

Transcription et traduction d'un article de A. K. Seda

Un aspect du travail d'Alain Connes
Anthony Karel Seda

Introduction

Comme nous le savons tous certainement maintenant, les récipiendaires des médailles Fields les plus récemment décernées sont William P. Thurston de l'Université de Princeton, Shing-Tung Yau de l'Institute for Advanced Study de Princeton et Alain Connes de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, en France. Les médailles Fields sont décernées par l'Union mathématique internationale à l'occasion d'un Congrès international de mathématiciens et sont l'équivalent, pour les mathématiciens, du prix Nobel. Le dernier congrès de ce type devait initialement se tenir à Varsovie en août 1982, mais il s'y est finalement tenu un an plus tard en raison des troubles politiques en Pologne.

Les travaux de Thurston portent sur les feuilletages et la topologie des variétés de basse dimension, ceux de Yau sur la géométrie différentielle et les équations aux dérivées partielles, et ceux de Connes sur les algèbres d'opérateurs. Une évaluation des travaux de chaque lauréat a été publiée dans les Notices de l'American Mathematical Society en octobre 1982. En particulier, Calvin Moore s'est attaché à décrire certaines des contributions fondamentales d'Alain Connes.

Une grande partie des premiers travaux de Connes portait sur la classification par "types" de facteurs des algèbres de von Neumann, et trois des cinq articles de Connes cités par Moore concernent ce domaine. Cependant, le quatrième (sur la théorie non commutative de l'intégration, qui est la référence [2] ici) et le cinquième concernent (entre autres) l'interaction entre les algèbres d'opérateurs et les feuilletages. Ce sujet, appelé "géométrie différentielle non commutative", est "une fusion de la géométrie et de l'analyse fonctionnelle... susceptible d'avoir une influence significative sur les développements futurs", selon les mots d'Atiyah dans sa recension de [2] pour Mathematical Reviews.

Une partie de mes propres travaux porte sur ce domaine, et mon but ici est d'éclairer un peu le type de constructions réalisées et les résultats obtenus dans ce nouveau et intéressant domaine des mathématiques.

1. Groupoïdes topologiques et C^* -algèbres

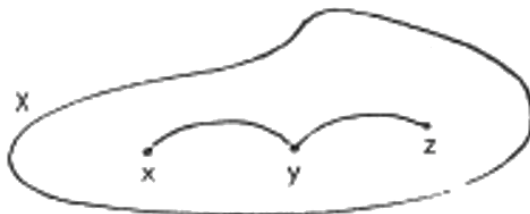
Un groupoïde G d'ensembles d'objets X est une petite catégorie d'ensembles d'objets X telle que chaque élément α de G a un inverse α^{-1} .

Référence : https://www.maths.tcd.ie/pub/ims/nl11/nl11_38-48.pdf.

Transcription en \LaTeX : Denise Vella-Chemla (traduction par outils Google translate).

Exemples

(1)



Soit X un espace topologique et soit $G(x, y) =$ (classes d'homotopie des) chemins de x à y . Alors $G = \bigcup_{x, y \in X} G(x, y)$ est un groupoïde (le groupoïde fondamental) sur X avec pour composition simplement la composition des (classes d'homotopie des) chemins, pour élément neutre I_x en x le chemin trivial, et pour inverse l'action "parcourir le chemin en sens inverse".

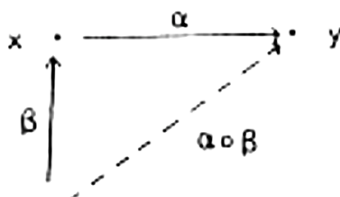
- (2) Un groupe est un groupoïde avec un seul objet, c'est-à-dire que X est un singleton constitué de l'élément neutre de G . En fait, un groupoïde est un groupe si et seulement si X est un singleton.
- (3) Supposons qu'un groupe H agisse sur la droite d'un ensemble X . Alors $G = X \times H$ possède une structure naturelle de groupoïde sur X dans laquelle le produit $(x', h') \circ (x, h)$ est défini si et seulement si $x' = x.h$, et est alors défini comme (x, hh') . L'inverse de (x, h) est $(x.h, h^{-1})$ et l'élément neutre en x est (x, e) , où e est l'élément neutre de H .

