1) Traduction d'un extrait du livre d'Alain Connes *Noncommutative geometry* (dans le chapitre 1 : espaces non commutatifs et théorie de la mesure, section 3 : théorie modulaire et classification des facteurs, page 45 et suivantes)

3. Théorie modulaire et classification des facteurs

Entre 1957 et 1967, un mathématicien japonais, Minoru Tomita, qui était motivé en particulier par l'analyse harmonique des groupes localement compacts non unimodulaires, prouva un théorème d'une importance considérable pour la théorie des algèbres de von Neumann. Son manuscrit original était très difficile à déchiffrer, et ses résultats seraient restés inconnus sans les notes de lectures de M. Takesaki [549], qui contribua également grandement à la théorie.

Avant de donner la définition technique d'une algèbre de von Neumann, on doit expliquer que la théorie des algèbres commutatives de von Neumann correspond à la théorie de la mesure de Lebesgue et elle contient le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints. La théorie non commutative a été élaborée comme ??? (the outset) par Murray et von Neumann, la mécanique quantique étant l'une de leurs motivations. La théorie des algèbres de von Neumann non commutatives a seulement acquis sa maturité avec la théorie modulaire ; elle constitue un outil indispensable dans l'analyse des espaces non commutatifs.

Une algèbre de von Neumann est une sous-algèbre involutive M de l'algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ qui a la propriété d'être le commutant de son commutant : $(M')' = M$.

Cette propriété est équivalente à dire que M est une algèbre d'opérateurs involutive qui est fermée selon les limites faibles. Pour voir intuitivement ce que veut dire l'égalité $(M')' = M$, il suffit de dire qu'elle caractérise les algèbres d'opérateurs sur l'espace de Hilbert qui sont invariantes par un groupe d'opérateurs unitaires : le commutant de tout sous-groupe d'un groupe d'unitaires de l'espace de Hilbert est une algèbre de von Neumann, et ils sont tous de cette forme (M étant donné comme un sous-groupe, le groupe des unitaires de M'). Dans le cas général non commutatif, la notion classique de mesure de probabilité est remplacée par la notion d'état. Un état typique sur l'algèbre M est donné par une forme linéaire $\varphi(A) = \langle \xi, \xi \rangle$, où ξ est un vecteur de longueur 1 dans l'espace de Hilbert. La théorie de Tomita, qui a comme ancêtre la notion d'algèbre quasi-hilbertienne ([172]), consiste à analyser, étant donnée une algèbre de von Neumann M sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ tel que $M\xi$ et $M'\xi$ sont denses dans $\mathcal{H}$ l'opérateur non borné suivant S :

$$Sx\xi = x^*\xi \quad \forall x \in M.$$

C'est un opérateur de domaine dense dans $\mathcal{H}$ qui est linéaire conjugué ; les résultats de la théorie sont les suivants :

1) S est fermable et égal à son inverse.

2) La phase $J = S|S|^{-1}$ de S satisfait $JMJ = M'$.

Le livre est téléchargeable sur le site d'Alain Connes à cette adresse :
https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf.
Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, mai 2025.

3) Le carré du module $\Delta = |S|^2 = S^*S$ de S satisfait $\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, à tout état φ sur M, on associe un groupe à un paramètre (σ_t^φ) d'automorphismes de M, donné par $\sigma_t^\varphi(x) = \Delta^{it} x \Delta^{-it}$ $(\forall x \in M)$ $(\forall t \in \mathbb{R})$, le groupe des automorphismes modulaires de φ. C'est précisément à ce point que l'intéraction entre la physique théorique et les mathématiques pures ont lieu. En effet, Takesaki et Winnink ont démontré simultanément [549] [586] que la connexion entre l'état φ et le groupe à un paramètre (σ_{-t}^φ) du théorème de Tomita est exactement la condition KMS pour $\hbar\beta = 1$.

Ces résultats, ainsi que le travail de R. Powers [453], et de H. Araki et E. J. Woods [12] sur les facteurs qui sont des produits tensoriels infinis, se sont avérés être d'une importance considérable dans le démarrage de la classification des facteurs.

Le point de départ de mon travail sur la classification des facteurs a été la découverte d'une relation entre les invariants de Araki-Woods et la théorie de Tomita. Pour cela, il a été démontré que le groupe d'évolution associé à un état par cette théorie arbore les propriétés de l'algèbre M indépendamment du choix particulier de l'état φ.

Une algèbre de von Neumann est loin d'avoir juste un état φ, ce qui a comme conséquence que seules les propriétés de σ_t^φ, qui ne dépendent pas du choix de φ, sont vraiment signifiantes pour M. Le résultat crucial qui m'a permis d'établir la classification des facteurs est l'analogue suivant du théorème de Radon-Nikodým [89]:

Pour toute paire d'état φ, ψ sur M, il existe un 1-cocycle canonique

$$t \to u_t, \quad u_{t_1+t_2} = u_{t_1} \sigma_{t_1}^\varphi(u_{t_2}) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

à valeurs dans le groupe unitaire de M, tel que

$$\sigma_t^\psi(x) = u_t \sigma_t^\varphi(x) u_t^* \quad \forall x \in M, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\sqrt{-1}(du_t/dt)_{t=0}$ coïncide

1) dans le cas commutatif, avec le logarithme de la dérivée de Radon-Nikodým $(d\psi/d\varphi)$;

2) dans le cas de la mécanique statistique, avec la différence entre les hamiltoniens correspondant aux états d'équilibre, ou avec l'hamiltonien relatif de Araki [9].

Il découle de cela que, étant donnée une algèbre de von Neumann M, il existe un homomorphisme canonique δ de $\mathbb{R}$ dans le groupe $\mathrm{Out}\, M = \mathrm{Aut}\, M / \mathrm{Inn}\, M$ (le quotient du groupe d'automorphismes par le sous-groupe normal des automorphismes intérieurs), donné par la classe de σ_t^φ, indépendamment du choix de φ. Ainsi, $\mathrm{Ker}\, \delta = T(M)$ est un invariant de M, de même que $\mathrm{Spec}\, \delta = S(M) = \bigcap \mathrm{Spec}\, \Delta_\varphi$.

