d\alpha dt)(d\alpha^* d\beta - \bar{\lambda} d\beta d\alpha^*) \\
&\quad \quad + \lambda (d\alpha^* d\beta - \bar{\lambda} d\beta d\alpha^*)(dt d\alpha - d\alpha dt) .
\end{aligned} \tag{62}$$

On peut également (afin d'éviter toute confusion avec les différentielles ordinaires) écrire le cycle de Hochschild  $c = ch_2(e)$  comme suit :

$$c = \left(t - \frac{1}{2}\right) c_t + \alpha c_\alpha + \alpha^* c_{\alpha^*} + \beta c_\beta + \beta^* c_{\beta^*} ; \tag{63}$$

où les composantes  $c_t, c_\alpha, c_{\alpha^*}, c_\beta, c_{\beta^*}$ , qui sont des éléments de  $\mathcal{B}_\theta \otimes \mathcal{B}_\theta \otimes \mathcal{B}_\theta \otimes \mathcal{B}_\theta$ , ont une expression de la même forme que les opérateurs correspondants dans (58-62) avec le symbole  $d$  remplacé par le symbole du produit tensoriel  $\otimes$ . L'annulation de  $bc$ , qui comporte six cents termes, peut être vérifiée directement à partir des relations de commutation (48). Le cycle  $c$  est totalement “ $\lambda$ -antisymétrique”.

## 4 Géométrie non commutative de $S_\theta^4$

L'étape suivante consiste à trouver l'opérateur de Dirac qui fournit une solution à l'équation quartique fondamentale (I.11). Soit  $\mathcal{A} = C^\infty(S_\theta^4)$  l'algèbre des fonctions lisses sur la sphère non commutative  $S_\theta^4$ . Nous allons maintenant décrire un triplet spectral

$$(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D) \tag{64}$$

qui décrit la géométrie sur  $S_\theta^4$  correspondant à la métrique ronde.

Pour ce faire, nous devons d'abord trouver de bonnes coordonnées sur  $S_\theta^4$  en fonction desquelles l'opérateur  $D$  s'exprimera facilement. Nous choisissons de paramétrer  $\alpha, \beta$  et  $t$  comme suit :

$$\alpha = \frac{u}{2} \cos \varphi \cos \psi, \quad \beta = \frac{v}{2} \sin \varphi \cos \psi, \quad t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \psi. \tag{65}$$

Ici,  $\varphi$  et  $\psi$  sont des angles ordinaires définis par :

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (66)$$

où  $u$  et  $v$  sont les générateurs unitaires usuels de l'algèbre  $C^\infty(\mathbb{T}_\theta^2)$  des fonctions lisses sur le 2-tore non commutatif. Ainsi, la présentation de leurs relations est :

$$uv = \lambda vu, \quad uu^* = u^*u = 1, \quad vv^* = v^*v = 1. \quad (67)$$

On vérifie que  $\alpha, \beta, t$  donnés par (2) satisfont la présentation de base des générateurs de  $C^\infty(S_\theta^4)$  qui apparaît ainsi comme une *sous-algèbre* de l'algèbre engendrée (et donc stable par calcul lisse) par  $e^{i\varphi}, e^{i\psi}, u$  et  $v$ .

Pour  $\theta = 0$ , on calcule aisément la métrique arrondie.

$$G = 4(d\alpha d\bar{\alpha} + d\beta d\bar{\beta} + dt^2) \quad (68)$$

et en fonction des coordonnées  $\varphi, \psi, u, v$ , on obtient :

$$G = \cos^2 \varphi \cos^2 \psi du d\bar{u} + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi dv d\bar{v} + \cos^2 \psi d\varphi^2 + d\psi^2. \quad (69)$$

À normalisation près, sa forme volumique est donnée par :

$$\sin \varphi \cos \varphi (\cos \psi)^3 \bar{u} du \wedge \bar{v} dv \wedge d\psi \wedge d\varphi. \quad (70)$$