On peut donner de nombreux autres exemples de groupoïdes, mais ces trois exemples-là devraient suffire à illustrer la nature de ce qu'est un groupoïde.

Un groupoïde topologique est un groupoïde dans lequel à la fois G et X sont des espaces topologiques et toutes les applications de structure de G sont continues, c'est-à-dire que la composition, l'application inverse et l'application $x \mapsto I_x$ sont toutes continues.

Supposons désormais que G est un groupoïde topologique sur X et que G et X soient tous deux des espaces de Hausdorff localement compacts.

Étant donné $\alpha \in G$, il existe des x et y uniques $\in X$ tels que $\alpha \in G(x, y)$; soit $\pi(\alpha) = x$, le point initial de α , et soit $\pi'(\alpha) = y$ le point final de α . Soit $G^x = \{\beta \in G ; \pi'(\beta) = x\}$. Alors un élément $\alpha \in G(x, y)$ induit un homéomorphisme $L_\alpha : G^x \rightarrow G^y$ défini par $L_\alpha(\beta) = \alpha \circ \beta$.



L_α est appelé multiplication à gauche par α .

Guidé par certaines analogies entre la théorie des groupes et la théorie ergodique, G.W. Mackey a introduit, en 1966, les notions de groupoïde de mesure et de groupoïde ergodique. Dans le contexte topologique, ces idées conduisent naturellement à formuler un concept de mesure invariante à gauche (ou de Haar) sur un groupoïde G , et à considérer les espaces de fonctions associés à G . En pratique, la forme la plus simple à utiliser pour une mesure invariante est la forme suivante :

Définition : Une mesure de Haar sur G est une famille de mesures de Radon non triviales $\{\mu_x; x \in X\}$ sur G telles que :

- (1) $\text{supp}(x) \subseteq G^x$ pour tout $x \in X$.
- (2) Les μ_x sont invariantes à gauche au sens où

$$\int_G f \, d\mu_x = \int_G f_0 L_{\alpha^{-1}} \, d\mu_y$$

pour tous $x, y \in X, \alpha \in G(x, y)$ et $f \in C_C(G)$.

- (3) L'application $x \mapsto \mu_x$ est vaguement continue, c'est-à-dire que l'application $x \mapsto \int f \, d\mu_x$ est continue pour tout $f \in C_C(G)$.

Dans cette définition, et ailleurs, $C_C(G)$ désigne l'espace de toutes les fonctions scalaires continues sur G à support compact.

La relation entre deux mesures de Haar sur G est, cependant, contrairement au cas des groupes, assez compliquée, voir [6]. Pourtant, toute mesure de Haar sur G induit une structure de \star -algèbre sur $C_C(G)$, comme suit. Étant donnés $f, g \in C_C(G)$, nous définissons $f \star g$ sur G par

$$(f \star g)(\alpha) = \int_G f(\beta)g(\beta^{-1}\alpha) \, d\mu_{\pi'(\alpha)}(\beta).$$

Nous définissons également une involution $f \mapsto f^\star$ par $f^\star(\alpha) = \overline{f(\alpha^{-1})}$.

Les mesures de Haar et le produit de convolution ci-dessus ont été étudiés par l'auteur dans [6], [7] et par Renault dans [5], et l'un des principaux résultats fondamentaux est le suivant :

Théorème. $C_C(G)$ est une \star -algèbre associative avec ces opérations et c'est, de plus, une \star -algèbre topologique dans la topologie limite inductive.

