1) Traduction d'un extrait du livre d'Alain Connes *Noncommutative geometry*
(Pairing of cyclic cohomology with K -theory dans le chapitre 3 : Cohomologie cyclique
et géométrie différentielle (page 229 et suivantes)

3. Appariement de la cohomologie cyclique et de la K -théorie

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre non commutative unitaire et $K_0(\mathcal{A})$ et $K_1(\mathcal{A})$ ses groupes de K -théorie algébrique (cf. [391]). Par définition, $K_0(\mathcal{A})$ est le groupe associé au semi-groupe des classes d'isomorphismes stables des modules projectifs finis sur $\mathcal{A}$. De plus, $K_1(\mathcal{A})$ est le quotient du groupe $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$ par son sous-groupe commutateur, où $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$ est la limite inductive des groupes $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ des éléments inversibles de $M_n(\mathcal{A})$, avec les applications de plongement $x \rightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dans cette section, on définira, par une formule directe, l'appariement entre $HC^{\mathrm{pair}}(\mathcal{A})$ et $K_0(\mathcal{A})$ et entre $HC^{\mathrm{imppair}}(\mathcal{A})$ et $K_1(\mathcal{A})$. Pour une approche équivalente, voir [325].

L'appariement satisfait $\langle S\varphi, e \rangle = \langle \varphi, e \rangle$, pour $\varphi \in HC^*(\mathcal{A})$, $e \in K(\mathcal{A})$, et par conséquent est en fait défini sur $H^*(\mathcal{A}) = HC^*(\mathcal{A}) \otimes_{HC^*(\mathbb{C})} \mathbb{C}$. Comme outil de calcul, on formulera également l'appariement en fonction des connexions et de la courbure comme on le fait pour le caractère de Chern habituel, pour les variétés lisses.

Cela montrera l'invariance de Morita de $HC^*(\mathcal{A})$, et donnera dans le cas où $\mathcal{A}$ est abélienne une action de l'anneau $K_0(\mathcal{A})$ sur $HC^*(\mathcal{A})$.

Lemme 1. *Supposons que $\varphi \in Z_\lambda^n(\mathcal{A})$ et soient $p, q \in \mathrm{Proj} M_k(\mathcal{A})$ deux idempotents de la forme $p = uv$, $q = vu$ pour certains $u, v \in M_k(\mathcal{A})$. Alors les cocycles suivants sur $\mathcal{B} = \{x \in M_k(\mathcal{A}) ; xp = px = x\}$ diffèrent par une cofrontière :*

$$\begin{aligned} \psi_1(a^0, \dots, a^n) &= (\varphi \# \mathrm{Tr})(a^0, \dots, a^n), \\ \psi_2(a^0, \dots, a^n) &= (\varphi \# \mathrm{Tr})(va^0u, \dots, va^nu). \end{aligned}$$

Preuve. D'abord, en remplaçant $\mathcal{A}$ par $M_k(\mathcal{A})$, on peut supposer que $k = 1$. Alors, on peut remplacer p, q, u, v par $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{bmatrix}$ et par conséquent, supposer l'existence d'un élément inversible w tel que $wpw^{-1} = q, u = pw^{-1} = w^{-1}q, v = qw = wp$; il suffit de prendre $w = \begin{bmatrix} 1-p & u \\ v & 1-q \end{bmatrix}$. Alors le résultat découle de la proposition 1.8.

Rappelons qu'une description équivalente de $K_0(\mathcal{A})$ est que c'est le groupe abélien associé au semi-groupe des classes d'équivalence stables des idempotents $e \in \mathrm{Proj} M_k(\mathcal{A})$.

Le livre est téléchargeable sur le site d'Alain Connes à cette adresse :
<https://alainconnes.org/wp-content/uploads/book94bigpdf.pdf>.
Transcription en L^AT_EX et traduction : Denise Vella-Chemla, mai 2025.

Proposition 2. [102]

- a) L'égalité suivante définit un appariement bilinéaire entre $K_0(\mathcal{A})$ et $HC^{\text{pair}}(\mathcal{A})$: $\langle [e], [\varphi] \rangle = (m!)^{-1}(\varphi \# \text{Tr})(e, \dots, e)$ pour $e \in \text{Proj } M_k(\mathcal{A})$ et $\varphi \in Z_\lambda^{2m}(\mathcal{A})$.
- b) On a $\langle [e], [S\varphi] \rangle = \langle [e], [\varphi] \rangle$.
- c) Soit φ (resp. ψ) un cocycle pair cyclique sur une algèbre $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$); alors pour tout $e \in K_0(\mathcal{A})$ et $f \in K_0(\mathcal{B})$, on a

$$\langle e \otimes f, \varphi \# \psi \rangle = \langle e, \varphi \rangle \langle f, \psi \rangle.$$