Par conséquent, les algèbres de von Neumann sont des objets dynamiques. De telles algèbres possèdent un groupe de classes d'automorphismes paramétré par $\mathbb{R}$. Ce groupe, qui est complètement canonique, est une manifestation de la non commutativité de l'algèbre M. Il n'a pas de contrepartie dans le cas commutatif et atteste de l'originalité de la théorie de la mesure non commutative par rapport à la théorie habituelle.

Vingt ans après le théorème de Tomita, et après un travail considérable (voir plus de détails au chapitre V), nous avons maintenant à notre disposition une classification complète de toutes les algèbres de von Neumann hyperfinies. Plutôt que de donner une définition de cette classe, notons simplement que :

1) Si G est un groupe de Lie connexe et si $\pi \in \operatorname{Rep} G$ est une représentation unitaire de G, alors son commutant $\pi(G)'$ est hyperfini.

2) Si Γ est un groupe moyennable discret et si $\pi \in \operatorname{Rep} \Gamma$, alors $\pi(\Gamma)'$ est hyperfini.

3) Si une C^*-algèbre A est limite inductive d'algèbres de dimension finie et si $\pi \in \operatorname{Rep} A$, alors $\pi(A)''$ est hyperfini.

De plus, la classification des algèbres finies de von Neumann se réduit à celle des facteurs hyperfinis en écrivant que $M = \int M_t \, d\mu(t)$, où chaque M_t est un facteur, c'est-à-dire, a un centre égal à $\mathbb{C}$. Finalement, la liste des facteurs hyperfinis est la suivante :

- $\mathrm{I}_n \quad M = M_n(\mathbb{C})$.
- $\mathrm{I}_\infty \quad M = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, l'algèbre de tous les opérateurs sur un espace de Hilbert de dimension infinie.
- $\mathrm{II}_1 \quad R = \mathrm{Cliff}_{\mathbb{C}}(E)$, l'algèbre de Clifford d'un espace euclidien infini-dimensionnel E.
- $\mathrm{II}_\infty \quad R_{0,1} = R \otimes \mathrm{I}_\infty$.
- $\mathrm{III}_\lambda \quad R_\lambda =$ les facteurs de Powers ($\lambda \in]0,1[$).
- $\mathrm{III}_1 \quad R_= R_{\lambda_1} \otimes R_{\lambda_2} \;\; (\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q})$, le facteur de Araki-Woods.
- $\mathrm{III}_0 \quad R_w$, le facteur de Krieger associé à un flot ergodique W.

Après mon propre travail, le cas III_1 était le seul cas qui restait à élucider. U. Haagerup a depuis montré que tous les facteurs hyperfinis de type III_1 sont isomorphes.

Tous ces résultats sont expliqués en grand détail au chapitre V.

4. Des exemples géométriques d'algèbres de von Neumann : théorie de la mesure des espaces non commutatifs

Mon but dans cette section est de montrer au moyen d'exemples que la théorie des algèbres de von Neumann remplace la théorie de la mesure ordinaire quand on travaille dans des espaces non commutatifs. Cela nous permettra d'analyser de tels espaces même s'ils semblent singuliers quand on les considère du point de vue classique, i.e. quand on les étudie en utilisant des fonctions mesurables à valeurs réelles.

D'abord, on reverra brièvement la théorie de la mesure classique de Lebesgue et on expliquera en particulier sa relation intime avec les algèbres de von Neumann *commutatives*. On donnera alors la construction générale des algèbres de von Neumann d'un espace non commutatif X qui prend naissance naturellement dans la géométrie différentielle, notamment les espaces de feuilles de feuilletages. Notre première utilisation de cette construction sera d'illustrer la classification exposée ci-dessus par de nombreux exemples géométriques.

4.α Théorie de la mesure classique de Lebesgue. H. Lebesgue a été le premier qui ait réussi à définir l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ d'une fonction bornée d'une variable réelle x sans imposer de fortes restrictions sur f. À un niveau technique, pour que la définition ait du sens, il est nécessaire d'imposer la condition que la fonction f soit mesurable. Pourtant, cette condition de mesurabilité est si peu restrictive qu'on doit utiliser l'axiome du choix indénombrable pour prouver l'existence de fonctions non mesurables. En fait, un débat très instructif eut lieu en 1905 entre Borel, Baire, et Lebesgue d'une part, et Hadamard (et Zermelo) d'autre part, par rapport à la question de l'"existence" d'un bon ordre de la droite réelle (voir la lettre de Lebesgue dans l'appendice C). Un résultat du logicien Solovay montre que (modulo l'existence de cardinaux fortement inaccessibles) une fonction non mesurable ne peut être construite en utilisant seulement l'axiome du choix conditionnel.

FIGURE 4. La femme en bleu de Gainsborough

Ce résultat sur la mesurabilité est toujours vérifié si l'intervalle $[a, b]$ est remplacé par un espace de Borel standard X. Il montre, en particulier, que parmi les structures classiques sur un ensemble X obtenu en spécifiant une classe de fonctions, $f : X \to \mathbb{R}$, telles que les fonctions continues ou lisses, la structure de l'espace de mesure, obtenue en spécifiant les fonctions mesurables, est la plus grossière possible.

En particulier, un espace de mesure X n'est pas modifié par une transformation T telle que celle indiquée sur la figure 4, qui consiste à faire exploser la figure comme un puzzle dont les pièces sont dispersées. Cette transformation a pour effet de détruire toute forme ; néanmoins, un sous-ensemble particulier A de X ne change pas de mesure même s'il peut être dispersé en différents morceaux.

Cette richesse de transformations possibles de X est liée à l'existence, à isomorphisme près, d'un seul espace de mesure intéressant : un intervalle équipé de la mesure de Lebesgue. Même les espaces aussi complexes en apparence que les espaces fonctionnels de distributions équipés d'une mesure fonctionnelle sont en fait isomorphes à cet espace comme espaces de mesure. En particulier, la notion de dimension n'a aucune signification intrinsèque en théorie de la mesure.

FIGURE 5. La femme en bleu permutée

Les outils clés de cette théorie sont la positivité et la complétude de l'espace de Hilbert $L^2(X,\mu)$ des fonctions de carré intégrable f, avec $\int |f|^2\, d\mu < \infty$ sur X. Un résultat crucial est le théorème de Radon-Nikodým, par lequel la dérivée $d\mu/d\nu$ d'une mesure par rapport à une autre peut être définie comme une fonction sur X.