Le reste de cette section concerne l'association d'une C^\star -algèbre à G . Le développement est similaire à la construction d'Effros-Hahn des groupes de transformations C^\star -algèbres, voir [5].

Une représentation de $C_C(G)$ sur un espace de Hilbert H est un \star -homomorphisme $L : C_C(G) \rightarrow \beta(H)$ qui est continu lorsque $C_C(G)$ a la topologie limite inductive et $\beta(H)$ la topologie d'opérateur faible, et tel que l'espace vectoriel engendré par $\{L(f)\xi; f \in C_C(G), \xi \in H\}$ est

dense dans H .

Pour $f \in C_C(G)$, définissons

$$\|f\|' = \sup_{x \in X} \int |f| d\mu_x, \quad \|f\|'' = \sup_{x \in X} \int |f| d(\mu_x)^{-1}$$

et enfin, posons $\|f\|_1 = \max(\|f\|', \|f\|'')$.

Proposition ([5])

- (i) $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $C_C(G)$ définissant une topologie plus grossière que la topologie limite inductive.
- (ii) $\|\cdot\|_1$ est une norme de \star -algèbre sur $C_C(G)$, c'est-à-dire $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ et $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$, pour tous les $f, g \in C_C(G)$.

Définition ([5]) : Une représentation L de $C_C(G)$ est bornée si $\|L(f)\| \leq \|f\|_1$ pour tout $f \in C_C(G)$.

Maintenant, définissons, pour tout $f \in C_C(G)$, $\|f\| = \sup \|L(f)\|$ où L parcourt toutes les représentations bornées de $C_C(G)$.

Il est facile de voir que $\|\cdot\|$ est une C^* -semi-norme, et on montre, en présentant suffisamment de représentations bornées (en fait, les représentations régulières), qu'il s'agit d'une norme. Enfin, nous notons $C^*(G)$ le complété de $C_C(G)$ par rapport à $\|\cdot\|$. Alors $C^*(G)$ est une C^* -algèbre, c'est-à-dire une algèbre de Banach avec involution linéaire conjuguée $f \mapsto f^*$ telle que $\|f^* \star f\| = \|f\|^2$ pour tout f , et est appelée la C^* -algèbre du groupoïde G .

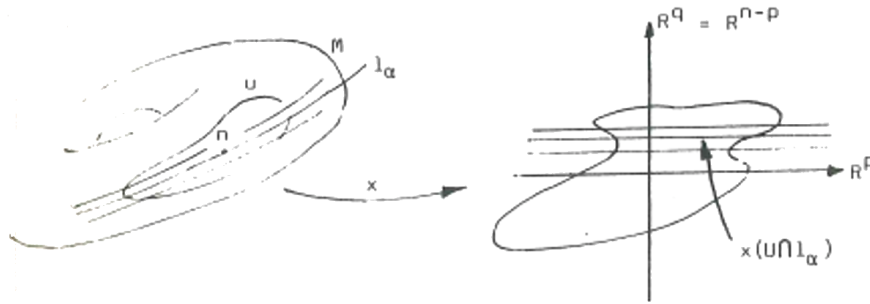
2. Feuilletages et groupoïde d'holonomie

Les feuilletages ont une longue histoire, même si leur définition et leur objet n'ont été formalisés que dans les années 1940 par Ehresmann et Reeb. On rencontre des feuilletages dans :

- (a) les submersions de variétés (ici, les feuilles sont les composantes des fibres) ;
- (b) les fibrés à groupe de structure discret ;
- (c) les actions des groupes de Lie (ici, les feuilles sont les orbites) ;
- (d) les équations différentielles (ici, les solutions sont les feuilles).