Preuve. D'abord, si $\varphi \in B_\lambda^{2m}(\mathcal{A})$, $\varphi \# \text{Tr}$ est également une cofrontière, $\varphi \# \text{Tr} = b\psi$ et donc $(\varphi \# \text{Tr})(e, \dots, e) = b\psi(e, \dots, e) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \psi(e, \dots, e) = \psi(e, \dots, e) = 0$, puisque $\psi^\lambda = -\psi$. Cela, avec le lemme 1, montre que $(\varphi \# \text{Tr})(e, \dots, e)$ dépend seulement de la classe d'équivalence de e . Puisque remplacer e par $\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ne change pas le résultat, on obtient l'additivité et par conséquent a).

- b) On a $S\varphi(e, \dots, e) = \sum_{j=1}^{2m} \widehat{\varphi}(e(de)^{j-1}e(de)^{n-j+1})$ et, puisque $e^2 = e$, on a $edee = 0$, $e(de)^2 = (de)^2e$, de telle façon que

$$S\varphi(e, \dots, e) = (m+1)\varphi(e, \dots, e).$$

- c) découle de b).

On va maintenant décrire le cas impair.

Proposition 3. [102]

- a) L'égalité suivante définit un appariement bilinéaire entre $K_1(\mathcal{A})$ et $HC^{\text{impair}}(\mathcal{A})$ $\langle [u], [\varphi] \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^i}} 2^{-n} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)^{-1} (\varphi \# \text{Tr})(u^{-1} - 1, u - 1, u^{-1} - 1, \dots, u - 1)$ où $\varphi \in Z_\lambda^n(\mathcal{A})$ et $u \in \text{GL}_k(\mathcal{A})$.
- b) On a $\langle [u], [S\varphi] \rangle = \langle [u], [\varphi] \rangle$.
- c) Soit φ (resp. ψ) un cocycle cyclique pair (resp. impair) sur une algèbre $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$); alors pour tout $e \in K_0(\mathcal{A})$, $u \in K_1(\mathcal{B})$ on a

$$\langle [e \otimes u + (1 - e) \otimes 1], \varphi \# \psi \rangle = \langle e, \varphi \rangle \langle u, \psi \rangle.$$

Preuve. a) Soit $\widetilde{\mathcal{A}}$ l'algèbre obtenue à partir de $\mathcal{A}$ en adjoignant une unité. Puisque $\mathcal{A}$ est déjà unitaire, $\widetilde{\mathcal{A}}$ est isomorphe au produit de $\mathcal{A}$ par $\mathbb{C}$, au moyen de l'homomorphisme $\rho : (a, \lambda) \rightarrow (a + \lambda 1, \lambda)$ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ vers $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$. Soit $\widetilde{\varphi} \in Z_\lambda^n(\widetilde{\mathcal{A}})$ défini par l'égalité

$$\widetilde{\varphi}((a^0, \lambda^0), \dots, (a^n, \lambda^n)) = \varphi(a^0, \dots, a^n) \quad \forall (a^i, \lambda^i) \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Vérifions que $b\tilde{\varphi} = 0$. Pour $(a^0, \lambda^0), \dots, (a^{n+1}, \lambda^{n+1})$ dans $\tilde{\mathcal{A}}$, on a

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}((a^0, \lambda^0), \dots, (a^i, \lambda^i)(a^{i+1}, \lambda^{i+1}), \dots, (a^{n+1}, \lambda^{n+1})) \\ &= \varphi(a^0, \dots, a^i a^{i+1}, \dots, a^{n+1}) + \lambda^i \varphi(a^0, \dots, a^{i-1}, a^{i+1}, \dots, a^{n+1}) + \lambda^{i+1} \varphi(a^0, \dots, a^i, a^{i+2}, \dots, a^{n+1}). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} b\tilde{\varphi}((a^0, \lambda^0), \dots, (a^{n+1}, \lambda^{n+1})) \\ = \lambda^0 \varphi(a^1, \dots, a^{n+1}) + (-1)^{n-1} \lambda^0 \varphi(a^{n+1}, a^1, \dots, a^n) = 0. \end{aligned}$$