La topologie des espaces mesurables *compacts* X a une compatilité remarquable avec la théorie de la mesure. En fait, les mesures de Borel finies sur X correspondent exactement aux formes linéaires continues sur l'espace de Banach $C(X)$ des fonctions continues sur X équipé de la norme $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$. Les mesures positives correspondent aux formes linéaires positives, i.e. les formes linéaires φ telles que $\varphi(\overline{f}f) \geqslant 0$ pour tout $f \in C(X)$.

Pour entrer plus profondément en matière, il est nécessaire de comprendre comment cette théorie naît naturellement de l'analyse spectrale des opérateurs auto-adjoints dans l'espace de Hilbert, et ainsi devient un cas particulier commutatif de la théorie des algèbres de von Neumann (chapitre 5), qui est elle-même l'extension naturelle de l'*algèbre linéaire* aux dimensions infinies.

Ainsi, soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (séparable) et T un opérateur auto-adjoint borné sur , i.e. $\langle \xi, \eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle\ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$. Alors, si $p(u)$ est un polynôme de la variable réelle u, $p(u) = a_0u^n + \ldots + a_n$, on peut définir l'opérateur $p(T)$ comme

$$p(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^{n-k}$$

Il est plutôt surprenant que cette définition de $p(T)$ s'étende par continuité à toutes les fonctions de Borel bornées f sur une variable réelle u. Cette extension est uniquement donnée par la condition

$$\langle f_n(T)\xi, \eta\rangle \to \langle f(T)\xi, \eta\rangle \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H},$$

si la suite f_n converge *simplement* vers f, i.e. $f_n(u) \to f(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Il existe alors une unique *classe de mesure* μ sur $\mathbb{R}$, amenée par l'intervalle compact $I = [-\|T\|, \|T\|]$, telle que

$$f(T) = 0 \Longleftrightarrow \int |f| \, d\mu = 0.$$

De plus, l'algèbre sur $\mathcal{H}$ d'opérateurs M de la forme $f(T)$ pour une certaine fonction de Borel bornée f est une *algèbre de von Neumann*, et c'est l'algèbre de von Neumann engendrée par T. En d'autres termes, si S est un opérateur borné sur $\mathcal{H}$ qui a les mêmes symétries que T (i.e. qui commute avec tous les opérateurs unitaires U, $U^*U = UU^* = 1$ sur $\mathcal{H}$ qui fixent T, entraînant que $UTU^* = T$), alors il existe une fonction de Borel bornée f avec $S = f(T)$. Cette algèbre de von Neumann commutative est naturellement isomorphe à $L^\infty(I, \mu)$, l'algèbre des classes modulo l'égalité presque partout, des fonctions mesurables bornées sur l'intervalle I.

4.β Feuilletages. Nous allons maintenant décrire une large classe d'espaces non commutatifs provenant de la géométrie différentielle, et voir pourquoi la théorie de Lebesgue n'est pas capable d'analyser de tels espaces, et remplacer cette théorie par la théorie des algèbres non commutatives de von Neumann.

Les espaces X considérés sont des espaces de variétés qui sont solutions d'équations différentielles, i.e. les espaces de feuilles d'un feuilletage.

Soit V une variété lisse et TV son fibré tangent, de telle façon que pour tout $x \in V$, T_xV est l'espace tangent de V en x. Un sous-fibré lisse F de TV est dit *intégrable* ssi l'une des conditions suivantes équivalentes est satisfaite :

a) Tout $x \in V$ est contenu dans une sous-variété W de V telle que

$$T_y(W) = F_y \quad \forall y \in W.$$

b) Tout $x \in V$ est dans le domaine $U \subset V$ d'une submersion $p : U \to \mathbb{R}^q$ ($q = \operatorname{codim} F$) avec $F_y = \operatorname{Ker}(p_*)_y \; \forall y \in U$.

c) $C^\infty(V, F) = \{X \in C^\infty(V, TV) \,; X_x \in F_x \; \forall x \in V\}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des espaces vectoriels sur V.

d) L'idéal $J(F)$ des formes différentielles lisses qui s'évanouissent sur F est stable par différentiation : $dJ \subset J$.

Tout sous-fibré 1-dimensionnel F de TV est intégrable, mais pour dim $F \geqslant 2$, la condition est non triviale ; par exemple, si $P \stackrel{p}{\longrightarrow} B$ est un H-fibré principal, de groupe de structure compact H, le fibré des vecteurs horizontaux pour une connexion donnée est intégrable ssi cette connexion est plate.

Un feuilletage de V est donné par un sous-fibré intégrable F de TV. Les feuilles du feuilletage (V, F) sont les sous-variétés connexes maximales L de V avec $T_x(L) = F_x \; \forall x \in L$, et la partition de V en feuilles $V = \bigcup L_\alpha, \; \alpha_i n A$, est caractérisée géométriquement par sa "trivialité locale" : tout point $x \in V$ a un voisinage U et un système de coordonnées locales $(x^j)_{j=1,\ldots,\dim V}$, qui est appelé sa *carte* *de feuilletage*, de telle façon que la partition de U en composantes connexes de feuilles, appelées *plaques* (ce sont les feuilles de la restriction du feuilletage à un ensemble ouvert U), correspond à la partition de $\mathbb{R}^{\dim V} = \mathbb{R}^{\dim F} \times \mathbb{R}^{\operatorname{codim} F}$ en sous-espaces affines parallèles $\mathbb{R}^{\dim F} \times \mathrm{pt}$ (cf. Figure 6).

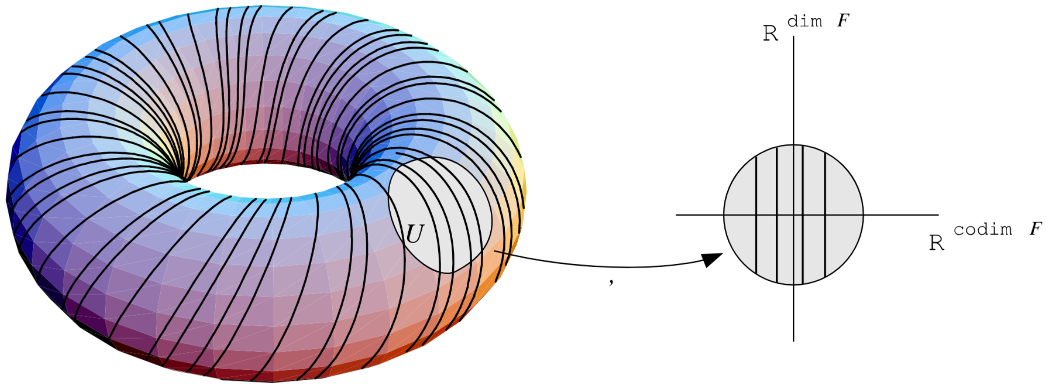

FIGURE 6. Feuilletage

Les variétés L qui sont les feuilles du feuilletage sont définies d'une manière assez implicite, et les exemples les plus simples montrent que :

1) Même si la variété ambiante V est compacte, les feuilles L peuvent ne pas être compactes.