Définition ([1], [4]) : Soit M une variété n -dimensionnelle et soient p et q des entiers naturels tels que $p + q = n$. Un feuilletage p -dimensionnel de classe C^r de M est une décomposition de M en une union de sous-ensembles connexes disjoints $\{1_\alpha\}_{\alpha \in A}$, appelés les feuilles du feuilletage, avec la propriété suivante : chaque point m de M possède un voisinage U et un système de coordonnées locales de classe C^r , $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que pour chaque $\alpha \in A$, les composantes de $U \cap 1_\alpha$ sont décrites par les équations

$$x^{p+1} = \text{constante}, \dots, x^n = \text{constante}.$$



On note un tel feuilletage par $\mathcal{F} = \{l_\alpha\}_{\alpha \in A}$. p est appelé la dimension et $q = n - p$ la codimension de \mathcal{F} .

Notons que chaque feuille de \mathcal{F} est une sous-variété p -dimensionnelle plongée de M , mais ce plongement n'a pas besoin d'être propre car les feuilles peuvent être denses dans M .

Les coordonnées locales possédant la propriété mentionnée dans la définition ci-dessus sont dites distinguées par le feuilletage. Si x, y sont deux systèmes de coordonnées définis sur un ensemble ouvert $U \subset M$, alors yx^{-1} est un difféomorphisme local $C^r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnant le "changement de coordonnées" et est exprimé par les équations

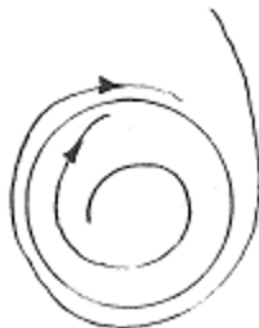
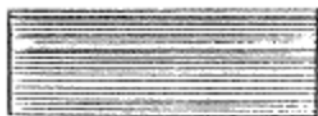
$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et celles-ci doivent satisfaire les équations différentielles

$$\frac{\partial y_i}{\partial x^j} = 0 \quad 1 \leq j \leq p < i \leq n.$$

dans U . Cela signifie que yx^{-1} transforme les feuilles en feuilles. Ainsi, tandis qu'une variété n -dimensionnelle ressemble localement à \mathbb{R}^n , une variété n -dimensionnelle avec un feuilletage p -dimensionnel ressemble localement à $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p$ trivialement feuilleté par des hyperplans p -dimensionnels parallèles à \mathbb{R}^p .

Exemples



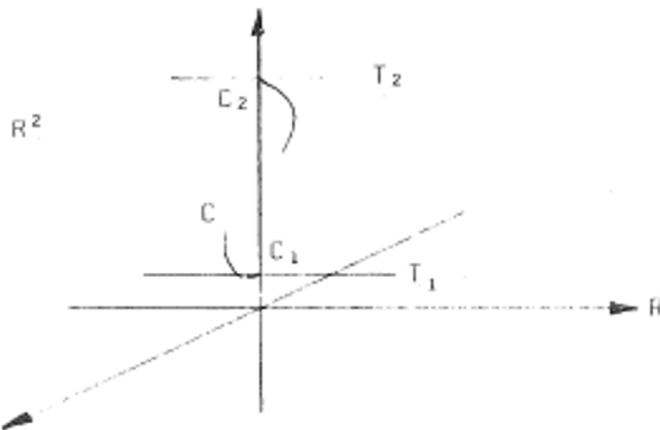
trajectoires d'une équation différentielle