Maintenant, pour $u \in \text{GL}_1(\mathcal{A})$, on a

$$\varphi(u^{-1} - 1, u - 1, \dots, u^{-1} - 1, u - 1) = (\tilde{\varphi} \circ \rho^{-1})(\bar{u}^{-1}, \bar{u}, \dots, \bar{u}^{-1}, \bar{u})$$

où $\bar{u} = (u, 1) \in \mathcal{A} \times \mathbb{C}$. Ainsi, pour montrer que cette fonction $\chi(u)$ satisfait

$$\chi(uv) = \chi(u) + \chi(v) \quad \text{pour } u, v \in \text{GL}_1(\mathcal{A})$$

on peut supposer que $\varphi(1, a^0, \dots, a^{n-1}) = 0$ pour $a^i \in \mathcal{A}$ et remplacer χ par

$$\chi(u) = \varphi(u^{-1}, u, \dots, u^{-1}, u).$$

Maintenant, on a avec $U = \begin{bmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $V = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$

$$\chi(uv) = (\varphi \# \text{Tr})(U^{-1}, U, \dots, U^{-1}, U),$$

$$\chi(u) + \chi(v) = (\varphi \# \text{Tr})(V^{-1}, V, \dots, V^{-1}, V),$$

Puisque U est relié à V par le chemin lisse

$$U_t = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{bmatrix}$$

il suffit de vérifier que

$$\frac{d}{dt}(\varphi \# \text{Tr})(U_t^{-1}, U_t, \dots, U_t) = 0.$$

En utilisant $(U_t^{-1})' = -U_t^{-1}U_t'U_t^{-1}$, l'égalité souhaitée se déduit facilement. On a montré que le côté droit de 3 a) définit un homomorphisme de $\text{GL}_k(\mathcal{A})$ vers $\mathbb{C}$. La compatibilité avec l'inclusion $\text{GL}_k \subset \text{GL}_{k'}$ est évidente.

Pour montrer que le résultat est 0 si φ est une cofrontière, on peut supposer que $k = 1$, et, en utilisant l'argument ci-dessus, que $\varphi = b\psi$ où $\psi \in C_\lambda^{n-1}$ et $\psi(1, a^0, \dots, a^{n-2}) = 0$ pour $a^i \in \mathcal{A}$. (On a $b\tilde{\varphi} = (b\psi)^-$ pour $\psi \in C_\lambda^{n-1}$). Alors, on obtient $b\psi(u^{-1}, \dots, u^{-1}, u) = 0$.

b) La preuve est laissée au lecteur.

Remarque. La normalisation 2 a) de l'appariement entre K_0 et HC^{pair} est uniquement spécifiée par les conditions 2 b) c). La normalisation de l'appariement entre K_1 et HC^{impair} est seulement spécifiée à une constante globale multiplicative près λ , indépendante de n , par les conditions 3 b)

c). Notre choix (3 a)) est, au choix de la racine carré de $2i$ près, le seul choix pour lequel la formule suivante est vérifiée :

$$\langle u \wedge v, \varphi \# \psi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \langle v, \psi \rangle$$

où le produit $\wedge : K_1(\mathcal{A}) \times K_1(\mathcal{B}) \rightarrow K_0(\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B})$ est défini dans le contexte des pré- C^* -algèbres (cf. Chapitre IV Section 9). Pour vérifier la formule ci-dessus, on a juste besoin de savoir que si $e \in C^\infty(\mathbb{T}^2, P_1(\mathbb{C}))$ est une application de degré 1 du 2-tore vers $P_1(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$ alors $\tau(e, e, e) = 2\pi i$, où τ est le 2-cocycle cyclique sur $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ donné par $\tau(f^0, f^1, f^2) = \int_{\mathbb{T}^2} f^0 df^1 \wedge df^2$, $\forall f^j \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$. Notons que le générateur de Bott b de la K -théorie de $P_1(\mathbb{C})$ correspond à la classe de $[1 - e] - 1$ (cf. [19] p. 61) alors que la définition du produit $\varphi \# \psi$ (Section 1 α)) introduit un signe $-$ dans le cas impair.

Soit $H^*(\mathcal{A}) = HC^*(\mathcal{A}) \otimes_{HC^*(\mathbb{C})} \mathbb{C}$ la cohomologie cyclique périodique de $\mathcal{A}$. Ici $HC^*(\mathbb{C})$, qui par le corollaire est identifié à un anneau de polynômes $\mathbb{C}[\sigma]$, agit sur $\mathbb{C}$ par $P(\sigma) \rightarrow P(1)$. Cet homomorphisme de $HC^*(\mathbb{C})$ vers $\mathbb{C}$ est l'appariement donné par la proposition 2 avec le générateur de $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Par construction, $H^*(\mathcal{A})$ est la limite inductive des groupes $HC^n(\mathcal{A})$ selon l'application $S : HC^n(\mathcal{A}) \rightarrow HC^{n+2}(\mathcal{A})$, ou de façon équivalente, c'est le quotient de $HC^*(\mathcal{A})$ par la relation d'équivalence $\varphi \sim S\varphi$. En tant que tel, il hérite d'un classement naturel $\mathbb{Z}/2$ et d'une filtration