En termes de ces coordonnées rectangulaires, on obtient l'expression simple suivante pour l'opérateur de Dirac,

$$\begin{aligned} D &= (\cos \varphi \cos \psi)^{-1} u \frac{\partial}{\partial u} \gamma_1 + (\sin \varphi \cos \psi)^{-1} v \frac{\partial}{\partial v} \gamma_2 + \\ &+ \frac{1}{\cos \psi} \sqrt{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \cotg \varphi - \frac{1}{2} \tg \varphi \right) \gamma_3 + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{3}{2} \tg \psi \right) \gamma_4. \end{aligned} \quad (71)$$

Ici,  $\gamma_\mu$  sont les matrices de Dirac  $4 \times 4$  usuelles avec

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu^* = \gamma_\mu. \quad (72)$$

Il est maintenant facile de passer au cas non commutatif. Le seul point délicat est l'existence de conditions aux limites non triviales pour l'opérateur  $D$ , mais nous les laisserons simplement inchangées dans le cas non commutatif. Seule l'algèbre et son comportement dans l'espace de Hilbert changent. La formule de l'opérateur  $D$  est maintenant :

$$\begin{aligned} D &= (\cos \varphi \cos \psi)^{-1} \delta_1 \gamma_1 + (\sin \varphi \cos \psi)^{-1} \delta_2 \gamma_2 + \\ &+ \frac{1}{\cos \psi} \sqrt{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \cotg \varphi - \frac{1}{2} \tg \varphi \right) \gamma_3 + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial}{\partial \psi} - \frac{3}{2} \tg \psi \right) \gamma_4. \end{aligned}$$

où les  $\gamma_\mu$  sont les matrices de Dirac usuelles et où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont les dérivées standard du tore non commutatif de sorte que

$$\begin{aligned}\delta_1(u) &= u, \quad \delta_1(v) = 0, \\ \delta_2(u) &= 0, \quad \delta_2(v) = v;\end{aligned}\tag{73}$$

On peut alors vérifier que la métrique correspondante est bien la bonne (la métrique ronde).

Pour calculer l'opérateur  $\langle (e - \frac{1}{2}) [D, e]^4 \rangle$  (dans le produit tensoriel par  $M_4(\mathbb{C})$ ), nous avons besoin des commutateurs de  $D$  avec les générateurs de  $C^\infty(S_\theta^4)$ .

Ils sont donnés par les expressions simples suivantes :

$$\begin{aligned}[D, \alpha] &= \frac{u}{2} \{ \gamma_1 - \sqrt{-1} \sin(\phi) \gamma_3 - \sqrt{-1} \cos(\phi) \sin(\psi) \gamma_4 \}, \\ [D, \alpha^*] &= -\frac{u^*}{2} \{ \gamma_1 + \sqrt{-1} \sin(\phi) \gamma_3 + \sqrt{-1} \cos(\phi) \sin(\psi) \gamma_4 \}, \\ [D, \beta] &= \frac{v}{2} \{ \gamma_2 + \sqrt{-1} \cos(\phi) \gamma_3 - \sqrt{-1} \sin(\phi) \sin(\psi) \gamma_4 \}, \\ [D, \beta^*] &= -\frac{v^*}{2} \{ \gamma_2 - \sqrt{-1} \cos(\phi) \gamma_3 + \sqrt{-1} \sin(\phi) \sin(\psi) \gamma_4 \}, \\ [D, t] &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \cos(\psi) \gamma_4.\end{aligned}\tag{74}$$

Nous vérifions en particulier qu'il s'agit d'opérateurs bornés et donc que pour tout  $f \in C^\infty(S_\theta^4)$ , le commutateur  $[D, f]$  est borné.