Le groupoïde d'holonomie

Soit (M, \mathcal{F}) une variété feuilletée comme ci-dessus, et soit (U, x) une coordonnée locale particulière. Alors les plaques de U sont données par l'équation $(p_2x)(m) = \text{constante}$, où $p_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ est la projection. Étant donné M la "topologie des feuilles", c'est-à-dire la topologie sur M qui a les plaques d'ensembles ouverts distingués comme base, et appelons l'espace résultant F . Une fonction continue $U \rightarrow \mathbb{R}^q$ est dite distinguée si elle est localement de la forme $h \circ p_2 \circ x$, où h est un homéomorphisme local de \mathbb{R}^q . Soit D le faisceau des germes des fonctions distinguées et $\sigma : D \rightarrow F$ l'application envoyant un germe sur sa source; σ est une application convergente. [$f \sim g$ s'il existe $m \in M$ et un voisinage de m tels que $f|_y = g|_y$, alors \sim est une relation d'équivalence et une classe d'équivalence de \sim est appelée un germe en m]. On peut montrer que le groupoïde fondamental de F agit sur D et nous développerons un peu ce point ci-dessous. Enfin, en identifiant les éléments du groupoïde fondamental qui donnent la même action, on obtient le groupoïde d'holonomie G de (M, \mathcal{F}) . G est un groupoïde topologique de manière naturelle, en fait un groupoïde topologique localement trivial. C'est cette construction, ainsi que les résultats du §1, qui permettent le type d'application de l'analyse fonctionnelle à la géométrie différentielle que nous avons en tête.

Avant de considérer de telles applications, nous examinerons de plus près la notion d'holonomie.

Considérons une courbe C située dans le plan \mathbb{R}^2 comme montré sur la figure ci-dessous :



Supposons que C_1 ait pour coordonnées $(0, (0, \alpha_1))$ et C_2 ait pour coordonnées $(0, (0, \alpha_2))$, et que T_1 et T_2 soient perpendiculaires, et donc transverses, à \mathbb{R}^2 et passent respectivement par C_1 et C_2 .

Tout voisinage U de C dans \mathbb{R}^2 intersecte T_1 et T_2 dans les voisinages de C_1 et C_2 dans T_1 et T_2 respectivement, et induit donc un C^r -difféomorphisme $(x, (0, \alpha_1)) \mapsto (x, (0, \alpha_2))$ d'un voisinage de C_1 dans T_1 sur un voisinage de C_2 dans T_2 . De toute évidence, la même affirmation est vraie pour les transversales générales T_1 et T_2 , bien que le C^r -difféomorphisme requis soit alors plus compliqué à écrire.

Supposons maintenant, de manière générale, que $C : [0, 1] \rightarrow M$ soit un chemin situé dans une feuille l d'un feuilletage \mathcal{F} de M , et que T_0 et T_1 soient deux sous-variétés de M transverses à \mathcal{F} et contenant $z_0 = C(0)$ et $z_1 = C(1)$ (une sous-variété W est transverse à \mathcal{F} si, pour tout $z \in M$,

on a $T_z M = T_z W \oplus T_z L$, où L est la feuille passant par z et “ T_z ” désigne l’espace tangent en z). Alors, à chaque voisinage U de C dans M , correspond un C^r -difféomorphisme ϕ_C d’un voisinage de z_0 dans T_0 sur un voisinage de z_1 dans T_1 tel que :

- (i) Si ϕ_C est défini en $z \in T_0$, alors $\phi_C(z)$ appartient à $T_1 \cap$ la feuille contenant z .
- (ii) Le germe de ϕ_C en z_0 ne dépend ni de U ni du choix de C à homotopie près.

Pour construire ϕ_C , on procède comme suit. Considérons une suite de fonctions distinguées f_i , $i = 0, 1, 2, \dots, r$ définies sur des ouverts V_i et un ensemble ordonné de points t_i de $[0, 1]$ tels que $t_0 = 0, t_r = 1$ et $C([t_k, t_{k+1}]) \subset V_k$ pour $k = 0, \dots, r - 1$. Soit T^i , pour chaque i , une sous-variété transverse à \mathcal{F} contenant les points $C(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, r$, et tels que $T^0 = T_0, T^r = T_1$. Nous pouvons supposer que $F_i(C(t_i)) = 0$ et que f_i est de la forme $h_i \circ p_2 \circ x_i$, où x_i est une coordonnée locale distinguée, pour tout i . Pour chaque $i < r$, x_i porte la portion de la courbe C entre $C(t_i)$ et $C(t_{i+1})$, ainsi que U , sur une courbe dans \mathbb{R}^n située dans l’hyperplan \mathbb{R}^P essentiellement comme représenté ci-dessus, ainsi qu’un voisinage de cette courbe dans \mathbb{R}^n . Par conséquent, en appliquant x_i^{-1} au difféomorphisme décrit là, on voit que pour chaque $i < r$, il existe un C^r -difféomorphisme ϕ_i d’un voisinage de $C(t_i)$ dans T^i sur un voisinage de $C(t_{i+1})$ dans T^{i+1} tel que $\phi_i(z)$ appartienne à la feuille de $V_i \cap U$ passant par z pour tout z où $\phi_i(z)$ est défini. Alors ϕ_C est simplement le composé $\phi_{r-1} \circ \phi_{r-2} \circ \dots \circ \phi_1 \circ \phi_0$, et il est clair d’après les énoncés (i) et (ii) que le groupoïde fondamental de F agit sur D , comme requis.