2) L'espace X des feuilles peut ne pas être de Hausdorff pour la topologie quotient.

Par exemple, soit V le tore 2-dimensionnel $V = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, avec le feuilletage de Kronecker associé à un nombre réel θ, i.e. donné par l'équation différentielle

$$dy = \theta\, dx$$

Alors si θ est un nombre irrationnel, les feuilles L sont difféomorphes à $\mathbb{R}$, alors que la topologie quotient sur l'espace X des feuilles est la même que la topologie quotient de $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ divisée par la partition en orbites de la rotation donnée par $\alpha \in S^1 \mapsto^{R_\theta} \alpha + \theta$, et est donc la topologie grossière. Donc il n'y a pas d'ensembles ouverts dans X excepté $\varnothing$ et X. De façon similaire, l'ergodicité de la rotation R_θ sur S^1 montre que si l'on munit X d'une classe de mesure quotient de la mesure de Lebesgue sur V, on obtient le comportement "pathologique" suivant : toute fonction mesurable $f/X \to \mathbb{R}$ est presque partout égale à une constante. Cela implique que la théorie de la mesure classique ne fait pas la distinction entre X et un espace à un point, et, en particulier, que les L^p-espaces de l'analyse, $L^p(X)$ sont un-dimensionnels, $L^p(X) = \mathbb{C}$ et principalement inutiles.

4.γ L'algèbre de von Neumann d'un feuilletage. Soit (V, F) une variété feuilletée. On va maintenant construire une algèbre de von Neumann $W(V, F)$ canoniquement associée à (V, F) et dépendant seulement de la classe de mesure de Lebesgue sur l'espace X des feuilles du feuilletage. Le point de vue classique, $L^\infty(X)$ donnera le *centre* $Z(W)$ de W.

L'idée de base de la construction est qu'alors qu'en général, on ne peut pas trouver sur X de fonctions à valeurs scalaires intéressantes, il y a toujours, comme on le verra, de nombreuses fonctions à valeurs d'opérateurs sur X. En d'autres termes, on remplace juste les c-nombres par des

q-nombres. Pour être plus précis, dénotons, pour chaque feuille ℓ de (V, F) par $L^2(\ell)$ l'espace de Hilbert canonique des demi-densités de carré intégrable ([248]) sur ℓ.

On suppose ici, pour simplifier la discussion, que l'ensemble des feuilles d'holonomie non triviale est négligeable au sens de Lebesgue. En général (cf. Chapitre II), on remplace juste ℓ par $\overline{\ell}$, sa couverture par holonomie.

Définition 1. *Un opérateur aléatoire $q = (q_\ell)_{\ell \in X}$ est une application mesurable $\ell \to q_\ell$ qui associe à chaque feuille $\ell \in X$ un borné q_ℓ dans l'espace de Hilbert $L^2(\ell)$.*

Pour définir la *mesurabilité* des opérateurs aléatoires, on note les simples faits suivants :

a) Soit $\lambda : V \to X$ la projection canonique qui à tout $x \in V$ associe une feuille unique $\ell = \lambda(x)$ passant à travers x. Alors le fibré $(L^2(\lambda(x)))_{x \in V}$ des espaces de Hilbert sur V est *mesurable*. Plus spécifiquement, considérons le sous-ensemble de Borel de $V \times V$, $\;G = \{(x, y) \in V \;;\; y \in \lambda(x)\}$. Alors, modulo un choix non pertinent d'une $1/2$-densité $|dy|^{1/2}$ le long des feuilles, les sections $(\xi_x)_{x \in V}$ du fibré $(L^2(\lambda(x)))_{x \in V}$ sont juste des fonctions scalaires sur G et la mesurabilité a son sens habituel.

b) Une application $\ell \to q_\ell$, comme dans la définition 1, définit par composition avec λ un endomorphisme $(q_{\lambda(x)})_{x \in V}$ du fibré $(L^2(\lambda(x)))_{x \in V}$. On dira alors que $q = (q_\ell)_{\ell \in X}$ est *mesurable* ssi l'endomorphisme correspondant $(q_{\lambda(x)})_{x \in V}$ est mesurable au sens habituel, i.e. ssi pour toute paire de sections mesurables $(\xi_x)_{x \in V}, (\eta_x)_{x \in V}$ de $(L^2(\lambda(x)))_{x \in V}$, la fonction suivante sur V est mesurable au sens de Lebesgue :

$$x \in V \to \langle q_{\lambda(x)} \xi_x \;,\; \eta_x \rangle \in \mathbb{C}.$$

Il y a de nombreuses manières équivalentes de définir la mesurabilité des opérateurs aléatoires. Comme on l'a déjà remarqué dans la Section α, toute construction naturelle de familles $(q_\ell)_{\ell \in X}$ satisfera automatiquement la condition ci-dessus de mesurabilité.

Donnons quelques exemples d'opérateurs aléatoires.

1) Soit f une fonction de Borel bornée sur V. Alors pour toute feuille $\ell \in X$, soit $\widetilde{f}_\ell$ l'opérateur de multiplication

$$(\widetilde{f}_\ell \xi)(x) = f(x)\xi(x) \qquad \forall x \in \ell, \forall \xi \in L^2(\ell).$$

Ceci définit un opérateur aléatoire $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_\ell)_{\ell \in X}$.

