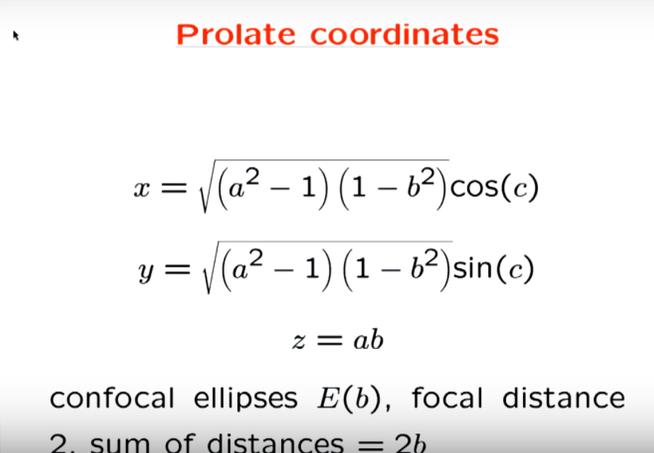


## Opérateur d'onde prolata infrarouge et ultraviolet pour zeta

Alain Connes

Merci beaucoup pour votre invitation et pour cette occasion de participer à cette grande conférence, qui est un hommage à Krzysztof Gawedzki qui était un merveilleux mathématicien et physicien.

Et ce que je souhaite expliquer, c'est un lien surprenant entre la physique, quand je parle de physique, je veux dire que je vais parler du sphéroïde prolata qui est un ellipsoïde mais vous pouvez le considérer comme un volume en dimension trois, je veux dire qu'il est plein, entre ce volume donc, et la fonction zeta de Riemann. Et quand vous regardez les zéros de la fonction zeta de Riemann, quand vous en dessinez le graphe, ce que vous trouvez bien sûr, c'est une très forte similarité avec ce que serait, si vous voulez, le spectre d'un opérateur de Dirac. Et quand vous pensez aux zéros de façon spectrale, vous trouvez qu'il y a deux régimes qui doivent être compris, si vous voulez : il y a le régime ultraviolet, dans lequel la fonction de comptage des zéros de la fonction zeta de Riemann est une fonction très étrange : elle est donnée par une formule que l'on doit à Riemann et qui est cette formule dans laquelle vous avez, si vous voulez, un terme de la forme  $E$  sur  $2\pi$  fois  $\log$  de  $E$  sur  $2\pi$  moins  $E$  sur  $2\pi$  et alors, il y a un écart logarithmique qui advient. Donc, ça, c'est pour la partie ultraviolette. Et pour la partie infrarouge, ce que vous obtenez est vraiment surprenant parce que le premier zéro est aux alentours de 14 et quelques, et alors, ok, les zéros se comportent d'une manière très précise que l'on doit comprendre. Et ce qu'on va voir, c'est qu'à la fois dans l'ultraviolet et dans l'infrarouge, le sphéroïde prolata va jouer un rôle crucial.



**Prolate coordinates**

$$x = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)} \cos(c)$$
$$y = \sqrt{(a^2 - 1)(1 - b^2)} \sin(c)$$
$$z = ab$$

confocal ellipses  $E(b)$ , focal distance  
2, sum of distances =  $2b$

FIGURE 1

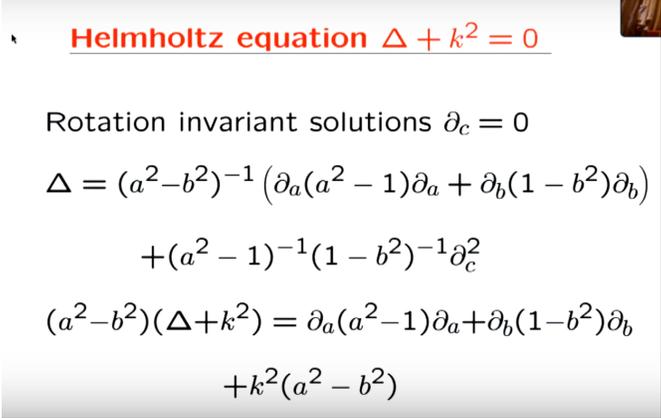
Donc je vais parler de deux papiers, écrits en collaboration, très récents, l'un qui a été publié dans les Proceedings de l'Académie des sciences, avec Henri Moscovici, sur le spectre prolata ultraviolet, et le second, en collaboration avec Katia Consani, et qui considère cette fois le comportement infrarouge.

Ok, donc on verra des résultats assez précis, mais d'une manière ou d'une autre, commençons par la physique. Commençons à partir du sphéroïde prolata. Donc si vous voulez, le sphéroïde prolata

---

Transcription de la vidéo derrière ce lien <https://www.youtube-nocookie.com/embed/Yfu9fM-jzQ>, Denise Vella-Chemla, janvier 2025.

est compris au moyen d'un système spécifique de coordonnées qu'on appelle les coordonnées prolate et quand vous les regardez, ces coordonnées ont l'air un peu étranges. Je veux dire que ce sont ces coordonnées  $a, b, c$  (voir Fig. 1).  $c$  est une coordonnée évidente à cause de, si vous voulez, l'invariance de rotation du sphéroïde. Mais les autres, je veux dire le terme que l'on voit devant le cosinus et le sinus pour  $x$  et  $y$  semble très étrange. Si vous y pensez un peu, ce que vous trouverez c'est qu'en fait, il décrit une famille d'ellipses confocales donc ça ressemble à ça ; vraiment ce que vous avez est là : vous avez deux points focaux ; vous en avez un qui est le point  $(0,0,1)$  et l'autre qui est le point  $(0,0,-1)$  ; ils sont donc tous les deux sur l'axe des  $z$  si vous voulez, et le paramètre  $b$  qui apparaît dans les coordonnées est en fait là pour vérifier que  $2b$  est la somme de la distance entre les points focaux. Vous savez qu'une ellipse est définie par le fait que la somme des distances aux deux points focaux est constante et que cette constante est  $2b$ . Donc c'est le rôle du paramètre  $b$  et le paramètre  $a$  est juste un paramètre angulaire. Donc ce qui se passe alors, c'est la chose suivante : ce qui se passe, c'est que quand vous calculez le Laplacien en ces coordonnées, le Laplacien ordinaire ok, vous trouvez une expression qui alors vous permettra de gérer l'équation de Helmholtz pour le sphéroïde en dimension 3, le sphéroïde prolate (on l'appelle prolate parce qu'il est allongé dans la direction de l'axe de symétrie).



