Le théorème de Gauss-Bonnet pour le 2-tore non-commutatif

Alain Connes, Paula Tretkoff

Résumé : Dans cet article, nous montrerons que la valeur à l'origine, $\zeta(0)$, de la fonction zêta du Laplacien sur le 2-tore non-commutatif, muni de sa structure conforme canonique, est indépendante du choix de l'élément de volume (facteur de Weyl) donné par un état (non unimodulaire). Nous avions obtenu, à la fin des années 80, par un calcul inédit, une formule générale pour $\zeta(0)$ faisant intervenir des logarithmes modifiés de l'opérateur modulaire de l'état. Nous donnons ici le calcul détaillé et démontrons que le résultat est indépendant du facteur de Weyl comme dans le cas classique, prouvant ainsi l'analogue du théorème de Gauss-Bonnet pour le 2-tore non-commutatif.

1 Introduction

Le principal résultat de cet article, à savoir l'analogue du théorème de Gauss-Bonnet pour le tore non-commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$, résulte du calcul de la valeur à l'origine, $\zeta(0)$, de la fonction zêta de l'analogue du laplacien pour les structures géométriques non unimodulaires sur $\mathbb{T}^2_\theta$.

Les deux auteurs ont effectué ce calcul à la fin des années 1980. Le résultat a été mentionné dans [6], mais n'a jamais été publié, sauf dans une prépublication du MPI [5]. À l'époque du calcul, le résultat était formulé en fonction de l'opérateur modulaire, mais sa signification n'était pas claire. Entre-temps, les deux théories suivantes ont été développées :

- l'action spectrale,
- les triplets spectraux non unimodulaires.

L'action spectrale [2], [4] permet d'interpréter la gravité couplée au modèle standard à partir des invariants spectraux d'une géométrie encodant une structure fine de l'espace-temps. Dans le cas bidimensionnel, le terme constant de l'action spectrale est (à l'ajout de la dimension du noyau de l'opérateur près) donné par la valeur à l'origine, $\zeta(0)$, de la fonction zêta. Cette valeur est un invariant topologique en géométrie riemannienne classique.

Les triplets spectraux tordus (ou non unimodulaires) sont apparus très naturellement [10] dans l'étude des exemples d'algèbres de feuilletages de type III.

Ainsi, en termes plus modernes, notre calcul a consisté à calculer l'action spectrale des triplets spectraux sur le 2-tore non-commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$, tant dans le cas usuel que dans le cas tordu.

Au départ, la complexité du calcul et le manque de simplicité du résultat nous ont rendus réticents à le publier. Ce n'est que récemment, en poussant le calcul plus loin, que nous avons pu démontrer l'invariance conforme attendue (*cf.* [3]).

Référence : https://arxiv.org/pdf/0910.0188.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, août 2025.

Théorème 1.1 - *Soit θ un nombre irrationnel et considérons, sur le 2-tore non-commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$, une structure conforme invariante par translation. Soit k un élément positif inversible de $C^\infty(\mathbb{T}^2_\theta)$ considéré comme un facteur de Weyl redimensionnant la métrique. Alors la valeur à l'origine de la fonction zêta $\zeta(s)$ du laplacien de la métrique redimensionnée est indépendante de k.*

En fait, nous devons revenir un peu en arrière après avoir énoncé ce théorème, car nous n'avons effectué le calcul que pour la structure conforme invariante par translation la plus simple, mais nous nous attendons à ce que le cas général soit identique.

Le calcul met en jeu deux acteurs principaux, qui présentent une interaction intéressante entre deux théories a priori bien distinctes, mais qui utilisent la même notation pour leur ingrédient clé :

- la théorie spectrale du Laplacien $\triangle$,
- l'opérateur modulaire Δ des états sur les algèbres d'opérateurs.

Le second intervient en raison de la non-unimodularité du triplet spectral, ou, plus simplement, parce que l'état définissant la forme volumique n'est plus supposé être une trace et hérite donc d'un opérateur modulaire Δ. Bien que l'opérateur laplacien et l'opérateur modulaire soient tous deux désignés par la lettre majuscule delta, nous espérons que la distinction entre ces deux opérateurs restera claire pour le lecteur attentif.

2 Préliminaires

Rappelons que pour une surface de Riemann classique Σ de métrique g, au laplacien $\triangle_g = d^*d$, où d est l'opérateur différentiel de de Rham agissant sur les fonctions sur la surface de Riemann, on associe la fonction zêta

$$\zeta(s) = \sum \lambda_j^{-s}\,, \quad \mathrm{Re}(s) > 1\,,$$

où la sommation porte sur les valeurs propres non nulles λ_j de $\triangle_g$ (voir, par exemple, [12]). La continuation méromorphe de $\zeta(s)$ en $s = 0$, pour lequel la fonction n'a pas de pôle, donne l'information importante

$$\zeta(0) + \mathrm{Card}\{j \mid \lambda_j = 0\} = \frac{1}{12\pi}\int_\Sigma R = \frac{1}{6}\,\chi(\Sigma)\,,$$

où R est la courbure scalaire et $\chi(\Sigma)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré. Ceci disparaît lorsque Σ est le 2-tore classique $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, par exemple, et est un invariant dans la classe conforme de la métrique, c'est-à-dire selon la transformation $g \to e^f g$ pour f une fonction lisse à valeurs réelles sur Σ.