Ensuite, un calcul long mais direct montre que l'opérateur  $\langle (e - \frac{1}{2}) [D, e]^4 \rangle$  est un multiple de  $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ . On vérifie d'abord qu'il est égal à  $\pi(c)$ , où  $c$  est le cycle de Hochschild dans (III.63) et  $\pi$  est l'application canonique des chaînes de Hochschild vers les opérateurs donnée par :

$$\pi(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = a_0 [D, a_1] \dots [D, a_n].\tag{75}$$

On peut ensuite vérifier les différentes conditions qui, dans le cas commutatif, suffisent à caractériser la géométrie riemannienne [8], [9].

**Théorème 3** a) *Le triplet spectral  $(C^\infty(S_\theta^4), \mathcal{H}, D)$  satisfait tous les axiomes des variétés non commutatives.*

b) *Soit  $e \in C^\infty(S_\theta^4, M_4(\mathbb{C}))$  l'idempotent canonique donné en (III.3). L'opérateur de Dirac  $D$  satisfait*

$$\left\langle \left( e - \frac{1}{2} \right) [D, e]^4 \right\rangle = \gamma$$

où  $\langle \rangle$  est la projection sur le commutant de  $M_4(\mathbb{C})$  et  $\gamma$  est l'opérateur de graduation.

La structure réelle [7] est donnée par l'opérateur de conjugaison de charge  $J$ , qui fait intervenir, dans le cas non commutatif, l'involution antilinéaire de Tomita-Takesaki.

La condition d'ordre un,

$$[[D, a], b^0] = 0 \quad \forall a, b \in C^\infty(S_\theta^4).\tag{76}$$

où  $b^0 = Jb^*J^{-1}$  découle aisément des règles de dérivation pour les  $\delta_j$ .

Comme nous le mentionnerons dans la section suivante, la dualité de Poincaré reste valable.

## 5 Déformations isospectrales

Nous montrerons dans cette section comment étendre le théorème 3 de la section précédente aux métriques arbitraires sur la sphère  $S^4$  qui sont invariantes par rotation de  $u$  et  $v$  et qui ont la même forme volumique que celle de la métrique ronde.

Nous décrirons en fait une construction très générale de déformations isospectrales de géométries non commutatives qui implique en particulier que toute variété riemannienne spinorielle compacte  $M$  dont le groupe d'isométries est de rang  $\geq 2$  admet une déformation isospectrale naturelle à un paramètre vers les géométries non commutatives  $M_\theta$ . La déformation de l'algèbre sera effectuée selon les lignes de [23].

Soit  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$  le triplet spectral canonique associé à une variété spinorielle riemannienne compacte  $M$ . Rappelons que  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  est l'algèbre des fonctions lisses sur  $M$ ,  $\mathcal{H} = L^2(M, S)$  est l'espace de Hilbert des spineurs et  $D$  est l'opérateur de Dirac. Soit  $J$  l'opérateur de conjugaison de charge, qui est une isométrie antilinéaire de  $\mathcal{H}$ .

Supposons que le groupe  $\text{Isom}(M)$  des isométries de  $M$  soit de rang  $r \geq 2$ . Alors, on a une inclusion

$$\mathbb{T}^2 \subset \text{Isom}(M), \quad (77)$$

avec  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le tore usuel, et soient  $U(s), s \in \mathbb{T}^2$ , les opérateurs unitaires correspondants dans  $\mathcal{H} = L^2(M, S)$  de sorte que par construction

$$U(s) D = D U(s), \quad U(s) J = J U(s). \quad (78)$$

De plus,

$$U(s) a U(s)^{-1} = \alpha_s(a), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad (79)$$

où  $\alpha_s \in \text{Aut}(\mathcal{A})$  désigne l'action par isométries sur l'algèbre des fonctions sur  $M$ .