$$F^n H^*(\mathcal{A}) = \text{Im } HC^n(\mathcal{A}).$$

Les propositions 2 et 3 définissent un appariement canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $H^{\text{pair}}(\mathcal{A})$ et $K_0(\mathcal{A})$, et entre $H^{\text{impair}}(\mathcal{A})$ et $K_1(\mathcal{A})$.

Corollaire 4. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre localement convexe et τ un cocycle cyclique continu pair (resp. impair) sur $\mathcal{A}$ (Appendice B) ; alors l'appariement de τ avec $e \in K_0(\mathcal{A})$ (resp. $u \in K_1(\mathcal{A})$) dépend seulement de la classe d'homotopie de e (resp. u).*

Cela découle de la remarque 1.30 c).

La notion suivante sera importante à la fois dans les calculs explicites de l'appariement ci-dessus (cela est déjà clair dans le cas $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, V une variété lisse) et dans la discussion des équivalences de Morita.

Définition 5. *Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Omega$ un cycle sur $\mathcal{A}$, et $\mathcal{E}$ un module projectif fini sur $\mathcal{A}$. Alors une connexion ∇ sur $\mathcal{E}$ est une application linéaire $:\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1$ telle que :*

$$\nabla(\xi x) = (\nabla \xi)x + \xi \otimes d\rho(x), \quad \forall \xi \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathcal{A}.$$

Ici $\mathcal{E}$ est un module à droite sur $\mathcal{A}$ et Ω^1 est considéré comme un bimodule sur $\mathcal{A}$ en utilisant l'homomorphisme $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^0$ et la structure d'anneau de Ω^* . Listons un certain nombre de propriétés évidentes :

Proposition 6.

- a) Soit $e \in \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ un idempotent et ∇ une connexion sur $\mathcal{E}$; alors $\xi \mapsto (e \otimes 1)\nabla\xi$ est une connexion sur $e\mathcal{E}$.
- b) Tout module projectif fini $\mathcal{E}$ admet une connexion.
- c) L'espace des connexions est un espace affine sur l'espace vectoriel

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \omega^1).$$

- d) Toute connexion ∇ se prolonge de manière unique en une application linéaire de $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega$ dans lui-même telle que

$$\nabla(\xi \otimes \omega) = (\nabla\xi)\omega + \xi \otimes d\omega, \quad \forall \xi \in \mathcal{E}, \omega \in \Omega.$$

Preuve. a) On multiplie l'égalité de la définition 5 par $e \otimes 1$ (sur la gauche).

b) Par a), on peut supposer que $\mathcal{E} = \mathbb{C}^k \otimes \mathcal{A}$ pour un certain k . Alors, avec $(\xi_i)_{i=1,\dots,k}$ la base canonique de $\mathcal{E}$, posons

$$\nabla\left(\sum \xi_i a_i\right) = \sum \xi_i \otimes d\rho(a_i) \in \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1.$$

Notons que, si $k = 1$ par exemple, alors $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1 = \rho(1)\Omega^1$ et $\nabla a = \rho(1)d\rho(a)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ puisque $\mathcal{A}$ est unitaire. Cela diffère en général de d , même quand $\rho(1)$ est l'unité de Ω^0 .

c) Immédiat.

d) Par construction, $\tilde{\mathcal{E}}$ est le module projectif sur Ω induit par l'homomorphisme ρ . L'assertion d'unicité est évidente puisque $\nabla\xi$ est déjà défini pour $\xi \in \mathcal{E}$. L'existence découle de l'égalité

$$\nabla(\xi a)\omega + \xi a \otimes d\omega = (\nabla\xi)a\omega + \xi \otimes d(a\omega)$$

pour tout $\xi \in \mathcal{E}$, $a \in \mathcal{A}$ et $\omega \in \Omega$.