**Helmholtz equation  $\Delta + k^2 = 0$**

Rotation invariant solutions  $\partial_c = 0$

$$\Delta = (a^2 - b^2)^{-1} (\partial_a(a^2 - 1)\partial_a + \partial_b(1 - b^2)\partial_b)$$

$$+ (a^2 - 1)^{-1}(1 - b^2)^{-1}\partial_c^2$$

$$(a^2 - b^2)(\Delta + k^2) = \partial_a(a^2 - 1)\partial_a + \partial_b(1 - b^2)\partial_b$$

$$+ k^2(a^2 - b^2)$$

FIGURE 2

Ok, donc je veux dire que quand vous regardez le Laplacien, il a cette forme, ok, et si vous regardez les solutions invariantes par rotation, les choses se simplifient un peu parce que vous avez la différentielle par rapport à la variable  $c$ , la variable angulaire  $c$ , qui est nulle, et alors, ce que vous obtenez quand vous écrivez l'équation de Helmholtz, vous trouvez qu'il y a ce qu'on appelle une séparation de variables ; notamment, l'équation se sépare si vous voulez en une somme de deux termes, un dans lequel n'intervient que la variable  $a$ , et l'autre dans lequel n'intervient que la variable  $b$ . Et quand vous regardez cela d'un petit peu plus près, ce que vous trouvez c'est qu'en fait, pour résoudre l'équation de Helmholtz, qu'est-ce que vous devez faire ? Vous devez résoudre à la fois l'équation angulaire et l'équation radiale. Donc comme équations, comme équations différentielles, elles sont identiques, mais les variables que vous utilisez sont les variables  $a$  et  $b$  et la variable  $a$  est comprise entre -1 et 1. C'est si vous voulez la partie angulaire. Et la variable  $b$  est plus grande que 1, elle va jusqu'à l'infini, et c'est la partie radiale. Maintenant, à quoi ressemblent les solutions, elles sont produit de deux fonctions, une fonction qui ne dépend que de  $a$  et une fonction qui ne dépend que de  $b$ , par exemple  $\phi(a)$  et  $\psi(b)$ , mais elles doivent être, si vous voulez, vecteurs propres pour la même valeur propre pour l'équation différentielle. Et c'est parce qu'elles le sont pour la

même valeur propre, si vous voulez, que les termes vont s'annuler et qu'elles vous donneront une solution de l'équation de Helmholtz.

### Separation of variables

Angular equation = Radial equation, but the variables have domain  $[-1, 1]$  for the angular part and  $[1, \infty)$  for the radial part. Solution  $\phi(a)\psi(b)$  with same eigenvalue and  $\psi = 0$  on boundary.

FIGURE 3

De plus, bien sûr, puisque vous voulez avoir une condition de Dirichlet au bord, vous devez avoir que  $\psi(b) = 0$ .

Donc ce qui se passe, en fait, peut être énoncé comme ça, si vous voulez : c'est qu'il y a un opérateur, un opérateur différentiel du second ordre, qui provient de ce Laplacien et qui a la forme suivante modulo une mise à l'échelle facile qui est un changement de variables ; cet opérateur, on l'appellera  $W_\lambda$  car il dépend du paramètre  $\lambda$  ;  $\lambda$  est relié à  $k$  par une équation très simple :  $k = 2\pi\lambda^2$ , et l'opérateur  $W_\lambda$  ressemble à ça : c'est une différentiation fois lambda au carré moins  $x$  au carré fois une différentiation plus un terme additionnel qui est  $(2\pi\lambda x)^2$ , ok.

### Prolate spheroidal operator

The second order operator  $W_\lambda$  appears from separation of variables in the Laplacian  $\Delta$  for the prolate spheroid :

$$W_\lambda := -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$$

$$(k = 2\pi\lambda^2)$$

FIGURE 4

Maintenant, cet opérateur a été utilisé d'une manière assez remarquable par Slepian et ses collaborateurs, qui travaillaient aux laboratoires Bell et je reviendrai ultérieurement à leur motivation, quand je traiterai le problème de l'infrarouge. Mais en quelque sorte, leur découverte principale, qui est décrite dans plusieurs articles, est la suivante : c'est qu'en fait, cet opérateur différentiel commute avec ce qu'on appelle la transformation de Fourier tronquée. Et pour comprendre cela, je veux dire c'est un peu surprenant parce que ce que vous devez comprendre en quelque sorte,

c'est que ces opérateurs différentiels, le premier que j'ai montré précédemment, le  $W_\lambda$ , en fait, commute avec un opérateur de projection. Donc cela semble très étrange parce que vous connaissez l'opérateur de projection sur l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ , c'est une fonction qui est discontinue, je veux dire qu'elle prend la valeur 1 entre  $-\lambda$  et  $\lambda$  et elle prend la valeur 0 partout ailleurs, donc je veux dire qu'au premier abord, il semble très étrange que l'opérateur différentiel puisse commuter avec une telle fonction, mais si vous y pensez un peu plus avant, vous trouverez qu'en fait, ça n'est pas si surprenant parce que le cas le plus simple à considérer serait seulement celui de l'opérateur  $x\partial_x$  et il suffit de comprendre qu'il commute avec la projection sur des fonctions qui ont leur support sur les entiers positifs.

### Commutation with projection operator

- ▶  $x\partial_x$  commutes with  $1_{[0, \infty]}$
- ▶  $(\lambda^2 - x^2)\partial_x$  commutes with  $1_{[-\lambda, \lambda]}$
- ▶  $\partial_x(\lambda^2 - x^2)\partial_x$  commutes with  $1_{[-\lambda, \lambda]}$

FIGURE 5

Maintenant, pourquoi est-ce que cela est évident ?