Soit  $p = (p_1, p_2)$  le générateur du groupe à deux paramètres  $U(s)$  de telle façon que.

$$U(s) = \exp(i(s_1 p_1 + s_2 p_2)). \quad (80)$$

Les opérateurs  $p_1$  et  $p_2$  commutent avec  $D$  mais anticommulent avec  $J$ .  $p_1$  et  $p_2$  ont tous deux un spectre entier.

$$\text{Spec}(p_j) \subset \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2. \quad (81)$$

On définit une bigraduation de l'algèbre des opérateurs bornés dans  $\mathcal{H}$  avec l'opérateur  $T$  déclaré être de bidegré  $(n_1, n_2)$  lorsque,

$$\alpha_s(T) = \exp(i(s_1 n_1 + s_2 n_2)) T, \quad \forall s \in \mathbb{T}^2, \quad (82)$$

où  $\alpha_s(T) = U(s) T U(s)^{-1}$  comme dans (79).

Tout opérateur  $T$  de classe  $C^\infty$  relatif à  $\alpha_s$  (c'est-à-dire tel que l'application  $s \rightarrow \alpha_s(T)$  soit de classe  $C^\infty$  pour la topologie de la norme) peut s'écrire de manière unique comme une somme convergente en norme doublement infinie d'éléments homogènes,

$$T = \sum_{n_1, n_2} \hat{T}_{n_1, n_2}, \quad (83)$$

avec  $\hat{T}_{n_1, n_2}$  de bidegré  $(n_1, n_2)$  et où la suite des normes  $\|\hat{T}_{n_1, n_2}\|$  est à décroissance rapide en  $(n_1, n_2)$ .

Soit  $\lambda = \exp(2\pi i\theta)$ . Pour tout opérateur  $T$  de  $\mathcal{H}$  de classe  $C^\infty$ , on définit sa torsion à gauche  $l(T)$  par

$$l(T) = \sum_{n_1, n_2} \hat{T}_{n_1, n_2} \lambda^{n_2 p_1}, \quad (84)$$

et sa torsion à droite  $r(T)$  par

$$r(T) = \sum_{n_1, n_2} \hat{T}_{n_1, n_2} \lambda^{n_1 p_2}, \quad (85)$$

Puisque  $|\lambda| = 1$  et que  $p_1, p_2$  sont auto-adjointes, les deux séries convergent en norme.

On a le :

**Lemme 4** a) *Soit  $x$  un opérateur homogène de bidegré  $(n_1, n_2)$  et  $y$  un opérateur homogène de bidegré  $(n'_1, n'_2)$ . Alors,*

$$l(x) r(y) - r(y) l(x) = (x y - y x) \lambda^{n'_1 n_2} \lambda^{n_2 p_1 + n'_1 p_2} \quad (86)$$

*En particulier,  $[l(x), r(y)] = 0$  si  $[x, y] = 0$ .*

b) *Soient  $x$  et  $y$  des opérateurs homogènes comme précédemment et définissons*

$$x * y = \lambda^{n'_1 n_2} x y; \quad (87)$$

*alors  $l(x)l(y) = l(x * y)$ .*

Pour vérifier a) et b), on utilise simplement la règle de commutation suivante, qui est vérifiée pour tout opérateur homogène  $T$  de bidegré  $(m, n)$  :

$$\lambda^{ap_1 + bp_2} T = \lambda^{am + bn} T \lambda^{ap_1 + bp_2}, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}. \quad (88)$$

On a alors

$$l(x) r(y) = x \lambda^{n_2 p_1} y \lambda^{n'_1 p_2} = x y \lambda^{n'_1 n_2} \lambda^{n_2 p_1 + n'_1 p_2} \quad (89)$$

et

$$r(y) l(x) = y \lambda^{n'_1 p_2} x \lambda^{n_2 p_1} = y x \lambda^{n'_1 n_2} \lambda^{n_2 p_1 + n'_1 p_2} \quad (90)$$

Ce qui donne a). On vérifie b) de manière similaire.

Le produit  $*$  défini dans (87) se prolonge par linéarité en un produit associatif sur l'espace linéaire des opérateurs lisses et peut être appelé un  $*$ -produit.