On va maintenant construire un cycle sur $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. On commence avec l'algèbre graduée $\text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$, où T est de degré k si $T\tilde{\mathcal{E}}^j \subset \tilde{\mathcal{E}}^{j+k}$ pour tout j . Pour un certain $T \in \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$ de degré k , on pose $\delta(T) = \nabla T - (-1)^k T\nabla$. Par l'égalité d), on obtient

$$\nabla(\xi\omega) = (\nabla\xi)\omega + (-1)^{\deg \xi} \xi d\omega \quad \text{pour } \xi \in \tilde{\mathcal{E}}, \omega \in \Omega,$$

et donc que $\delta(T) \in \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$, et est de degré $k + 1$. Par construction, δ est une dérivation graduée de $\text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$. Ensuite, puisque $\tilde{\mathcal{E}}$ est un module projectif fini, la trace graduée $\int : \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}$ définit une trace, qui nous dénoterons par $\int$, sur l'algèbre graduée $\text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$.

Lemme 7. On a que l'intégrale $\int \delta(T) = 0$ pour tout $T \in \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$ de degré $n - 1$.

Preuve D'abord, remplaçons la connexion ∇ par $\nabla' = \nabla + \Gamma$, dans laquelle on a $\Gamma \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1)$, l'extension correspondant à $\tilde{\mathcal{E}}$ est $\nabla' = \nabla + \tilde{\Gamma}$, où $\tilde{\Gamma} \in \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$ et $\tilde{\Gamma}$ est de degré 1. Ainsi, il suffit de prouver le lemme pour une certaine connexion sur $\mathcal{E}$. Par conséquent, on peut supposer que $\mathcal{E} = e\mathcal{A}^k$ pour un certain $e \in \text{Proj } M_k(\mathcal{A})$ et que ∇ est donné par 6 a) à partir d'une connexion ∇_0 sur $\mathcal{A}^k$. Alors en utilisant l'égalité $\delta(T) = e\delta_0(T)e$ pour $T \in \text{End } \tilde{\mathcal{E}} \subset \text{End } \tilde{\mathcal{E}}_0$ ($\mathcal{E}_0 = \mathcal{A}^k$), ainsi que

$$\delta_0(T) = \delta_0(eTe) = \delta_0(e)T + \delta(T) + (-1)^{\deg T} T\delta_0(e),$$

on se réduit au cas $\mathcal{E} = \mathcal{A}^k$, avec ∇ donné par 6 b). Terminons le calcul, disons avec $k = 1$. Soit $e = \rho(1)$. On a $\tilde{\mathcal{E}} = e\Omega$, $\text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}}) = e\Omega e$ et $\delta(a) = e(da)e$. Donc, $\int \delta(a) = \int (d(eae) - (de)a - (-1)^{\partial a} ade) = 0$.

Maintenant nous n'avons pas encore un cycle sur $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ en prenant l'homomorphisme évident de $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$ dans $\text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$, la différentielle δ et l'intégrale $\int$. En fait, la propriété cruciale $\delta^2 = 0$ n'est pas satisfaite :

Proposition 8.

- a) L'application $\theta = \nabla^2$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$ est un endomorphisme : $\theta \in \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$ et $\delta^2(T) = \theta T - T\theta$ pour tout $T \in \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$.
- b) On a $\langle [\mathcal{E}], [\tau] \rangle = \frac{1}{m!} \int \theta^m$ quand n est pair, $n = 2m$ où $[\mathcal{E}] \in K_0(\mathcal{A})$ est la classe de $\mathcal{E}$, et τ est le caractère de Ω .

Preuve. a) On utilise les règles $\nabla(\eta\omega) = \nabla(\eta)\omega + (-1)^{\deg \eta} \eta d\omega$ et $d^2 = 0$ pour vérifier que $\nabla^2(\eta\omega) = \nabla^2(\eta)\omega$.

b) Montrons que $\int \theta^m$ est indépendant de la connexion ∇ . Le résultat est alors facilement vérifié en prenant sur $\mathcal{E} = e\mathcal{A}^k$ la connexion de la proposition 6. Ainsi, soit $\nabla' = \nabla + \Gamma$ où Γ est un endomorphisme de degré 1 de $\tilde{\mathcal{E}}$. Il suffit de vérifier que la dérivée de $\int \theta_t^m$ est 0, où θ_t correspond à $\nabla_t = \nabla + t\Gamma$. En fait, il suffit de le faire pour $t = 0$; on obtient

$$\frac{d}{dt} \int \theta_t^m = \sum_{k=0}^{m-1} \int \int \theta_t^k \left(\frac{d}{dt} \theta_t \right) \theta_t^{m-k-1}.$$

Comme $\left(\frac{d}{dt} \theta_t \right)_{t=0} = \Gamma\nabla + \nabla\Gamma = \delta(\Gamma)$ on a

$$\left(\frac{d}{dt} \int \theta_t^m \right)_{t=0} = m \int \delta(\theta^{m-1}\Gamma) = 0$$

Par a), alors que $\delta^2 \neq 0$, il existe $\theta \in \Omega' = \text{End}_{\Omega}(\tilde{\mathcal{E}})$ tel que

$$\delta^2(T) = \theta T - T\theta \quad \forall T \in \Omega'.$$

On va maintenant construire un cycle à partir du quadruplet $(\Omega', \delta, \theta, f)$.