C'est évident, si vous voulez, parce que l'opérateur  $x\partial_x$  engendre le semi-groupe du groupe des opérateurs de mise à l'échelle, le groupe qui remplace une fonction  $f$  de  $x$  par  $f(\lambda x)$  et donc, je veux dire, de façon évidente vous savez, pour  $\lambda$  positif, bien sûr. Donc évidemment qu'il préserve les fonctions qui ont leur support dans  $[0, \infty)$  et il commute avec cette projection.

Donc en fait, ce qui se passe, c'est que le premier morceau de l'opérateur qui est  $\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x)$  commute avec  $(2\pi\lambda x)^2$  (il commute bien sûr avec la multiplication par une fonction). Donc ce qui se passe, c'est que non seulement cet opérateur commute avec  $P_\lambda$  mais en fait, un calcul direct vous montre qu'il commute avec la transformation de Fourier, ça n'est pas difficile à voir je veux dire, il y a une partie de l'opérateur qui est l'oscillateur harmonique, qui commute avec la transformation de Fourier. Donc il commute avec la transformation de Fourier, et parce qu'il commute avec la transformation de Fourier *et* avec la projection  $P_\lambda$ , il commute également avec la transformée de Fourier de  $P_\lambda$ . Notamment, si vous voulez, il commute avec l'opérateur  $\widehat{P}_\lambda$ , qui est obtenu en conjuguant  $P_\lambda$  par la transformation de Fourier. Donc, c'est ce que Slepian et ses collaborateurs ont découvert, et je veux dire que dans les années 90, quand j'ai commencé à m'intéresser aux zéros de zeta, ce que j'ai trouvé, j'avais utilisé cette projection  $P_\lambda$  et  $\widehat{P}_\lambda$  pour faire un cutoff. Et en fait, dans mon cours en 98, j'avais traité le problème de la façon d'utiliser cet opérateur  $W_\lambda$ , qui est normalement seulement traité dans l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ , dans lequel il est auto-adjoint, comme on peut le voir facilement, la manière d'utiliser cet opérateur, donc, sur la droite des réels complète.

### Commutation with $P_\lambda$ and $\widehat{P}_\lambda$

- The operator

$$W_\lambda := -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$$

is invariant under Fourier transform  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ .

- $W_\lambda$  commutes with  $P_\lambda$  and  $\widehat{P}_\lambda =$  conjugate by  $\mathbb{F}_{e_{\mathbb{R}}}$ .

FIGURE 6

Et quand on l'utilise sur la totalité de la droite réelle, donc ce que j'avais trouvé à cette époque, je veux dire en 98, c'était que si vous prenez pour domaine minimal de cet opérateur l'espace de Schwartz des fonctions de Schwartz qui ont une décroissance rapide, elles et leurs dérivées, alors vous trouvez que l'opérateur est symétrique, bien sûr, mais il n'est pas auto-adjoint, et en fait, il a des indices de déficiences au sens de von Neumann, qui sont tous les deux égaux à 4. Et il a en fait une unique extension auto-adjointe  $W_\lambda$  qui doit respecter la contrainte de commuter avec la projection  $P_\lambda$  et avec  $\widehat{P}_\lambda$ . C'est là que je me suis arrêté en 98, et c'est de là que nous sommes repartis, il y a 2 ans avec Henri Moscovici, et que nous avons commencé notre collaboration. Et nous avons fait quelque chose que je n'avais pas osé faire en 98, principalement nous avons vraiment regardé précisément l'opérateur  $W_\lambda$  spectralement.

Et ce que je vous expliquerai maintenant c'est que si vous voulez, quand vous regardez cet opérateur  $W_\lambda$  spectralement, qu'est-ce que vous trouvez ? Bon, bien sûr, vous trouvez qu'il commute avec Fourier mais il est en quelque sorte presque construit ainsi de manière ad hoc, mais à notre grande surprise avec Henri, ce qu'on a trouvé, c'est que l'opérateur auto-adjoint  $W_\lambda$ , sur la droite réelle complète maintenant, pas seulement dans l'intervalle  $[-\lambda, \lambda]$ , a un spectre discret.

### Self-adjoint extension

- The minimal domain is the Schwartz space  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

- The deficiency indices are (4,4).

- Unique self-adjoint extension  $W_\lambda$  commuting with  $P_\lambda$  and  $\widehat{P}_\lambda$ .

FIGURE 7

Et ce que j'expliquerai ultérieurement, c'est que ce spectre discret s'adaptera parfaitement au comportement ultraviolet des zéros de zeta. Et ce qui se passe, c'est qu'apparemment, personne n'a

regardé ce spectre parce que ce spectre s'avère avoir à la fois une partie positive et une partie négative. Et la raison pour laquelle les gens ne se sont intéressés qu'à la partie positive du spectre, c'est qu'ils voulaient s'adapter à la séparation des variables et qu'ils voulaient correspondre au spectre qui correspond à l'intervalle et qui est positif par construction. Donc personne ne regardait la partie négative du spectre, et comme nous le verrons, je veux dire, très grossièrement, la partie positive du spectre correspondra aux zéros triviaux et la partie négative correspondra maintenant aux zéros non triviaux et au comportement ultraviolet des zéros, il ne donne pas les positions exactes des zéros mais il donne le comportement ultraviolet.

- ▶  $W_\lambda$  commutes with Fourier
- ▶ The selfadjoint operator  $W_\lambda$  has discrete spectrum.
- ▶  $\phi$  eigenfunction of  $W_\lambda \Rightarrow$ 

$$\phi(x) \sim c \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}, \quad x \rightarrow \infty$$
if  $\phi$  is even and  $\frac{\cos(2\pi\lambda x)}{x}$  if  $\phi$  is odd.

FIGURE 8

Donc, je veux dire, pour trouver l'extension auto-adjointe, on doit donner une condition aux bornes à l'infini, et la condition aux bornes à l'infini est en fait la contrainte, si vous voulez, que quand vous regardez la partie paire du spectre, donc la fonction paire, qui est celle à laquelle nous nous restreindrons, alors la fonction doit se comporter comme un sinus, elle doit avoir ce comportement oscillant d'avoir beaucoup de zéros bien sûr, lorsqu'on va vers l'infini et être équivalente à  $\frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers l'infini. Dans le cas impair, vous devez remplacer le sinus par un cosinus.