2) Soit $X \in C^\infty(V, F)$ un espace vectoriel réel sur V tangent aux feuilles du feuilletage. Alors soit $\psi_1 = \exp(tX)$ le groupe associé des difféomorphismes de V. (Supposons par exemple que V est compact pour assurer l'existence de ψ_t). Par construction, $\psi_t(x) \in \lambda(x)$ pour tout $x \in V$ de telle façon qu'il définit pour chaque ℓ un difféomorphisme de ℓ. Soit $(U_\ell)_{\ell \in X}$ la famille correspondante d'unitaires (l'application $\ell \to L^2(\ell)$ est fonctorielle). C'est un opérateur aléatoire $U = (U_\ell)_{\ell \in X}$.

Soit $q = (q_\ell)_{\ell \in X}$ un opérateur aléatoire. La norme de l'opérateur $\|q_\ell\|$ de q_ℓ dans $L^2(\ell)$ définit une fonction mesurable sur V par composition avec $\lambda \;:\; V \to X$ qui donne du sens à la norme

$$(*) \qquad \|q\| = \text{ Supremum principal de } \|q_\ell\| \ , \ \ell \in X.$$

On dit que q est nul presque partout ssi $q \circ \lambda$ l'est également.

L'algèbre de von Neumann $W(V,F)$ d'un feuilletage s'obtient comme suit :

Proposition 2. *Les classes des opérateurs aléatoires bornés $(q_\ell)_{\ell \in X}$ modulo l'égalité presque partout, munies des règles algébriques suivantes, forment une algèbre de von Neumann $W(V,F)$:*

$$\begin{aligned}
(p+q)_\ell &= p\ell + q\ell \quad \forall \ell \in X \\
(pq)_\ell &= p_\ell q_\ell \qquad \forall \ell \in X \\
(p^*)_\ell &= (p_\ell)^* \qquad \forall \ell \in X.
\end{aligned}$$

La norme, définie de manière unique par la structure d'algèbre involutive, est donnée par $(*)$. On a utilisé ici la possibilité de définir une algèbre de von Neumann sans représentation spécifique dans l'espace de Hilbert, cf. le chapitre V. Si l'on souhaite réaliser concrètement $W(V,F)$ comme opérateurs sur un espace de Hilbert, on peut, par exemple, faire agir les opérateurs aléatoires par

$$(q\xi)_s = q_{\lambda(s)} \xi_s \ \ \forall s \in V$$

dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des sections de carré intégrable $(\xi_s)_{s \in V}$ du fibré $\lambda^* L^2$ des espaces de Hilbert sur V. On peut aussi utiliser la restriction de $\lambda^* L^2$ à une sous-variété transversale suffisamment grande T de V. Les invariants des algèbres de von Neumann sont indépendants du choix d'une représentation spécifique dans l'espace de Hilbert et ils ne dépendent que de la structure algébrique.

L'algèbre de von Neumann $W(V,F)$ ne dépend que de l'espace X des feuilles avec sa classe de mesure de Lebesgue ; on a la

Proposition 3. *Deux feuilletages (V_i, F_i) avec le même espace de feuilles ont des algèbres de von Neumann isomorphes : $W(V_1,F_1) \sim W(V_2,F_2)$.*

Pour être plus précis, on doit requérir dans la proposition 3 que $\dim F_i > 0$ et que l'isomorphisme supposé $V_1/F_1 \sim V_2/F_2$ soit donné par une bijection $\psi \ : \ V_1/F_1 \to V_2/F_2$ qui préserve la classe de mesure de Lebesgue et soit de Borel dans le sens où $\{(x,y) \in V_{12} \ ; \ \psi(\lambda_1(x)) = \lambda_2(y)\}$ est un sous-ensemble de Borel de V_{12}, avec $\lambda_i \ : \ V_i \to V_i/F_i$ l'application quotient.

Pour toute algèbre de von Neumann M, son centre

$$Z(M) = \{x \in M \ ; \ xy = yx \ \ \forall y \in M\}$$

est une sous-algèbre de von Neumann commutative de M.

Dans le contexte ci-dessus, on a la proposition suivante, facile à démontrer

Proposition 4. *Soit (V, F) une variété feuilletée ; alors la construction 1) des opérateurs aléatoires amène un isomorphisme*

$$L^\infty(X) \sim Z(W(V, F))$$

de l'algèbre des (classes de) fonctions bornées sur $X = V/F$ vers le centre de $W(V, F)$.

En particulier $W(V, F)$ est un facteur ssi le feuilletage est ergodique.

On va maintenant illustrer le type de classification des algèbres de von Neumann par des exemples géométriques donnés par les feuilletages. Cela permettra à un lecteur à l'esprit non algébrique de se faire une image mentale de ces notions.

Algèbres de von Neumann de type I

Par définition, une algèbre de von Neumann M est de type I ssi elle est algébriquement isomorphe au commutant d'une algèbre de von Neumann *commutative*. Ainsi le type I est la forme stable de l'hypothèse de commutativité. On renvoie au chapitre V pour une classification facile des algèbres de von Neumann (à duals séparables) comme intégrales directes des algèbres de matrices $M_n(\mathbb{C}),\ n \in \{1, 2, ..., \infty\}$.

Un critère simple assurant qu'une algèbre de von Neumann M est de type I est qu'elle contient une projection abélienne e de support central égal à 1. Une projection $e = e^* = e^2 \in M$ est dite *abélienne* ssi l'algèbre de von Neumann réduite

$$M_e = \{x \in M\ ;\ xe = ex = x\}$$

est commutative. Le support central de e est égal à 1 ssi on a $ex \neq 0$ pour tout $x \in Z(M), x \neq 0$.

En utilisant ce critère, on obtient facilement que l'algèbre de von Neumann d'un feuilletage (V, F) est de type I ssi l'espace des feuilles X est un espace de mesure ordinaire. Plus précisément, on a la :

Proposition 5. *Soit (V, F) une variété feuilletée. Alors l'algèbre de von Neumann associée est de type* I *ssi l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

a) L'application quotient $\lambda : V \to X$ admet une section de Lebesgue mesurable.

3) L'espace des feuilles X, avec sa structure quotient est, à ensemble nul près, un espace de Borel standard.