On peut également définir un “produit à droite” déformé. Si  $x$  est homogène de bidegré  $(n_1, n_2)$  et  $y$  est homogène de bidegré  $(n'_1, n'_2)$ , le produit est défini par :

$$x *_r y = \lambda^{n_1 n'_2} xy. \quad (91)$$

Alors, en suivant la logique du lemme précédent, on montre que  $r(x)r(y) = r(x *_r y)$ .

Ensuite, on effectue une torsion de l'isométrie antiunitaire  $J$  par :

$$\tilde{J} = J \lambda^{-p_1 p_2}. \quad (92)$$

On a  $\tilde{J} = \lambda^{p_1 p_2} J$  et donc :

$$\tilde{J}^2 = J^2. \quad (93)$$

**Lemme 5** *Pour  $x$  homogène de bidegré  $(n_1, n_2)$ , on a :*

$$\tilde{J} l(x) \tilde{J}^{-1} = r(J x J^{-1}) \lambda^{-n_1 n_2}. \quad (94)$$

Pour la démonstration, il faut vérifier que :

$$\tilde{J} l(x) = r(J x J^{-1}) \lambda^{-n_1 n_2} \tilde{J}. \quad (95)$$

On a :

$$\lambda^{-p_1 p_2} x = x \lambda^{-(p_1 + n_1)(p_2 + n_2)} = x \lambda^{-n_1 n_2} \lambda^{-(p_1 n_2 + n_1 p_2)} \lambda^{-p_1 p_2}. \quad (96)$$

Alors

$$\tilde{J} l(x) = J \lambda^{-p_1 p_2} x \lambda^{n_2 p_1} = J x \lambda^{-n_1 n_2} \lambda^{-n_1 p_2} \lambda^{-p_1 p_2}, \quad (97)$$

tandis que

$$r(J x J^{-1}) \tilde{J} = J x J^{-1} \lambda^{-n_1 p_2} J \lambda^{-p_1 p_2} = J x \lambda^{-n_1 p_2} \lambda^{-p_1 p_2}. \quad (98)$$

On obtient ainsi l'égalité recherchée.

On peut maintenant définir un nouveau triplet spectral où  $\mathcal{H}$  et l'opérateur  $D$  restent inchangés, tandis que l'algèbre  $\mathcal{A}$  et l'involution  $J$  sont modifiées en  $l(\mathcal{A})$  et  $\tilde{J}$  respectivement. D'après le Lemme 4 b), on vérifie que  $l(\mathcal{A})$  est toujours une algèbre. Puisque  $D$  est de bidegré  $(0, 0)$ , on a :

$$[D, l(a)] = l([D, a])$$

ce qui suffit à vérifier que  $[D, x]$  est borné pour tout  $x \in l(\mathcal{A})$ .

Pour  $x, y \in l(\mathcal{A})$ , on vérifie que :

$$[x, y^0] = 0, \quad y^0 = \tilde{J} y^* \tilde{J}^{-1}. \quad (99)$$

On peut en effet supposer que  $x$  et  $y$  sont homogènes et utiliser le lemme 5 conjointement avec le lemme 4 a).

En combinant l'équation (99) avec l'équation (5), on vérifie alors la condition d'ordre un

$$[[D, x], y^0] = 0, \quad \forall x, y \in l(\mathcal{A}). \quad (100)$$

Comme premier corollaire de la construction précédente, on obtient ainsi le :

**Théorème 6** *Soit  $M$  une variété riemannienne spinorielle compacte dont le groupe d'isométries est de rang  $\geq 2$ . Alors  $M$  admet une déformation isospectrale naturelle à un paramètre vers des géométries non commutatives  $M_\theta$ .*