**Semiclassical approximation**

$$H_\lambda(p, q) = (p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$$

$$W_\lambda = -4\pi^2 H_\lambda + 4\pi^2 \lambda^4$$

$$\Omega_\lambda(E) := \{(q, p) \mid q \geq \lambda, p \geq \lambda, H_\lambda(p, q) \leq a\}$$

$$a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2$$

FIGURE 9

Ok. Donc si vous voulez comprendre le spectre de cet opérateur comme un physicien par exemple, il est très naturel de regarder l'approximation semi-classique, et d'exprimer l'opérateur  $W_\lambda$  en fonction d'un hamiltonien que vous écrivez classiquement parce que, ok, à ce stade, vous ne vous préoccupez pas de la non-commutativité de  $p$  et  $q$  ; donc ce que vous écrivez, c'est que  $W_\lambda$  est en fait exprimé par  $-4\pi^2 H_\lambda$  où  $H_\lambda$  est écrit ci-dessus, c'est  $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2) + \text{Cte}$ , le plus constante n'étant pas important. Et alors, quand vous voulez regarder le comportement du spectre, vous devez calculer l'aire d'une surface et en calculant cette aire, si vous voulez, l'aire qui est bornée par la valeur de  $H_\lambda$ , en calculant cette aire, en fait, vous pourrez estimer le nombre de valeurs propres de l'opérateur. Et quand vous faites ça, ok, vous trouvez cette image :

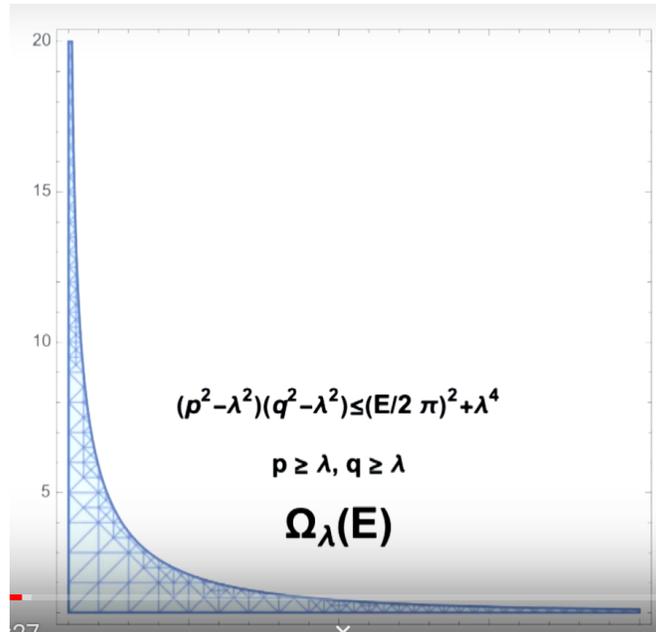


FIGURE 10

Donc vous trouvez une image dans laquelle, si vous voulez, la chose qui ressemble à une hyperbole est définie par la manière dont  $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$  égale  $(E/(2\pi)^2 + \lambda^4)$ , ok, et également, on a ces deux conditions que  $p > \lambda$  et  $q > \lambda$  ; c'est à cause de la positivité de l'opérateur. Ok, c'est donc ce que vous avez, et vous faites le calcul de l'aire, ok.

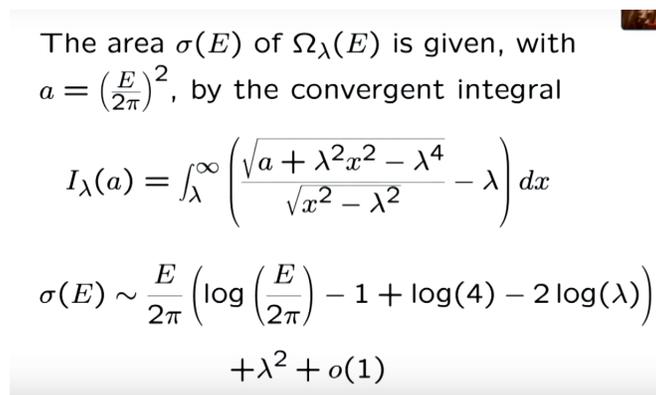


FIGURE 11

J'ai effectué ce calcul difficile donc on obtient une intégrale de  $\lambda$  à l'infini d'une certaine racine carrée et etc, et ce que vous trouvez, c'est que cette intégrale a son résultat qui est donné par des intégrales elliptiques, non pas par des fonctions elliptiques, mais par des intégrales elliptiques, au sens de Legendre. Et alors, quand vous les développez avec l'idée correcte que l'opérateur en question ne sera pas l'opérateur de Dirac mais qu'il sera plutôt comme le laplacien, donc vous travaillez avec le carré de l'opérateur de Dirac, et alors, vous trouvez de façon surprenante que la formule que vous obtenez pour le nombre des valeurs propres commence à sacrément ressembler à la formule de Riemann. C'est  $\frac{E}{2\pi} (\log \frac{E}{2\pi})$  moins un terme d'ordre 1, donc vous devez adapter le  $\lambda$ , de façon à ce que ça fasse  $-1$ , et ensuite, plus  $\lambda^2$  plus un petit  $o(1)$ .

Ok. D'un autre côté, on sait que lorsqu'on effectue une approximation semi-classique, on doit faire très attention au fait que cela nous permet de nous faire une première idée, mais qu'il nous faut travailler beaucoup plus pour vraiment obtenir une estimation, et on peut voir que, vous savez, cela ne pourrait pas être complètement correct de cette manière parce qu'on n'obtient pas le terme en  $O(\log E)$ .