Une section mesurable α de λ est une application mesurable de V vers V constante le long des feuilles et telle que

$$\alpha(x) \in \lambda(x) \quad \forall x \in V.$$

En général, la projection abélienne $e \in W(V, F)$ est donnée par une section mesurable $\ell \to \xi_\ell \in L^2(\ell)$ du fibré $(L^2(\ell))_{\ell \in X}$ telle que $\|\xi_\ell\| \in \{0, 1\}\ \ \forall \ell \in X$. La formule pour l'opérateur aléatoire $e = (e_\ell)_{\ell \in X}$ est alors

$$e_\ell \eta = \langle \eta, \xi_\ell \rangle \xi_\ell \qquad \forall \eta \in L^2(\ell),\ \ \forall \ell \in X.$$

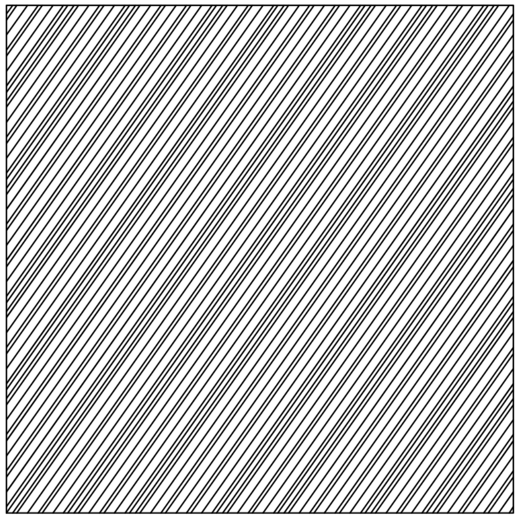

FIGURE 7. feuilletage de Kronecker $dy = \sqrt{2}\, dx$

Le support central de e est égal à 1 ssi $\|\xi_\ell\| = 1$ a.e. La propriété de type I ci-dessus est rarement vérifiée pour un feuilletage. Elle l'est, bien sûr, pour les fibrations ou si toutes les feuilles sont compactes ; mais elle est aussi vérifiée pour certains feuilletages dont les feuilles ne sont pas compactes, comme les feuilletages de Reeb (Figure 7). Dans ce dernier exemple, l'application α, qui associe à chaque feuille ℓ le point $\alpha(l) \in \ell$ où la courbure extrinsèque est maximale, amène une section mesurable de $\lambda : V \to X$.

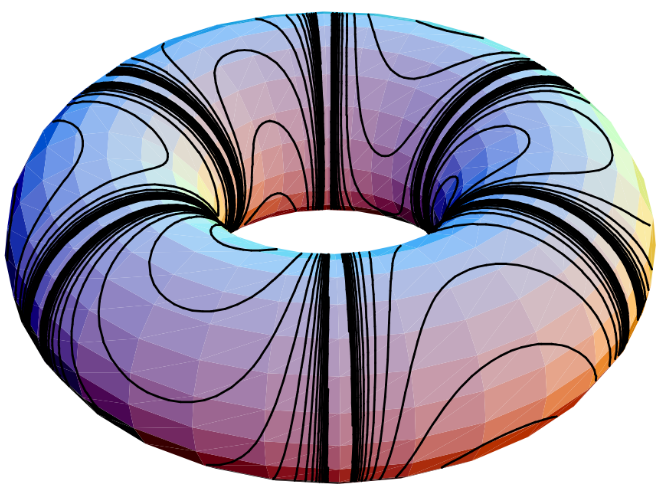

FIGURE 8. Exemple d'un feuilletage de type I

Algèbres de von Neumann de type II

Une trace finie τ sur une algèbre est une forme linéaire τ telle que $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour toute paire x, y d'éléments de cette algèbre. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert infini-dimensionnel et $M_\infty(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre de von Neumann de tous les opérateurs bornés sur $\mathcal{H}$. C'est le seul facteur de type I_∞. Ce facteur n'a aucune trace finie, mais la trace habituelle des opérateurs, étendue par la valeur $+\infty$ aux opérateurs positifs qui ne sont pas dans $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ est une trace normale fidèle semi-finie positive sur $M_\infty(\mathbb{C})$. On renvoie au chapitre V Section 3 pour les définitions techniques.

Par définition, une algèbre de von Neumann M est semi-finie ssi elle a une trace normale fidèle semi-finie positive. Toute algèbre de von Neumann de type I est semi-finie. Toute algèbre de von Neumann semi-finie M est décomposable de manière unique comme la somme directe $M = M_{\mathrm{I}} \oplus M_{\mathrm{II}}$ d'une algèbre de von Neumann de type I, M_{I}, et d'une algèbre de von Neumann semi-finie M_{II} n'ayant aucune projection abélienne non nulle. On dit que M_{II} est de type II.

Soit (V, F) une variété feuilletée et $M = W(V, F)$ l'algèbre de von Neumann associée. On va voir maintenant que les traces fidèles positives semi-finies τ sur M correspondent exactement à la notion géométrique de *densités transversales positives invariantes* sur V, qu'on décrit d'abord.

Étant donnée une variété lisse Y, une *densité positive* ρ sur Y est donnée par une section du fibré principal canonique suivant P sur Y. En chaque point $y \in Y$, la fibre P_y est l'espace des applications homogènes non nulles $\rho : \wedge^d T_y \to \mathbb{R}_+^*, \rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in \wedge^d T_y$, où $T_y = T_y(Y)$ est l'espace tangent de Y en $y \in Y$ et d est la dimension de Y.

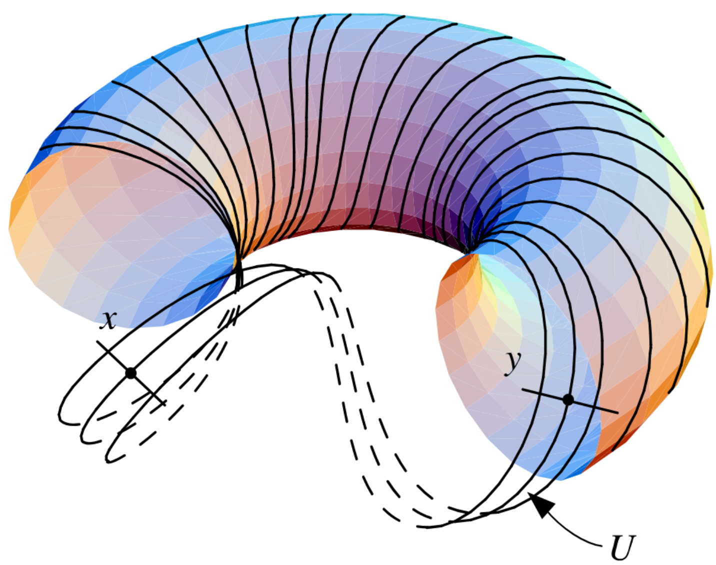

FIGURE 9. x et y appartiennent à la même feuille, U est un domaine de la carte de feuilletage contenant x, y et x, y appartiennent à la même plaque.