Le triplet spectral déformé est donné par  $(l(\mathcal{A}), \mathcal{H}, D)$  avec  $\mathcal{H} = L^2(M, S)$  l'espace de Hilbert des spineurs,  $D$  l'opérateur de Dirac et  $l(\mathcal{A})$  est en réalité l'algèbre des fonctions lisses sur  $M$  avec produit déformé en le  $*$ -produit défini dans (87). De plus, la structure réelle est donnée par l'involution tordue  $\tilde{J}$  définie dans (92). On vérifie, à l'aide des résultats de [24] et [8], que la dualité de Poincaré continue d'être valable pour le triplet spectral déformé. Nous avons montré dans [8] que l'opérateur de Dirac pour la connexion de Levi-Civita minimise la fonctionnelle d'action  $\int D^{2-n}$  (où  $n$  est la dimension de  $M$ ) parmi les opérateurs de la forme  $D + T$  qui commutent avec  $J$  et ont les mêmes commutateurs que  $D$  pour tout  $a \in \mathcal{A}$  (de sorte que  $T$  appartienne au commutant de  $\mathcal{A}$ ). Il est important de vérifier que cela reste vrai dans le cas déformé. Cela se vérifie aisément puisque l'on peut également supposer l'invariance sous l'action  $U(s) T U(s)^{-1} = \alpha_s(T)$ , de sorte que l'espace des perturbations possibles  $T$  est plus petit dans le cas déformé.

La construction ci-dessus nous permet également d'étendre le théorème 3 de la section précédente à des métriques arbitraires sur la sphère  $S^4$  qui sont invariantes par rotation de  $u$  et  $v$  et qui ont pour forme de volume  $\sqrt{g}dx$  la métrique ronde.

Dans [22], Nekrasov et Schwarz ont montré que la théorie de jauge de Yang-Mills sur  $\mathbb{R}^4$  non commutatif permet une compréhension conceptuelle de la désingularisation non nulle du B-champ de l'espace des modules des instantons obtenue par perturbation des équations ADHM [1]. Dans [25], Seiberg et Witten ont mis en évidence la relation inattendue entre la théorie de jauge standard et la théorie non commutative. Le travail ci-dessus soulève la question spécifique pour les sphères non commutatives  $S_\theta^4$  de savoir si l'on peut implémenter une telle relation de Seiberg-Witten comme une relation isospectrale. Il suggère également d'étendre les déformations isospectrales ci-dessus (Théorème 6) à des structures de Poisson compatibles plus générales sur une variété riemannienne spinorielle donnée.

## 6 Remarques finales

Nous concluons cet article par quelques remarques importantes.

### Le cas impair

Premièrement, il existe des formules pour le caractère de Chern *impair* en homologie cyclique, semblables à celles de la section II ci-dessus. Étant donné un élément inversible  $u \in GL_r(\mathcal{A})$ , la composante  $\text{ch}_{n+\frac{1}{2}}(u)$  de son caractère de Chern est, comme ci-dessus, un élément de

$$\mathcal{A} \otimes \underbrace{\overline{\mathcal{A}} \otimes \cdots \otimes \overline{\mathcal{A}}}_{2n-1} \quad (101)$$

où  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{C}1$  est le quotient de  $\mathcal{A}$  par les multiples scalaires de l'unité 1.

La formule de  $\text{ch}_{n+\frac{1}{2}}(u)$  est (avec  $\lambda_n$  une constante de normalisation) :

$$\text{ch}_{n+\frac{1}{2}}(u) = \lambda_n \left\{ \sum u_{i_0 i_1} \otimes u_{i_1 i_2}^{-1} \otimes u_{i_2 i_3} \cdots \otimes u_{i_{2n-1} i_0}^{-1} - \sum u_{i_0 i_1}^{-1} \otimes u_{i_1 i_2} \otimes u_{i_2 i_3}^{-1} \cdots \otimes u_{i_{2n-1} i_0} \right\} \quad (102)$$