Donc en fait, on doit pousser l'analyse beaucoup plus loin,

In fact one has

$$I_\lambda(a) = \lambda^2 I_1(a \lambda^{-4})$$

and in terms of elliptic integrals

$$\begin{aligned} I_1(a) &= aK(1-a) - E(1-a) + 1 \\ &\sim \frac{1}{2} \sqrt{a} (\log(a) - 2 + 2 \log(4)) + 1 + o(1) \end{aligned}$$

FIGURE 12

et ok, donc ça, c'est facile

## Liouville transform

$$V(f)(y) := \Lambda^{1/2} f(\Lambda \cosh(y)) \sinh(y)^{1/2}$$

The operator  $V$  is a unitary isomorphism  $V : L^2([\Lambda, \infty)) \rightarrow L^2([0, \infty))$  which conjugates the operator  $W$  with the operator

$$S(\phi)(y) := \partial_y^2 \phi(y) - Q(y) \phi(y)$$

$$Q(y) = -(2\pi\Lambda^2)^2 \cosh(y)^2 - \frac{1}{4} (\coth^2(y) - 2)$$

FIGURE 13

Donc ce qu'on doit faire, avant tout, on doit effectuer une transformation de Liouville pour transformer l'opérateur, cet opérateur prolate, en un opérateur de Sturm-Liouville usuel, si vous voulez, et ce faisant, on obtient un potentiel qui est très difficile à comprendre, parce qu'il n'est ni positif ni négatif. Vous obtenez cet étrange potentiel  $Q(y)$  et alors

**Hamiltonian  $H = p^2 + Q(q)$**

(i) The Hamiltonian  $H = -S$  is in the limit circle case at  $\infty$ .  
(ii) The Hamiltonian  $H$  is in the limit circle case at 0.  
Case  $\Lambda = \sqrt{2}$  we get for the function  $h = -Q$

$$h(y) = 16\pi^2 \cosh^2(y) + \frac{1}{4}(\coth^2(y) - 2)$$

M. Nursultanov, G. Rozenblum, *Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator with potential having a strong local negative singularity*. *Opuscula Mathematica* 37(1) :109

FIGURE 14

vous devez appliquer cet hamiltonien maintenant, qui est vous savez de force  $p^2$  parce que vous le mettez sous cette forme, ok, et il a ce potentiel, et alors, on doit appliquer des estimées assez difficiles sur les valeurs propres asymptotiques à partir de l'opérateur de Sturm-Liouville. Bon, pour le potentiel qui avait, si vous voulez, une singularité.

Donc je veux dire, ces estimées existent, vous faites les calculs, et quand vous faites les calculs, ce que vous obtenez

*Eigenvalue asymptotics for the Sturm-Liouville operator...* 113

---

$h(p(\mu)) = \mu$ , are

$$N(H, (0, \lambda)) = \pi^{-1} \int_0^\infty [(\lambda + h(x))^{\frac{1}{2}} - h(x)^{\frac{1}{2}}] dx + O(1), \lambda > 0, \quad (1.4)$$

$$N(H, (-\mu, 0)) = \pi^{-1} \int_0^{p(\mu)} h(x)^{\frac{1}{2}} dx + \pi^{-1} \int_{p(\mu)}^\infty [h(x)^{\frac{1}{2}} - (h(x) - \mu)^{\frac{1}{2}}] dx + O(1). \quad (1.5)$$

FIGURE 15

donc il y a des formules, si vous voulez, pour chaque variable, qui existent pour calculer ce nombre de valeurs propres, et quand vous effectuez ces calculs

## Formula for $N(a)$

$$N(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((a + h(y))^{1/2} - h(y)^{1/2}) dy$$

At the level of the Dirac operator one has  $a = (E/2)^2$

$$N_D(E) = \frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi} + O(\log(E))$$

The logarithmic term is  $-\frac{1}{2\pi} \log E$ . The numerical value of the coefficient is 0.159155 which is of the same order as the constant involved in the estimate of Trudgian for Zeta

$$|N_\zeta(E) - \left(\frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi} - \frac{E}{2\pi}\right)| \leq 0.112 \log(E) + O(\log \log E)$$

FIGURE 16

ce que vous trouvez maintenant, ce sont des intégrales beaucoup plus compliquées. Pourtant, le fait surprenant est que vous trouvez la formule correcte  $\frac{E}{2\pi} \left(\log \frac{E}{2\pi}\right) - \frac{E}{2\pi}$  mais vous trouvez qu'il y a un terme additionnel en  $O(\log E)$  comme vous vous y attendez. Et quand vous le calculez, vous trouvez que le terme relatif est en fait  $\frac{-1}{2\pi} \log E$ . Et quand vous regardez la valeur numérique de ce coefficient, vous trouvez qu'il est du même ordre que la constante qui est le 1 de la formule de Riemann pour la fonction zeta pour la différence entre la formule de Riemann et quelque chose en  $o(1)$ <sup>1</sup>.

Donc, il y a ce fait très alléchant et alors, bien sûr, vous savez, ce n'était pas parce que je prenais le laplacien

## Dirac operator

- We found Dirac operator, with square two copies of  $W_\lambda$ , using the Darboux method.
- We explore associated geometry.

FIGURE 17

donc on devait trouver l'opérateur de Dirac, on devait trouver la sorte de racine carrée, si vous voulez, la sorte de racine carrée de l'opérateur de Dirac de cet opérateur sphéroïdal prolata. Et alors, on voulait explorer la géométrie associée.

Alors, comment avons-nous trouvé l'opérateur de Dirac de la racine carrée, si vous voulez, de cet opérateur sphéroïdal prolata. Bien, on l'a fait en utilisant la méthode de Darboux.

---

<sup>1</sup>à revoir ?

### Darboux method

$$\begin{aligned}p(x) &= x^2 - \lambda^2, \quad V(x) = 4\pi^2\lambda^2x^2, \quad W_\lambda = \partial(p(x)\partial) + V(x), \\U &: L^2([\lambda, \infty), dx) \rightarrow L^2([\lambda, \infty), p(x)^{-1/2}dx) \\U(\xi)(x) &:= p(x)^{1/4}\xi(x), \quad (\delta f)(x) := p(x)^{1/2}\partial f(x) \\ \delta w(x) + w(x)^2 &= -V(x) + \left( \frac{p''(x)}{4} - \frac{p'(x)^2}{16p(x)} \right), \quad \forall x \in [\lambda, \infty)\end{aligned}$$

$$W_\lambda = U^* (\delta + w)(\delta - w) U$$

FIGURE 18

La méthode de Darboux est une méthode très générale qui est assez ancienne et qui permet lorsque vous avez un opérateur du second ordre de l'écrire non pas comme un carré, mais comme un produit de quelque chose de la forme de l'opérateur d'ordre un plus  $W$  et l'opérateur d'ordre un, le même opérateur d'ordre un moins  $W$ . Donc on peut faire ça, mais pour faire ça, il fallait qu'on résolve une équation de Riccati. Donc on devait trouver une solution d'une équation non-linéaire qui est  $\delta W + W^2$  égale une certaine fonction du potentiel, qui vous est donné depuis le début. Et on peut le faire dans notre cas, parce que ce qu'on doit faire, c'est trouver la solution de l'opérateur prolate qui ne s'évanouit pas.