Par construction, P est un $\mathbb{R}_+^*$-fibré principal sur Y. Le choix d'une densité mesurable détermine une mesure dans la classe de Lebesgue, et toutes les mesures dans cette classe s'obtiennent de cette manière.

Passons maintenant au cas des feuilletages (V, F). On veut définir la notion de densité sur un espace de feuilles X. Étant donnée une feuille $\ell \in X$, on peut penser naïvement à l'espace tangent $T_\ell(X)$ comme à l'espace vectoriel q-dimensionnel réel, où $q = \dim V - \dim F$ obtenu comme suit. Pour tout $x \in V$, le quotient $N_x = (T_x(V))/F_x$ est un bon candidat pour $T_\ell(X)$, il reste à identifier les espaces vectoriels N_x et N_y pour $x, y \in \ell$.

Soit $U \subset V$ le domaine de la carte de feuilletage de telle façon que x et y appartiennent à la même plaque de U, i.e. à la même feuille de la restriction de F à U (Figure 8). Les feuilles de (U, F) sont les fibres d'une submersion $\pi : U \to \mathbb{R}^q$ dont l'application tangente en x, y donne l'identification souhaitée : $N_x \sim N_y$. Cette identification est indépendante de choix quelconques, quand la feuille ℓ n'a pas d'holonomie et est transitive. Puisqu'on suppose que l'ensemble des feuilles d'holonomie non triviale est négligeable au sens de Lebesgue, on obtient ainsi un fibré réel mesurable bien défini $T(X)$ sur X, de fibre $T_\ell(X) \sim N_x$ pour tout $x \in \ell$. Comme ci-dessus dans le cas des variétés, on appelle P le $\mathbb{R}_+^*$-fibré associé principal des *densités positives*. La fibre P_ℓ de P en $\ell \in X$ est l'espace des applications homogènes non nulles $\rho : \wedge^q T_\ell \to \mathbb{R}_+^*, \rho(\lambda v) = |\lambda| \rho(v) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \forall v \in \wedge^q T_\ell$. Ici $q = \dim T_\ell$ est la codimension de F.

On va maintenant voir que les densités positives sur X, i.e. les sections mesurables ρ de P sur X, correspondent exactement aux traces normales fidèles positives semi-finies sur l'algèbre de von Neumann $W(V, F)$.

Proposition 6. *Soit (V, F) une variété feuilletée, X son espace de feuilles.*

(1) *Soit ρ une section mesurable de P sur X, et $T = (T_\ell)_{\ell \in X}$ un opérateur aléatoire positif. Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de V par des domaines de cartes de feuilletages, et $(\xi_\alpha)_{\alpha \in I}$ un partition lisse de l'unité associée à ce recouvrement. Pour chaque plaque p de U_α, soit $\mathrm{Tr}((\xi_\alpha) \,|\, p)$ la trace de l'opérateur $\xi_\alpha^{1/2} T_\ell \xi_\alpha^{1/2}$ dans $L^2(p) \subset L^2(\ell)$, où ℓ est la feuille de p. Alors le nombre suivant $\tau_\rho(T) \in [0, +\infty]$ est indépendant des choix de U_α, ξ_α:*

$$\tau_\rho(T) = \sum_{\alpha \in I} \int \mathrm{Tr}((\xi_\alpha T) \,|\, p) \ \rho(p).$$

2) *La fonctionnelle $\tau_\rho : M^+ \to [0, +\infty]$ ainsi obtenue est une trace normale fidèle semi-finie positive sur M, et toutes telles traces sur M s'obtiennent de cette manière.*

En particulier, on obtient un critère simple pour que $W(V, F)$ soit semi-fini :

Corollaire 7. *$W(V, F)$ est semi-fini ssi le $\mathbb{R}_+^*$-fibré principal P sur X admet une certaine section mesurable.*

Pour $\theta \notin \mathbb{Q}$ le feuilletage de Kronecker $dy = \theta \, dx$ du 2-tore remplit cette condition ; son algèbre de von Neumann $W(\mathbb{T}^2, F_\theta)$ est l'unique facteur hyperfini de type II_∞, notamment $R_{0,1}$ (cf. Section 3). Similairement, tout flot qui est ergodique pour une mesure invariante dans la classe des mesures de Lebesgue donne le même facteur hyperfini de type II_∞. Tout produit $(V_1 \times V_2, F_1 \times F_2)$ des exemples ci-dessus donnera aussi ce facteur $R_{0,1}$.

Décrivons maintenant un feuilletage de type II donnant naissance à un facteur non hyperfini. Soit $\Gamma = \pi_1(S)$ le groupe fondamental d'une surface de Riemann S compacte de genre > 1 et $\alpha : \Gamma \to \mathrm{SO}(N)$ une représentation orthogonale fidèle de Γ. Soit V l'espace total du $\mathrm{SO}(N)$-fibré principal plat sur S associé à α. Alors le feuilletage horizontal de V est un feuilletage deux-dimensionnel F qui a pour algèbre de von Neumann associée un facteur non hyperfini de type II_∞.