Au moyen de résultats généraux de [5], des mesures de Haar existent sur le groupoïde d’holonomie G , même s’il n’est pas de Hausdorff en général. Une construction géométrique naturelle d’une mesure de Haar sur G se trouve dans [3].

À ce jour, la plupart des résultats obtenus concernent la structure idéale de $C^*(G)$ ou plutôt la structure idéale de la C^* -algèbre réduite $C^*(G)/k$, où k désigne le noyau des représentations régulières de $C^*(G)$. Il est important de savoir si toutes les feuilles de \mathcal{F} sont denses dans M , et nous avons les critères suivants.

Théorème (Fack et Skandalis [3]). $C^*(G)/k$ est simple (c’est-à-dire qu’elle ne possède pas d’idéaux bilatères fermés non triviaux) si et seulement si chaque feuille de \mathcal{F} est dense dans M .

Une C^* -algèbre A est dite primitive si elle possède une représentation irréductible fidèle sur une C^* -algèbre $\beta(H)$ (c’est-à-dire un \star -homomorphisme $A \rightarrow \beta(H) =$ les opérateurs linéaires bornés sur l’espace de Hilbert H).

Théorème (Fack et Skandalis [3]). $C^*(G)/k$ est primitif si et seulement si au moins une feuille de \mathcal{F} est dense dans M .

Je n’ai abordé ici qu’une petite partie du cercle d’idées impliquées dans ce sujet, un sujet qui englobe les mesures transversales sur les feuilletages, la généralisation par Connes du théorème de l’indice d’Atiyah-Singer, l’intégration non commutative en général, pour ne citer que quelques sujets. Il n’existe pas encore, à ma connaissance, de compte rendu général de ce matériau, et le lecteur intéressé devra consulter [2] et les articles/prépublications ultérieurs. Il existe cependant un compte

rendu détaillé de certains aspects de la théorie de la mesure de [2] dans l'article de Daniel Kastler "On A. Connes Non-Commutative Integration Theory", *Commun. Math. Phys.* 85 (1982) 99-120.

Références

1. H. Blaine Lawson, Foliations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (3) (1974) 369-418.
2. A. Connes, Sur la théorie non-commutative de l'intégration, Springer Lecture Notes in Math., 725 (1979) 19-143.
3. T. Fack, G. Skandalis, Sur les représentations et idéaux de la C^* -algèbre d'un feuilletage, *J. Operator Theory*, 8 (1982) 95-129.
4. A. Haefliger, Variétés feuilletées, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, 16 (1952) 367-397.
5. J. Renault, A Groupoid Approach to C^* -Algebras, Springer Lecture Notes in Math., 793 (1980).
6. A.K. Seda, Haar Measures for Groupoids, *Proc. Roy. Irish Acad.*, 76(A) (1975) 23-36.
7. A.K. Seda, Banach Bundles of Continuous Functions and an Integral Representation Theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 270 (1) (1982) 327-332.

Département de Mathématiques,
University College,
Cork.