Lemme 9. *Soit $(\Omega', \delta, \theta, f)$ un quadruplet tel que Ω' est une algèbre graduée, δ une dérivation graduée de degré 1 de Ω' et $\theta \in \Omega'^2$ satisfait*

$$\delta(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \delta^2(\omega) = \theta\omega - \omega\theta \quad \text{pour} \quad \omega \in \Omega'.$$

Alors, on construit canoniquement un cycle en adjoignant à Ω' un élément X de degré 1 avec $dX = 0$ tel que $X^2 = \theta, \omega_1 X \omega_2 = 0, \quad \forall \omega_i \in \Omega'$.

Preuve. Soit Ω'' l'algèbre graduée obtenue en adjoignant X . Tout élément de Ω'' a la forme $\omega = \omega_{11} + \omega_{12}X + X\omega_{21} + X\omega_{22}X, \quad \omega_{ij} \in \Omega'$. Ainsi, comme espace vectoriel, Ω'' coïncide avec $M_2(\Omega')$; le produit est tel que

$$\omega\omega' = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{bmatrix}$$

et la graduation est obtenue en considérant X comme un élément de degré 1 ; ainsi $[\omega_{ij}]$ est de degré k quand ω_{11} est de degré k, ω_{12} et ω_{21} de degré $k - 1$ et ω_{22} de degré $k - 2$. On vérifie facilement que Ω'' est une algèbre graduée contenant Ω' . La différentielle d est donnée par les conditions $d\omega = \delta(\omega) + X\omega + (-1)^{\deg \omega} \omega X$ pour $\omega \in \Omega' \subset \Omega''$, et $dX = 0$. On obtient

$$d \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(\omega_{11}) & \delta(\omega_{12}) \\ -\delta(\omega_{21}) & -\delta(\omega_{22}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} + (-1)^{\deg \omega} \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta & 0 \end{bmatrix}$$

et on vérifie que les deux termes sur la droite définissent des dérivations graduées de Ω'' et que $d^2 = 0$. Finalement, on vérifie que l'égalité

$$\int (\omega_{11} + \omega_{12}X + X\omega_{21} + X\omega_{22}X) = \int \omega_{11} - (-1)^{\deg \omega} \int \omega_{22}\theta$$

définit une trace fermée graduée.

En mettant ensemble la proposition 8 a) et le lemme 9, on a le

Corollaire 10. *Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \Omega$ un cycle sur $\mathcal{A}, \mathcal{E}$ un module projectif fini sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}' = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. À chaque connexion ∇ sur $\mathcal{E}$ correspond canoniquement un cycle $\mathcal{A}' \xrightarrow{f'} \Omega'$ sur $\mathcal{A}'$.*

On peut montrer que le caractère $\tau' \in Z_{\lambda}^n(\mathcal{A}')$ de ce nouveau cycle a une classe $[\tau'] \in HC^n(\mathcal{A}')$ indépendante du choix de la connexion ∇ , qui coïncide avec la classe donnée par le lemme 1. On peut facilement vérifier une formule de réciprocité qui tient compte de l'équivalence de Morita.

Corollaire 11. *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des algèbres unitaires et $\mathcal{E}$ un $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -bimodule, projectif fini des deux côtés, avec $\mathcal{A} = \text{End}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{B} = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. Alors $HC^*(\mathcal{A})$ est canoniquement isomorphe à $HC^*(\mathcal{B})$.*

Finalement, quand $\mathcal{A}$ est abélien, et qu'est donné un module projectif fini $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}$, alors on a un homomorphisme évident de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}' = \text{End}_{\mathcal{A}}(\mathcal{E})$. Ainsi, dans ce cas, par restriction à $\mathcal{A}$ du cycle

du corollaire 10, on obtient le

Corollaire 12. *Quand $\mathcal{A}$ est abélienne, $HC^*(\mathcal{A})$ est de façon naturelle un module sur l'anneau $K_0(\mathcal{A})$.*

Pour donner un certain sens à cette assertion, on va calculer un exemple. Soit V une variété orientée compacte lisse. Soit $\mathcal{A} = C^\infty(V)$ et Ω le cycle sur $\mathcal{A}$ donné par le complexe de de Rham ordinaire et l'intégration des formes de degré n . Soit E un fibré vectoriel complexe sur V et $\mathcal{E} = C^\infty(V, E)$ le module projectif fini correspondant sur $\mathcal{A} = C^\infty(V)$. Alors la notion de connexion donnée par la définition coïncide avec la notion habituelle. Ainsi, le corollaire 12 amène un nouveau cocycle $\tau \in Z_\lambda^n(\mathcal{A})$ canoniquement associé à ∇ . On laisse en exercice la proposition suivante.