Comme dans le cas pair, la propriété cruciale des composantes  $\text{ch}_{n+\frac{1}{2}}(u)$  est qu'elles définissent un *cycle* dans le bicomplexe  $(b, B)$  d'homologie cyclique,

$$B \text{ch}_{n-\frac{1}{2}}(u) = b \text{ch}_{n+\frac{1}{2}}(u). \quad (103)$$

Pour toute paire d'entiers  $m, r$ , on peut définir les analogues impairs  $\mathcal{B}_{m,r}$  comme engendrés par les  $r^2$  éléments  $u_{ij}$  ;  $i, j \in \{1, \dots, r\}$  et on impose comme ci-dessus les relations suivantes :

$$u u^* = u^* u = 1 \quad u = [u_{ij}] \quad (104)$$

et

$$\text{ch}_{j+\frac{1}{2}}(\rho(u)) = 0 \quad \forall j < m. \quad (105)$$

On peut démontrer, à titre d'exercice, que la suspension des espaces non commutatifs correspondants est contenue dans le  $Gr_{m,2r}$ .

### L'opérateur de Dirac et les groupes quantiques

Il existe des formules pour les  $q$ -analogues de l'opérateur de Dirac sur les groupes quantiques, (cf. [2], [21]) ; Appelons  $Q$  ces opérateurs de Dirac "naïfs".

L'équation fondamentale définissant l'opérateur de Dirac véritable recherché,  $D$ , que nous avons utilisé implicitement ci-dessus sur la 3-sphère déformée (après suspension à la 4-sphère et pour des paramètres de déformation complexes de module un), est :

$$[D]_{q^2} = Q. \quad (106)$$

où le symbole  $[x]_q$  a la signification usuelle dans les analogues de  $q$ ,

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}. \quad (107)$$

L'essentiel est que c'est uniquement en vertu de cette équation que les commutateurs  $[D, a]$  seront bornés, et ils le seront non seulement pour l'action naturelle de l'algèbre  $\mathcal{A}$  des fonctions sur  $SU(2)_q$  sur l'espace de Hilbert des spineurs, mais aussi pour l'action naturelle de l'algèbre opposée  $\mathcal{A}^o$ ; ceci est facile à démontrer dans la théorie de Fourier. Mais il n'est pas vrai que  $[Q, a]$  soit borné, pour  $a \in \mathcal{A}$ , en raison de la nature non bornée du bimodule définissant l'analogue  $q$  du calcul différentiel.

### *Théorie de Yang-Mills*

On peut développer la théorie de Yang-Mills sur  $S_\theta^4$  puisqu'on dispose désormais de toute la structure requise, à savoir l'algèbre, le calcul et le "fibré vectoriel"  $e$  (naturellement muni, de plus, d'une connexion privilégiée  $\nabla$ ). On peut vérifier que les résultats fondamentaux de [6] s'appliquent. En particulier, le théorème 4, p. 561 de [6] donne une inégalité fondamentale montrant que l'action de Yang-Mills,  $YM(\nabla) = \int \theta^2 ds^4$ , (où  $\theta = \nabla^2$  est la courbure, et  $ds = D^{-1}$ ) admet une borne inférieure strictement positive donnée par l'invariant topologique  $\int \gamma(e - \frac{1}{2})[D, e]^4 ds^4 = 1$ . L'étape suivante consiste donc à étendre les résultats de [1] sur la classification des connexions de Yang-Mills à cette situation. Cela a été fait dans [13] pour le tore non commutatif et dans [22] pour  $\mathbb{R}^4$  non commutatif. Notons cependant que, dans le cas non commutatif, la sphère non commutative  $S_\theta^4$  n'est pas isomorphe à la compactification à un point de  $\mathbb{R}^4$  non commutatif utilisée ici. En particulier, et contrairement à ce qui se passe pour  $\mathbb{R}^4$  non commutatif, même la théorie de la mesure de  $S_\theta^4$  est très sensible à l'irrationalité du paramètre  $\theta$ .

