

1) Traduction d'un extrait du livre d'Alain Connes *Noncommutative geometry* : paragraphe 9.β : transversales fermées et idempotents (p. 125)
(extrait du chapitre 2 : Topologie et K-théorie, section 9 : le théorème de l'indice longitudinal pour les feuilletages)

9.β Transversales fermées et idempotents de $C_r^*(V, F)$. Soit (V, F) une variété feuilletée, et $N \subset V$ une sous-variété compacte avec $\dim N = \text{Codim } F$, partout transverse au feuilletage. Alors la restriction F' de F à un voisinage tubulaire V' suffisamment petit de N définit sur V' une fibration de base compacte N . En d'autres termes, il existe une fibration $V' \xrightarrow{p} N$ avec pour fibres $\mathbb{R}^k, k = \dim F$, telle que pour tout $x \in V$, on a $F_x = \text{Ker}(p_*)_x$. La C^* -algèbre $C_r^*(V', F')$ de la restriction de F à V' est ainsi fortement Morita équivalente à $C(N)$, et en fait elle est isomorphe à $C(N) \otimes \mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est la C^* -algèbre des opérateurs compacts. En particulier, elle contient un idempotent $e = e^2 = e^*, e = 1_N \otimes f \in C(N) \otimes \mathcal{K}$, où f est une projection minimale dans $\mathcal{K}$. En utilisant l'inclusion $C_r^*(V', F') \subset C_r^*(V, F)$ donnée par le lemme 2 ci-dessus, on obtient ainsi un idempotent de $C_r^*(V, F)$, que l'on va maintenant décrire plus concrètement. La transversalité de N au feuilletage assure l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}$ de $G^{(0)}$ dans G tel que

$$\gamma \in \mathcal{V} \circ \mathcal{V}', \quad s(\gamma) \in, \quad r(\gamma) \in N \implies \gamma \in G^{(0)},$$

où $G^{(0)} = \{(x, x); x \in V\}$ est l'ensemble des unités de G . Soit alors ξ une section lisse sur la sous-variété $r^{-1}(N) \subset G$ du fibré $s^*(\Omega^{1/2})$ de demi-densités, $\xi \in C_c^\infty(r^{-1}(N), s^*(\Omega^{1/2}))$, telle que

α) Support $\xi \subset \mathcal{V}$,

β) $\int_{r(\gamma)=y} |\xi(\gamma)|^2 = 1 \quad \forall y \in N$.

L'égalité $e(\gamma) = \sum_{\substack{s(\gamma')=s(\gamma) \\ r(\gamma') \in N}} \bar{\xi}(\gamma'\gamma^{-1})\xi(\gamma')$ définit un idempotent

$$e \in C_c^\infty(G, \Omega^{1/2}) \subset C_r^*(V, F)$$

En effet, pour chaque $x \in V$, l'opérateur $\pi_x(e)$ dans $L^2(G_x)$ est la projection orthogonale sur le sous-espace fermé de $L^2(G_x)$ engendré comme espace vectoriel par un ensemble de vecteurs orthogonaux étiqueté par l'ensemble dénombrable $I = r^{-1}(N) \cap G_x$, notamment $(\eta_\gamma)_{\gamma \in I}$, où

$$\eta_\gamma(\gamma') = \xi(\gamma(\gamma')^{-1}) \quad \forall \gamma' \in G_x.$$

Une façon plus canonique de définir (la classe d'équivalence de) l'idempotent ci-dessus $e \in C_r^*(V, F)$ est de montrer que le C^* -module $eA, A = C_r^*(V, F)$, est le même que la complétion de $C_c^\infty(r^{-1}(N), s^*(\Omega^{1/2}))$ par l'action à droite $C_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ donnée par la convolution, pour $f \in C_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$,

$$(\xi * f)(\gamma) = \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} \xi(\gamma_1)f(\gamma_2) \quad \forall \xi \in C_c^\infty(r^{-1}(N), s^*(\Omega^{1/2}))$$

Le livre est téléchargeable sur le site d'Alain Connes à cette adresse :

<https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf>.