### Solution of Riccati equation

For  $z \in \mathbb{C}$  and  $u = u_1 + zu_2$  the solution  $u$  has no zero in  $(\lambda, \infty)$  if  $z \notin \mathbb{R}$  and an infinity of zeros otherwise.

Solutions of the Riccati equation

$$w_z(x) = \frac{(x^2 - \lambda^2)^{1/4} \partial \left( (x^2 - \lambda^2)^{1/4} u(x) \right)}{u(x)}$$

where  $u = u_1 + zu_2$  and  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

FIGURE 19

Maintenant, bien sûr, comme je vous l'ai montré, je veux dire, les solutions ordinaires s'évanouissent, mais quand vous combinez deux solutions indépendantes avec des coefficients complexes, alors vous trouvez qu'elles ne s'évanouissent nulle part.

Donc quand la combinaison ne s'évanouit nulle part, ce que vous pouvez faire consiste à résoudre l'équation de Riccati par une sorte de dérivée logarithmique que j'ai notée comme ça  $w_z(x)$  et pour chaque nombre complexe qui n'est pas dans les réels, vous trouvez une solution de l'équation de Riccati et vous trouvez l'opérateur de Dirac correspondant.

## Dirac operator

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \delta + w(x) \\ \delta - w(x) & 0 \end{pmatrix}$$

Then the square of  $D$  is diagonal with each diagonal term spectrally equivalent to  $W_\lambda$ ,

$$U^* D^2 U = \begin{pmatrix} W_\lambda & 0 \\ 0 & W_\lambda + 2\delta w(x) \end{pmatrix}$$

FIGURE 20

Et tous ces opérateurs de Dirac sont isospectraux, ce qui signifie que vous vous moquez duquel choisir pour considérer son spectre. Donc je veux dire, voici ce qu'on a trouvé, on a trouvé l'opérateur de Dirac, et quand on l'élève au carré, c'est bien sûr une matrice  $2 \times 2$  parce qu'il agit un peu comme des spineurs, ok, donc c'est une matrice  $2 \times 2$  et quand vous l'élevez au carré, vous trouvez deux copies de l'opérateur prolate, notamment en premier l'opérateur prolate lui-même et ensuite, quelque chose qui est isospectral à l'opérateur prolate, ok (dont il diffère par une paire d'opérateurs prolate).

Donc, c'est ce que nous avons trouvé, et alors, si vous voulez, par les précédents calculs, à cause, bien sûr, de cet opérateur de Dirac ayant son carré qui est deux copies de l'opérateur prolate, vous pouvez calculer son spectre, vous pouvez calculer le nombre de valeurs propres, et alors vous trouvez, pour celui-là, vous trouvez exactement l'estimation correcte pour le nombre de valeurs propres.

Et je vous montrerai très rapidement comment vous faites les calculs concrets et comment vous les comparez aux zéros de zeta.

## Ultraviolet $\sim$ Zeta

The operator  $2D$  has discrete simple spectrum contained in  $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ . Its imaginary eigenvalues are symmetric under complex conjugation and the counting function  $N(E)$  counting those of positive imaginary part less than  $E$  fulfills

$$N(E) \sim \frac{E}{2\pi} \left( \log \left( \frac{E}{2\pi} \right) - 1 \right) + O(\log E)$$

FIGURE 21

Mais comment on fait ça, ok ? On fait ça, si vous voulez, en calculant les valeurs négatives de l'opérateur prolate, et en calculant ces valeurs propres : ce que vous faites si vous voulez, vous développez la solution qui satisfait une condition aux bornes égale à  $\lambda$ , et vous développez la solution pour la valeur propre qui vaut  $-65$  et vous développez la solution qui satisfait la condition aux bornes à l'infini. Et vous essayez de les faire coïncider, bien sûr ici, elles ne coïncident pas, mais vous faites varier la valeur  $-65$ , et vous continuez, ok, vous pouvez voir par exemple que sur  $-38$ , ça coïncide, excepté qu'il y a un changement de signe mais bien sûr, on ne le voit pas puisqu'on peut toujours multiplier l'une des deux par  $-1$ , donc on a une valeur propre à  $-38$  pour  $W_\lambda$  et le fait qu'elles soient de signes opposés vous dit que la fonction sera son opposée quand vous effectuerez la transformation de Fourier.

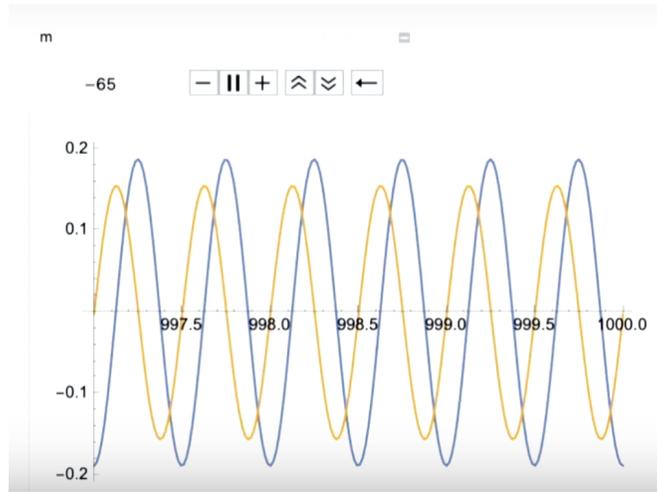


FIGURE 22

Maintenant, pour la valeur  $-93$ , vous pouvez voir qu'il y a une coïncidence exacte et cette fois, la fonction sera sa propre transformée de Fourier. Donc vous continuez comme ça, vous continuez,  $-150$ , c'est la suivante, les deux sinusoides, si vous voulez, les deux parties oscillantes, elles bougent l'une par rapport à l'autre, donc au bout d'un moment, elles coïncident ou bien elles sont en opposition de phase.