Proposition 13. *Soit ω_k la forme différentielle de degré $2k$ sur V qui donne la composante de degré $2k$ du caractère de Chern du fibré E avec la connexion $\nabla : \omega_k = (1/k!) \text{Tr}(\theta^k)$, où θ est la forme de la courbure. Alors on a l'égalité*

$$\tau = \sum S^k \tilde{\omega}_k$$

où $\tilde{\omega}_k \in Z_\lambda^{n-2k}(\mathcal{A})$ est donné par

$$\tilde{\omega}_k(f^0, \dots, f^{n-2k}) = \int f^0 df^1 \wedge \dots \wedge df^{n-2k} \wedge \omega_k, \quad \forall f^i \in \mathcal{A} = C^\infty(V),$$

et où τ est la restriction à $\mathcal{A} = C^\infty(V)$ du caractère du cycle associé au fibré E , la connexion ∇ , et le cycle de de Rham de $\mathcal{A}$ par le corollaire 10.

Bien sûr, dans cet exemple de $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, l'appariement entre la cohomologie cyclique et $K_0(\mathcal{A})$ donne en retour le caractère de Chern ordinaire des fibrés vectoriels.

Comme exemple plus sophistiqué, considérons l'exemple 2, β), i.e. l'algèbre des rotations irrationnelles. La sous-algèbre lisse $\mathcal{A}_\theta \subset A_\theta$ est stable par le calcul fonctionnel holomorphe (Appendice C) et donc, par un résultat de Pimsner et Voiculescu ([447]), on a $K_0(\mathcal{A}_\theta) = \mathbb{Z}^2$. Une description explicite des modules projectifs finis sur $\mathcal{A}_\theta$ a été donnée dans [98] et a été ensuite démontrée par M. Rieffel [475] pour classer à isomorphisme près tous les modules projectifs finis sur $\mathcal{A}_\theta$. On a déjà vu cela d'une manière légèrement différente dans la section II.8 β).

Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2, q > 0$, une paire d'entiers premiers entre eux ($p = 0$ étant autorisé). Construisons un module projectif fini $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{p,q}$ sur $\mathcal{A}_\theta$ comme suit.

On appelle $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz habituel des fonctions à valeurs complexes sur la droite réelle et on désigne par V_1 et V_2 deux opérateurs sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui sont définis par

$$(V_1\xi)(s) = \xi(s - \varepsilon), \quad (V_2\xi)(s) = e(s)\xi(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

où $\varepsilon = \frac{p}{q} - \theta$ et $e(s) = \exp(2\pi is) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

On a, bien sûr,

$$V_2V_1 = e(\varepsilon)V_1V_2.$$

Ensuite, soit K un espace de Hilbert de dimension finie et w_1 et w_2 les opérateurs unitaires sur K tels que

$$w_2w_1 = \bar{e}(p/q)w_1w_2, \quad w_1^q = w_2^q = 1.$$

En d'autres termes, K est une représentation (finie-dimensionnelle) des relations de commutation de Heisenberg pour le groupe cyclique fini $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et par conséquent, c'est une somme directe de d représentations irréductibles équivalentes.

Il est clair maintenant que dans le produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$, on a

$$(V_2 \otimes w_2)(V_1 \otimes w_1) = \bar{\lambda}(V_1 \otimes w_1)(V_2 \otimes w_2), \quad \lambda = e(\theta).$$

On transforme $\mathcal{E}$ en un $\mathcal{A}_\theta$ -module droit comme suit :

$$\begin{aligned} \xi U_1 &= (V_1 \otimes w_1)\xi \\ \xi U_2 &= (V_2 \otimes w_2)\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K = \mathcal{E}. \end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus montre que ceci est compatible avec la présentation de $\mathcal{A}_\theta$. Il est facile de vérifier que pour tout $a \in \mathcal{A}_\theta$, l'élément ξa appartient toujours à $\mathcal{E}$ en utilisant, par exemple, les propriétés générales des espaces nucléaires.