Transcription en L^AT_EX et traduction : Denise Vella-Chemla, mai 2025.

et avec le produit intérieur $C_c^\infty(G, \Omega^{1/2})$ -valué donné par

$$\langle \xi, \eta \rangle(\gamma) = \sum_{\substack{s(\gamma')=s(\gamma) \\ r(\gamma') \in N}} \bar{\xi}(\gamma' \gamma^{-1}) \eta(\gamma'), \quad \forall \xi, \eta \in C_c^\infty(r^{-1}(N), s^*(\Omega^{1/2})).$$

La construction de ce C^* -module $\mathcal{E}_N$ sur $C_r^*(V, F)$ a du sens que N soit compact ou pas, mais dans le premier cas, l'identité est un endomorphisme compact de $\mathcal{E}_N$ et $\mathcal{E}_N = eC_r^*(V, F)$ pour un idempotent adéquat $e \in C_r^*(V, F)$ (l'identité étant de rang un).

Si N est compact et rencontre chaque feuille de (V, F) , alors $\mathcal{E}_N$ donne une équivalence de Morita forte entre $C_r^*(V, F)$ et la C^* -algèbre des endomorphismes compacts de $\mathcal{E}_N$ qui, si l'on suppose que N est compact, est *unitaire*. Cette C^* -algèbre est la C^* -algèbre de convolution du groupoïde réduit G_N :

$$G_N = \{\gamma \in G ; r(\gamma) \in N, s(\gamma) \in N\}.$$

Le groupoïde G_N est une variété de dimension $q = \text{Codim } F$, et le produit de convolution dans $C_c^\infty(G_N)$ est donné par

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) g(\gamma_2)$$

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

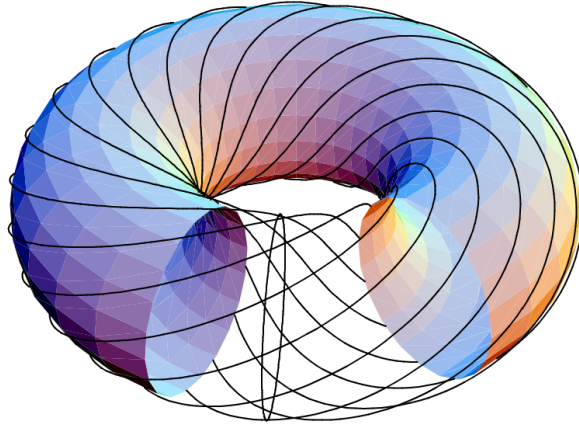


FIGURE 7. Transversale

La norme de C^* -algèbre sur $C_c^\infty(G_N)$ est donnée par le supremum de la norme $\|\pi_x(f)\|$ où pour chaque $x \in N = G_N^{(0)}$, π_x est la représentation of $C_c^\infty(G_N)$ dans $\ell^2(G_{N,x})$ donnée par

$$(\pi_x(f)\xi)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) \xi(\gamma_2) \quad \forall \gamma \in G_N, s(\gamma) = x.$$

On dénotera cette C^* -algèbre par les symboles $C_{r,N}^*(V, F)$, et on la calculera pour un exemple simple.

Ainsi, soit (V, F) le feuilletage de Kronecker $dy = \theta dx$ du 2-tore $V = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ avec les coordonnées naturelles $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ici $\theta \in]0, 1[$ est un nombre irrationnel.

Le graphe G de ce feuilletage est la variété $G = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ avec domaines source et image de l'application $G \rightarrow \mathbb{T}^2$ donnés par

$$\begin{aligned} r((x, y), t) &= (x + t, y + \theta t) \\ s((x, y), t) &= (x, y) \end{aligned}$$

et avec composition donnée par $((x, y), t)((x', y'), t') = ((x', y'), t + t')$ pour toute paire d'éléments composables.