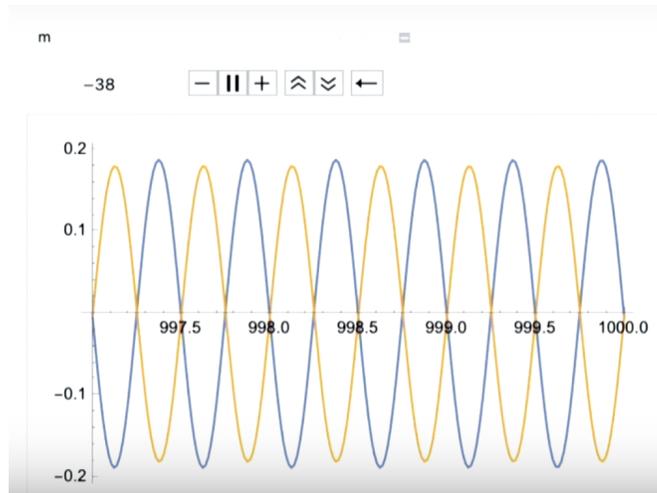


FIGURE 23

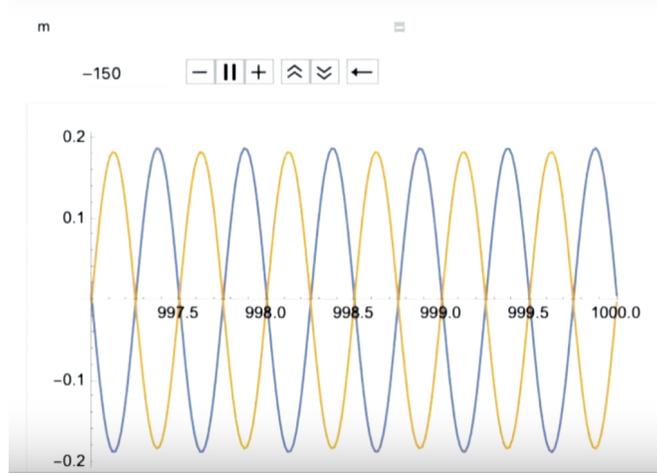


FIGURE 24

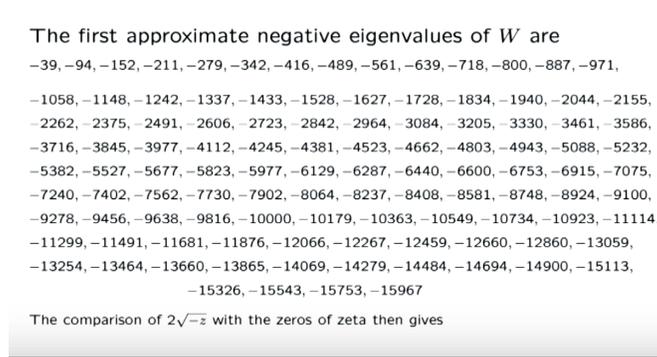


FIGURE 25

Donc vous calculez comme ça les premières valeurs propres négatives de  $W$ , vous en dessinez le graphe, ok, c'est beaucoup de travail, et maintenant, ok, vous passez à l'opérateur de Dirac correspondant et vous le comparez avec les zéros de zeta. Donc vous voyez, le premier zéro est 12.49 au lieu de 14, yeah, et vous continuez comme ça, vous les comparez, et à chaque fois, le  $n^{\text{ième}}$  zéro de votre fonction est très proche du  $n^{\text{ième}}$  zéro de zeta, vous ne changez pas d'indice, non, le  $n^{\text{ième}}$  d'un côté correspond au  $n^{\text{ième}}$  de l'autre. Donc vous continuez et quand vous dessinez les deux graphes, les points rouges représentent les zéros de zeta et les points bleus représentent ce que nous avons obtenu spectralement et quand vous voyez une seule couleur, c'est que l'un cache l'autre, i.e. ils sont vraiment très très proches l'un de l'autre.

102.098	101.318
104.365	103.726
106.621	105.447
108.885	107.169
111.068	111.03
113.225	111.875
115.412	114.32
117.661	116.227
119.766	118.791
121.918	121.37
124.016	122.947
126.127	124.257
128.25	127.517
130.307	129.579
132.378	131.088
134.507	133.498
136.558	134.757
138.607	138.116
140.613	139.736
142.66	141.124
144.665	143.112
146.724	146.001
148.688	147.423
150.692	150.054
152.617	150.925
154.622	153.025
156.576	156.113
158.581	157.598
160.499	158.85
162.481	161.189