# Références

- [1] M.F. ATIYAH, *Geometry of Yang-Mills Fields*. Accad. Naz. Dei Lincei, Scuola Norm. Sup. Pisa, 1979.
- [2] P. N. BIBIKOV - P. P. KULISH, *Dirac operators on quantum  $SU(2)$  group and quantum sphere*. q-alg/9608012.
- [3] A. CHAMSEDDINE - A. CONNES, *Universal formulas for noncommutative geometry actions*. Phys. Rev. Letters, 24 (1996) 4868-4871.
- [4] A. CONNES,  *$C^*$  algèbres et géométrie différentielle*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, 290 (1980) 599-604.
- [5] A. CONNES, *Noncommutative differential geometry*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 62 (1985) 257-360.
- [6] A. CONNES, *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994.
- [7] A. CONNES, *Noncommutative geometry and reality*. J. Math. Physics, 36 (1995) 6194-6231.
- [8] A. CONNES, *Gravity coupled with matter and foundation of noncommutative geometry*. Commun. Math. Phys., 182 (1996) 155-176.
- [9] A. CONNES, *Noncommutative Geometry : The Spectral Aspect*. Les Houches Session LXIV, Elsevier, 1998, 643-685.
- [10] A. CONNES, *A short survey of noncommutative geometry*. J. Math. Physics, 41 (2000) 3832-3866.
- [11] A. CONNES - M. DOUGLAS - A. SCHWARZ, *Noncommutative geometry and Matrix theory : compactification on tori*. J. High Energy Physics, 02 (1998) 3.
- [12] A. CONNES - H. MOSCOVICI, *The local index formula in noncommutative geometry*. GAFA, 5 (1995) 174-243.
- [13] A. CONNES - M. RIEFFEL, *Yang-Mills for noncommutative two tori*. In : *Operator algebras and mathematical physics* (Iowa City, Iowa, 1985). Contemp. Math. Oper. Algebra Math. Phys., 62, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, 237-266.
- [14] L. DABROWSKI - G. LANDI - T. MASUDA, *Instantons on the quantum 4-spheres  $S_q^4$* . math.QA/0012103.
- [15] J. DIXMIER, *Existence de traces non normales*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B, 262 (1966) 1107-1108.
- [16] J. M. GRACIA-BONDIA, J. C. VARILLY, H. FIGUEROA, *Elements of Noncommutative geometry*. Birkhauser, 2000.
- [17] W. KALAU - M. WALZE, *Gravity, noncommutative geometry and the Wodzicki residue*. J. of Geom. and Phys., 16 (1995) 327-344.
- [18] D. KASTLER, *The Dirac operator and gravitation*. Commun. Math. Phys., 166 (1995) 633-643.
- [19] B. LAWSON - M.L. MICHELSON. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 1989.
- [20] J.L. LODAY, *Cyclic Homology*. Springer, 1998.
- [21] S. MAJID, *Riemannian geometry of quantum groups and finite groups with nonuniversal differentials*. math-QA/0006150.
- [22] N. NEKRASOV - A. SCHWARZ, *Instantons in noncommutative  $\mathbb{R}^4$  and  $(2,0)$  superconformal six dimensional theory*. Commun. Math. Phys., 198 (1998) 689-703

- [23] M.A. RIEFFEL, *Deformation quantization for actions of  $\mathbb{R}^d$* , Memoirs AMS 506, Amer. math. Soc., Providence, 1993.
- [24] M. RIEFFEL, *K-groups of  $C^*$ -algebras deformed by actions of  $\mathbb{R}^d$* . J. Funct. Anal. 116 (1993), no. 1, 199–214.
- [25] N. SEIBERG - E. WITTEN, *String theory and noncommutative geometry*. J. High Energy Physics, 09 (1999) 32.
- [26] M. WODZICKI, *Noncommutative residue, Part I. Fundamentals*. In *K-theory, arithmetic and geometry*. Lecture Notes Math., 1289, Springer, 1987, 320-399.
- [27] S.L. WORONOWICZ, *Twisted  $SU(2)$  group. An example of a noncommutative differential calculus*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 23 (1987) 117-181.