Toute géodésique fermée du tore plat $\mathbb{T}^2$ amène une transversale compacte. Plus précisément, pour toute paire (p, q) d'entiers premiers entre eux, on appelle $N_{p,q}$ la sous-variété de $\mathbb{T}^2$ donnée par

$$N_{p,q} = \{(ps, qs) ; s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}.$$

Le graphe G réduit par $N = N_{p,q}$, i.e. $G_N = \{\gamma \in G ; r(\gamma) \in N, s(\gamma) \in N\}$, est alors la variété $G_N = \mathbb{T} \times \mathbb{Z}$ de domaines source et image donnés par :

$$r(u, n) = u + n\theta', \quad s(u, n) = u$$

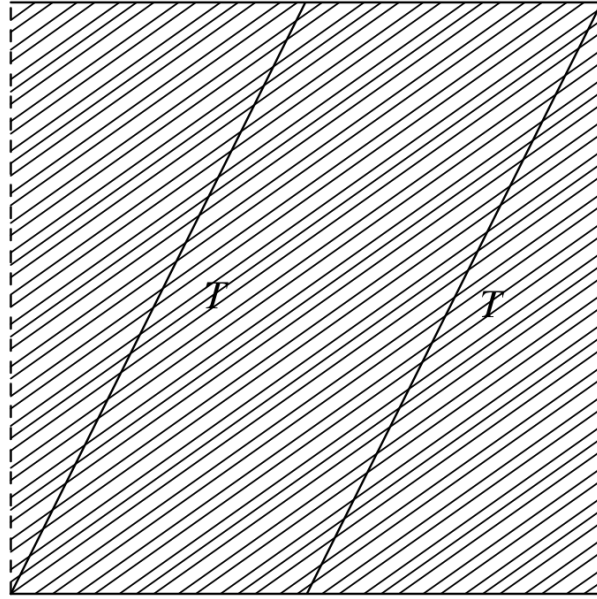


FIGURE 8. Le feuilletage de Kronecker avec une transversale fermée T

où $\theta' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est déterminée de manière unique par toute paire (p', q') d'entiers telle que $p'q' - p'q = 1, \theta' = p'\theta - q'/p\theta - q$.

La C^* -algèbre $C_{r,N}^*(V, F)$ est le produit fermé de $C(\mathbb{T})$ par la rotation d'angle θ' i.e. c'est la C^* -algèbre des rotations irrationnelles ([472]) $A_{\theta'}$ engendrée par deux unitaires U et V tels que :

$$VU = \exp(2\pi i \theta') UV$$

Puisque $N = N_{p,q}$ rencontre toute feuille du feuilletage, il s'ensuit de cela que $C_r^*(V, F)$ est fortement Morita équivalente à A'_θ pour toute paire de nombres premiers entre eux (p, q) . En particulier pour $p = 0, q = 1$ on obtient A_θ et par transitivité de l'équivalence de Morita forte, on voit que si θ

et θ' sont sur la même orbite de l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ alors A_θ est Morita équivalent à $A_{\theta'}$, cela donne une autre preuve de ce résultat de [472]. Tous les résultats de cette section, incluant la construction du C^* -module projectif fini $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{p,q}$ sur A_θ qui accomplit l'équivalence de Morita avec A'_θ (i.e. $A'_\theta \sim \mathrm{End}_{A_\theta}(\mathcal{E})$), sont dus à l'auteur de ce livre [98], [96] et ont été plus tard étendus à des tores de dimension plus grande par Rieffel. On détermine d'abord la variété

$$E_{p,q} = \{\gamma \in G ; (\gamma) \in G ; N_{p,q}, s(\gamma) \in N_{0,1}\}.$$

Supposons que $p > 0$ pour éviter le cas trivial $p = 0$. On trouve que $E_{p,q} = \{((0, y), t) ; t \in \mathbb{R}, py = t(q - p\theta) \text{ modulo } 1\}$. C'est donc l'union disjointe de p copies de la variété $\mathbb{R}$, puisque la valeur de $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas déterminée de manière unique par l'égalité

$$py = t(q - p\theta) \text{ modulo } 1.$$

En travaillant en dehors du produit intérieur A_θ -valué sur $C_c^\infty(E_{p,q})$, on trouve la description suivante du C^* -module $\mathcal{E}_{p,q}$.