FIGURE 26

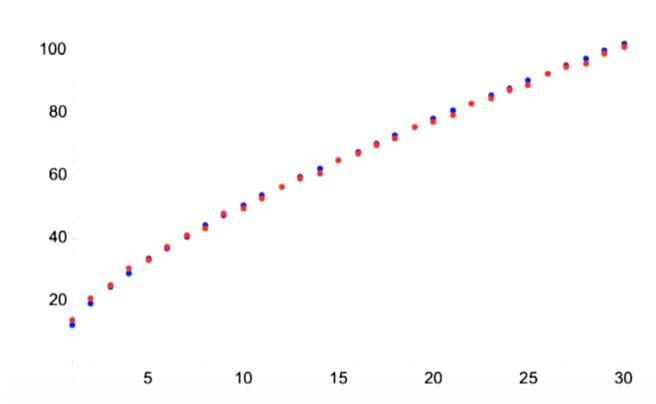


FIGURE 27

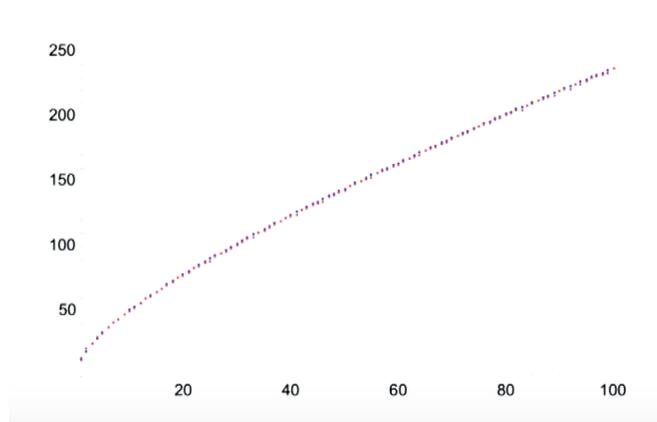


FIGURE 28

## Geometry = spectral triple

The metric associated to the spectral triple is

$$ds^2 = -\frac{1}{4}dx^2/(x^2 - \lambda^2) = \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$$

Geometry is compactification of 2D-Black Hole space with periodic  $t$

$$ds^2 = -\alpha(x)dt^2 + \frac{1}{\alpha(x)}dx^2$$

FIGURE 29

Donc on a continué jusqu'aux 60 premières valeurs propres, jusqu'aux 100 premières valeurs propres, et etc. Et bien sûr, donc cela dit vraiment que l'opérateur auto-adjoint,  $W_\lambda$ , parce que je veux dire, rappelez-vous, ok, je veux dire que c'est un indice extrêmement alléchant du fait qu'il devrait exister un opérateur qui les fournit exactement. L'étape suivante, bien sûr, serait de gérer la seconde partie, je veux dire avec des valeurs précises, et la partie infrarouge du spectre. Mais avant que je fasse cela, ce qui est vraiment assez important c'est qu'en géométrie non-commutative, la géométrie est donnée de façon spectrale. Quand vous parlez d'une géométrie, vous pouvez la définir au moyen de l'opérateur de Dirac, ou de ce qui remplace l'opérateur de Dirac, et ce qui remplace les fonctions, bien sûr, et etc., donc là, il n'est pas difficile de trouver ce que sont les fonctions et, je veux dire, sur cette moitié de droite, et de regarder la métrique : la métrique s'obtient à partir du symbole de l'opérateur de Dirac et ici, la métrique que vous trouvez est donnée par un  $dx^2$ , il y a une force sur  $x^2 - \lambda^2$ . Mais ce qui est assez surprenant, c'est que quand vous regardez le spectre comme je l'ai dit précédemment, il y a donc des valeurs négatives pour le laplacien mais il y a aussi des valeurs positives. Donc cela signifie que lorsque vous passez à l'opérateur de Dirac, il aura des valeurs propres purement imaginaires, comme pour les zéros de zeta, mais il aura aussi des valeurs propres réelles. Et ce que nous avons vérifié, avec Henri, c'est que vous savez que ces valeurs réelles ont exactement le même comportement que les zéros triviaux de zeta. Mais le fait que vous ayez à la fois les deux choses, notamment les valeurs propres négatives et les valeurs propres positives, cela vous dit que vous n'êtes pas en train de traiter un problème de Riemann, mais plutôt que vous

êtes en train de traiter un problème de Lorentz, je veux dire avec une métrique de type Minkowski.

Et donc, je veux dire que nous avons utilisé pour avoir une première idée de la géométrie qui est derrière cela, on a utilisé pour la voir, simplement, comme une compactification d'une géométrie lorentzienne bi-dimensionnelle. Et ok, il s'avère, vous savez, qu'il y a un moyen de faire cela, quand vous rendez la variable  $t$ -periodique, et cela correspond à un trou noir en deux dimensions.

which after changing coordinates to  
 $v = t - t(x)$  with

$$t(x) = \frac{1}{8\lambda} \log((\lambda + x)/(x - \lambda))$$

becomes smooth (black hole trick)

$$ds^2 = 4(x^2 - \lambda^2) dv^2 - 2dvdx$$

FIGURE 30

Ok et je veux dire, vous pouvez appliquer la ruse habituelle, qui consiste à voir que la métrique du trou noir est en fait lisse.

Donc vous pouvez vraiment réécrire la métrique par un changement adéquat des variables pour la rendre lisse. Et je veux dire qu'il y a, si vous voulez, une manière de plonger cela dans l'espace de Minkowski à trois dimensions, et quand vous faites cela, ce plongement, ce qui est assez intéressant, c'est que pour construire le plongement, vous devez à nouveau utiliser des intégrales elliptiques. Et cela vous donnera ce dessin :

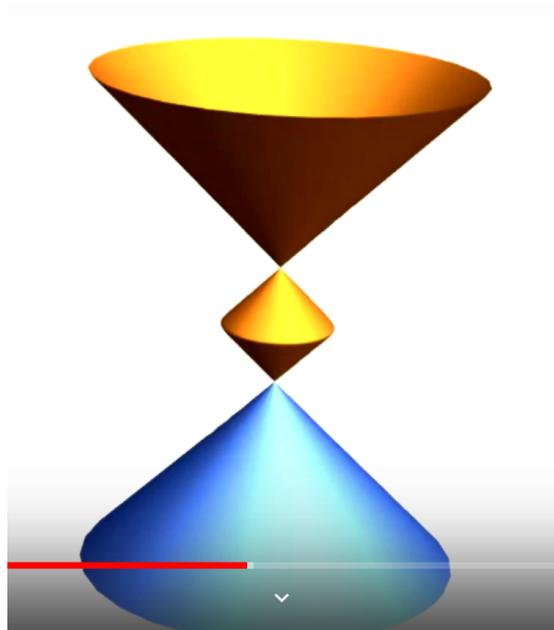


FIGURE 31

Donc si vous voulez, la partie qui est au-dessus et qui ressemble à un cône correspond à la partie intéressante de l'opérateur prolata. La partie qui est entre les deux correspond à ce qui se passe sur l'intervalle, et la partie qui est en-dessous correspond, bien sûr, à la partie symétrique de la partie supérieure. Et quand vous regardez les géodésiques, elles ont la bonne forme supposée.