Algèbres de von Neumann de type III

Toute algèbre de von Neumann M est de manière canonique la somme directe $M = M_{\rm I} \oplus M_{\rm II} \oplus M_{\rm III}$ d'algèbres de von Neumann des types respectifs. Une algèbre de von Neumann M de type III est telle que l'algèbre réduite M_e, pour tout $e = e^2 = e^*, e \neq 0$ n'est jamais semi-finie. Bien sûr, ceci est une assertion négative, mais la théorie modulaire (cf. Section 3) amène un invariant fondamental, le flot des poids mod(M), qui est une action du groupe $\mathbb{R}_+^*$ par les automorphismes d'un espace de mesure de Lebesgue, ainsi que la décomposition continue canonique de M comme le produit croisé d'une algèbre de von Neumann de type II par une action de $\mathbb{R}_+^*$. On renvoie au chapitre V Section 8 pour les définitions techniques, mais on va maintenant présenter de façon précise dans le cas de l'algèbre de von Neumann M d'un feuilletage (V, F) ce que sont ces invariants. Soit (V, F) une variété feuilletée. On a d'abord besoin de revenir à la construction du $\mathbb{R}_+^*$-fibré principal P sur l'espace des feuilles X et d'interpréter l'espace total de P comme l'espace des feuilles d'un nouveau feuilletage (V', F'). Soit $N, N_x = T_x(V)/F_x$, le fibré transversal du feuilletage (V, F). C'est un fibré vectoriel réel, de dimension $q = \operatorname{codim} F$, sur la variété V. On appelle Q le $\mathbb{R}_+^*$-fibré associé principal des densités positives. Par conséquent, la fibre de Q en $x \in V$ est l'espace homogène $\mathbb{R}_+^*$ des applications non nulles :

$$\rho \ : \ \wedge^q N_x \to \mathbb{R}_+, \ \ \rho(\lambda\, v) = |\lambda|\, \rho(v) \qquad \forall \lambda \in {}'R, \ \ \forall v \in \wedge^q N_x .$$

Par construction, Q est un fibré principal lisse, et on note V' son espace total. La restriction de Q à n'importe quelle feuille ℓ du feuilletage a une *connexion canonique plate* ∇. Cela découle de l'identification canonique vue plus haut des espaces transversaux $N_x, x \in \ell$. Puisque cette assertion est une assertion locale, elle n'utilise aucune hypothèse d'hononomie. En utilisant la connexion plate ∇, on définit un feuilletage F' de V', $\dim F' = \dim F$, comme celui des relevés horizontaux de F. Ainsi, pour $y \in V' = Q$ au-dessus de $x \in V$, l'espace $F'_y \subset T_y(V')$ est le relevé horizontal de F_x. La platitude de ∇ assure que F' est intégrable. On vérifie alors que :

Proposition 8. 1) *(V', F') est une variété feuilletée canoniquement associée à (V, F).*

2) *Le groupe $\mathbb{R}_+^*$ agit par les automorphismes du feuilletage (V', F').*

3) *Avec l'hypothèse d'holonomie ci-dessus, l'espace des feuilles de (V', F') est l'espace total du $\mathbb{R}_+^*$-fibré principal P sur l'espace des feuilles X de (V, F).*

Dans 2), l'action est bien sûr celle du $\mathbb{R}_+^*$-fibré $Q = V'$, on la dénotera par $(\theta_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(V', F')}$. Avec la notation ci-dessus, on a maintenant la

Proposition 9. a) *L'algèbre de von Neumann $W(V', F')$ est toujours semi-finie.*

b) *$W(V, F)$ est de type* III *ssi $W(V', F')$ est de type* II.

c) *Le flot des poids de $W(V, F)$ est donné par l'action θ de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'algèbre de von Neumann commutative*

$$L^\infty(P) = Z(W(V', F')).$$

d) *La décomposition continue de* $W(V,F)$ *est donnée par le produit croisé de* $W(V',F')$ *par l'action* θ *de* $\mathbb{R}_+^*$.

Avec ce résultat, on peut maintenant illustrer la classification de la section 3 par des exemples géométriques.

Tous les invariants dont il a été question dans la Section 3, $S(M), T(M)$... sont calculés en fonction du flot des poids mod(M), ainsi, par exemple, (pour les facteurs)

$S(M) = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ \theta_\lambda = \mathrm{id}\}$

$T(M) =$ Spectrum discret de $\theta = \{t \in \mathbb{R} : \exists u \neq 0, \theta_\lambda(u) = \lambda^{it}u \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$.

En particulier, M est de type III, ssi mod(M) est le flot constant. Ainsi un feuilletage ergodique $W(V,F)$ est de type III_1 ssi (V',F') est ergodique.

Un exemple simple de cette situation est donné par le feuilletage de Anosov F du fibré de la sphère unité V d'une surface riemanienne compacte S de genre $g > 1$ muni de sa métrique riemanienne de courbure constante -1. Ainsi (cf. par exemple [394]), la variété V est le quotient $V = G/\Gamma$ du groupe de Lie semi-simple $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ par le sous-groupe discret cocompact $\Gamma = \pi_1(S)$, et le feuilletage F de V est donné par l'orbite de l'action par multiplication à gauche sur $V = G/\Gamma$ du sous-groupe $B \subset G$ des matrices triangulaires supérieures.

L'algèbre de von Neumann $M = W(V,F)$ de ce feuilletage est le facteur hyperfini (unique) de type III_1 : R_∞. On peut par exemple vérifier que le feuilletage associé de type II (V',F') est ergodique. Il a le même espace de feuilles que le flot horocycle donné par l'action sur $V = G/\Gamma$ du groupe des matrices triangulaires supérieures de la forme $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Donnons un exemple d'un feuilletage qui a pour algèbre de von Neumann associée le facteur hyperfini R_λ de type III_λ, $\lambda \in]0,1[$. Soit $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}), \Gamma \subset G$ comme ci-dessus, et B le sous-groupe de G des matrices triangulaires supérieures $\begin{bmatrix} a & t \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit V la variété $V = G/\Gamma \times \mathbb{T}$ où $\mathbb{T}$ est le tore uni-dimensionnel, $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+^*/\lambda^{\mathbb{Z}}$. Le groupe B agit sur G/Γ par les translations à gauche et sur $\mathbb{T}$ par multiplication par a. L'action produit de B sur V donne un feuilletage deux-dimensionnel (V,F) et

$$W(V,F) \sim R_\lambda.$$

La même construction avec $\mathbb{T}$ et l'action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{T}$ remplacée par un flot ergodique arbitraire lisse Y amène un feuilletage (V,F) qui a pour algèbre de von Neumann associée l'unique algèbre de facteurs hyperfinis de type III_0 avec Y comme flot de poids, notamment le facteur de Krieger R_Y (cf. le chapitre V). En fait, les facteurs hyperfinis de type $\mathrm{III}_\lambda, \lambda \in]0,1]$ et une large classe de facteurs hyperfinis de type III_0 proviennent déjà de feuilletages lisses du tore 2-dimensionnel ([346]).

On ne peut clore cette section sans mentionner la profonde relation entre la classe de Godbillon-Vey et le flot de poids dont il sera question dans le chapitre III Section 6.