Par les résultats dans [98], le module droit sur $\mathcal{A}_\theta$ obtenu est *fini et projectif*. En fait :

Théorème 14. [475] *Soit $\mathcal{E}$ un module projectif fini sur $\mathcal{A}_\theta$; alors soit $\mathcal{E}$ est libre, $\mathcal{E} = \mathcal{A}^p$ pour un certain $p > 0$, soit $\mathcal{E}$ est isomorphe à $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \otimes K$ avec la structure de module ci-dessus.*

Rappelons maintenant (Théorème 7 Section 2) que $H^{\text{pair}}(\mathcal{A}_\theta)$ est un espace vectoriel de dimension 2 ayant pour base S_τ et φ , où τ est la trace canonique de $\mathcal{A}_\theta$ et où le 2-cocycle cyclique φ est

$$\varphi(x^0, x^1, x^2) = (2\pi i)^{-1} \tau(x^0(\delta_1(x^1)\delta_2(x^2) - \delta_2(x^1)\delta_1(x^2))) \quad \forall x^i \in \mathcal{A}_\theta$$

où δ_1, δ_2 sont les dérivations naturelles et commutant de $\mathcal{A}_\theta$. L'appariement de K_0 avec S_τ est le même qu'avec la trace τ , et étant donnée la dimension de Murray et von Neumann

$$\langle \tau, \mathcal{E}_{p,q} \rangle = p - \theta q.$$

Pour calculer l'appariement de K_0 avec φ , utilisons le cycle 2-dimensionnel suivant avec le caractère φ .

Comme une algèbre graduée Ω^* est le produit tensoriel de $\mathcal{A}_\theta$ par l'algèbre extérieure $\wedge^* \mathbb{C}^2$ de l'espace vectoriel deux-dimensionnel $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2$. La différentielle d est spécifiée de manière unique par l'égalité

$$d(a \otimes \alpha) = \delta_1(a) \otimes (e_1 \wedge \alpha) + \delta_2(a) \otimes (e_2 \wedge \alpha)$$

pour tout $a \in \mathcal{A}_\theta, \alpha \in \wedge^* \mathbb{C}^2$.

Finalement, la trace graduée, $\Omega^2 \rightarrow \mathbb{C}$, est

$$a \otimes (e_1 \wedge e_2) \rightarrow (2\pi i)^{-1} \tau(a) \in \mathbb{C}.$$

Une connexion (Définition 5) sur un module projectif fini $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}_\theta$ est ainsi donnée par une paire ∇_1, ∇_2 de différentielles covariantes, vérifiant

$$\nabla_j(\xi a) = (\nabla_j \xi) a + \xi \delta_j(a) \quad \forall \xi \in \mathcal{E}, \quad a \in \mathcal{A}_\theta$$

et la courbure T est facilement identifiée comme étant

$$(\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) \otimes (e_1 \wedge e_2)$$

Proposition 15. [98] Soit $\mathcal{E}_{p,q} = \mathcal{S}(\mathbb{R}, K)$ comme ci-dessus ; alors la formule suivante définit une connexion ∇ sur $\mathcal{E}$:

$$(\nabla_1 \xi)(s) = 2\pi i \frac{s}{\varepsilon} \xi(s), \quad (\nabla_2 \xi)(s) = \frac{d\xi}{ds}(s)$$

où $\varepsilon = \frac{p}{q} - \theta$.

La courbure de cette connexion est constante et égale à $-\frac{2\pi i}{\varepsilon} \otimes (e_1 \wedge e_2)$ et par la proposition 8 b), la valeur de l'appariement est

$$\langle \mathcal{E}_{p,q}, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{-2\pi i}{\varepsilon} \right) \tau(\text{id}_\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} (p - \theta q) = q.$$

Corollary 16. Soit $\varphi \in HC^2(\mathcal{A}_\theta)$ le 2-cocycle cyclique ci-dessus ; alors

$$\langle K_0(\mathcal{A}_\theta), \varphi \rangle \subset \mathbb{Z}$$

Ce résultat d'intégralitté se comprendra complètement et sera exploité dans le Chapitre IV Section 6. Finalement, remarquons que (pour $\theta \notin \mathbb{Q}$) la filtration de $H^{\text{pair}}(\mathcal{A}_\theta)$ par les dimensions n'est pas compatible avec le dual du treillis de $K_0(\mathcal{A}_\theta)$ puisque la classe 0-dimensionnelle de τ ne s'apparie pas intégralement avec K_0 . Dans la prochaine section, on calculera l'appariement de la K -théorie avec la cohomologie cyclique dans le cas des anneaux de groupes.