Appelons $\varepsilon = q/p - \theta$, et soient W_1 et W_2 des opérateurs unitaires dans $\mathbb{C}^p = K$ tels que $W_1^p = W_2^p = 1$ et $W_1 W_2 = \exp(2\pi i q/p) W_2 W_1$. Soient V_1 et V_2 les opérateurs sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ donnés par

$$(V_1 \xi)(s) = \xi(s - \varepsilon), \quad (V_2 \xi)(s) = \exp(2\pi i s) \xi(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Alors l'action de A_θ sur $\mathcal{E}_{p,q}$ est déterminée en utilisant l'identification $C_c^\infty(E_{p,q}) = C_c^\infty(\mathbb{R}) \otimes K$ par les égalités

$$\xi U = (V_1 \otimes W_1) \xi, \quad \xi V = (V_2 \otimes W_2) \xi \quad \forall \xi \in C_c^\infty(E_{p,q})$$

où U, V sont les générateurs ci-dessus de A_θ .

Le produit intérieur A_θ -valué qui permet de compléter $C_c^\infty(E_{p,q})$ et d'obtenir $\mathcal{E}_{p,q}$ est donné par la valeur des composantes de $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\mathbb{Z}} \langle \xi, \eta \rangle_{m,n} U^m V^n$

$$\langle \xi, \eta \rangle_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle W_2^n W_1^m \xi(s - m\varepsilon), \eta(s) \rangle \exp(-2\pi i n s) ds.$$

On reviendra à ces modules dans des chapitres ultérieurs.

Bien sûr, les feuilletages peuvent ne pas avoir de telles transversales fermées N , et on montrera sur un exemple que même $C_r^*(V, F)$ peut n'avoir aucun idempotent non nul. On appelle Γ un sous-groupe discret co-compact de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Alors $V = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\Gamma$ a un flot naturel H_t , le flot horocycle, défini par l'action par translations à gauche du sous-groupe

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\} \text{ de } \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Soit F le feuilletage de V en orbites du flot horocycle. D'abord le flot est minimal, donc, $C_r^*(V, F)$ est une C^* -algèbre simple ([213][278]). Ensuite, soit μ la mesure sur V associée à la mesure de Haar de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, on peut associer à μ (qui est H_t -invariante pour tout $t \in \mathbb{R}$) une mesure transverse Λ

pour (V, F) , et par conséquent, une trace τ sur $C_r^*(V, F)$. Par simplicité de $C_r^*(V, F)$ cette trace τ est fidèle. Donc pour un idempotent $e \in C_r^*(V, F)$, on a

$$0 < \tau(e) < \infty \text{ si } e \neq 0.$$

Maintenant soit $G_s, s \in \mathbb{R}$, le flot géodésique sur V , défini par l'action par translation à gauche du sous-groupe $\left\{ \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} ; s \in \mathbb{R} \right\}$. Pour tout s , G_s est un automorphisme de (V, F) , puisque l'égalité $G_s H_t G_s^{-1} = H_{e^{-2s}t}$ montre que pour $y = G_s(x)$, $F_y = (G_s)_* F_x$. Cela découle de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ te^{-2s} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^s \end{bmatrix}$$

Soit θ_s l'automorphisme correspondant de $C_r^*(V, F)$. Pour tout $x \in C_r^*(V, F)$, l'application $s \mapsto \theta_s(x)$ de $\mathbb{R}$ vers $C_r^*(V, F)$ est continue en norme, ce qui montre que si e est un idempotent auto-adjoint, alors $\theta_s(e)$ est équivalent à e pour tout $s \in \mathbb{R}$, et par conséquent $\tau(\theta_s(e)) = \tau(e)$, $\forall s \in \mathbb{R}$.

Mais alors que μ est invariante de façon évidente par le flot géodésique, la mesure transverse Λ n'est pas invariante par G_s ; en effet, l'égalité $G_s H_t G_s^{-1} = H_{e^{-2s}t}$ montre que $G_s(\Lambda) = e^{-2s}\Lambda$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Ainsi $\tau \circ \theta_s = e^{-2s}\tau$, et donc $\tau(e) = 0$ pour tout idempotent auto-adjoint e . Donc $C_r^*(V, F)$ n'a aucun idempotent non nul bien qu'il soit simple (cf. [52] pour le premier exemple d'une telle C^* -algèbre). On décrira dans la section 9 un autre exemple avec une C^* -algèbre unitaire.