2.1 Le 2-tore non-commutatif $\mathbb{T}^2_\theta$

Fixons un nombre irrationnel réel θ. Considérons l'algèbre de rotation irrationnelle C^*-A_θ, avec deux générateurs unitaires qui vérifient

$$VU = e^{2\pi i\theta}\,UV\,, \quad U^* = U^{-1}\,,\; V^* = V^{-1}\,.$$

On introduit le système dynamique donné par l'action de $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur A_θ par le groupe d'automorphismes à 2 paramètres $\{\alpha_s\}$, $s \in \mathbb{R}^2$ déterminé par

$$\alpha_s(U^n\, V^m) = e^{is.(n,m)} U^n\, V^m\,, \quad (s \in \mathbb{R}^2)\,,$$

On définit la sous-algèbre A_θ^∞ des éléments lisses de A_θ qui sont les x dans A_θ tels que l'application

$$\mathbb{R}^2 \to A_\theta, \quad s \mapsto \alpha_s(x)$$

est lisse. Exprimée comme une condition sur les coefficients de l'élément $a \in A_\theta$

$$a = \sum a(n,m) U^n V^m$$

Cela revient à dire qu'ils sont à décroissance rapide, c'est-à-dire que $\{|n|^k\, |m|^q\, |a(n,m)|\}$ est borné pour tout k, q positif. Les dérivations associées au groupe d'automorphismes ci-dessus sont données par les relations de définition :

$$\delta_1(U) = U\,, \quad \delta_1(V) = 0\,,$$
$$\delta_2(U) = 0\,, \quad \delta_2(V) = V\,.$$

Les dérivations δ_1, δ_2 sont analogues aux opérateurs différentiels $\frac{1}{i}\partial/\partial x$, $\frac{1}{i}\partial/\partial y$ sur les fonctions lisses sur $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$.

2.2 Structure conforme sur $\mathbb{T}^2_\theta$

Comme θ est supposé irrationnel, il existe une unique trace τ sur A_θ déterminée par les propriétés d'orthogonalité

$$\tau(U^n\, V^m) = 0 \quad \text{si} \quad (n,m) \neq (0,0)\,, \quad \text{et} \quad \tau(1) = 1\,. \tag{1}$$

On peut construire un espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$ à partir de A_θ en complétant par rapport au produit scalaire

$$\langle a, b\rangle = \tau(b^* a)\,, \quad a, b \in A_\theta\,, \tag{2}$$

et, en utilisant les dérivations δ_1, δ_2, on introduit une structure complexe en définissant

$$\partial = \delta_1 + i\delta_2\,, \quad \partial^* = \delta_1 - i\delta_2 \tag{3}$$

où (en étendant ∂, ∂^* aux opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}_0$) ∂^* est l'adjoint de ∂ par rapport au produit scalaire défini par τ. Comme analogue approprié de l'espace des $(1,0)$-formes sur le 2-tore classique, on prend le bi-module unitaire $\mathcal{H}^{(1,0)}$ sur A_θ^∞ donné par la complétion hilbertienne de l'espace des sommes finies $\sum a\ \partial b$, $a, b \in A_\theta^\infty$, par rapport au produit intérieur $\langle a\partial b, a'\partial b'\rangle = \tau((a')^*\, a(\partial b)(\partial b')^*)\,, \quad a, a', b, b' \in A_\theta^\infty\,.$

L'information sur la structure conforme est codée par le cocycle de Hochschild positif (*cf.* [8], [9]) sur A_θ^∞ donné par

$$\psi(a, b, c) = -\tau(a\partial b\partial^* c) \tag{4}$$

2.3 Automorphisme modulaire Δ

Pour varier à l'intérieur de la classe conforme d'une métrique, on considère la famille de fonctionnelles linéaires positives $\varphi = \varphi_h$, paramétrée par $h = h^* \in A_\theta^\infty$, un élément auto-adjoint de A_θ^∞, et définie sur A_θ par

$$\varphi(a) = \tau(ae^{-h}), \quad a \in A_\theta .$$

Notons que, tandis que pour τ on a la relation de trace

$$\tau(b^*a) = \tau(ab^*), \quad a, b \in A_\theta ,$$

pour φ on a

$$\varphi(ab) = \varphi(be^{-h}ae^h) = \varphi(b\sigma_i(a)), \quad a \in A_\theta ,$$

qui est la condition KMS à $\beta = 1$ pour le groupe à 1 paramètre σ_t, $t \in \mathbb{R}$, des automorphismes intérieurs

$$\sigma_t(x) = e^{i\grave{e}me}xe^{-i\grave{e}me}.$$

Ce groupe est $\sigma_t = \Delta^{-it}$ où l'opérateur modulaire est

$$\Delta(x) = e^{-h}xe^h$$

qui est un opérateur positif vérifiant

$$\langle \Delta^{1/2}x, \Delta^{1/2}x\rangle_\varphi = \langle x^*, x^*\rangle_\varphi , \qquad \forall x \in A_\theta. \tag{5}$$

où l'on définit le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_\varphi$ sur A_θ par

$$\langle a, b\rangle_\varphi = \varphi(b^*a), \quad a, b \in A_\theta .$$

Soit $\mathcal{H}_\varphi$ la complétion hilbertienne de A_θ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_\varphi$. C'est un module unitaire à gauche sur A_θ par construction. Le groupe à un paramètre σ_t est engendré par la dérivation $-\log\Delta$

$$-\log\Delta(x) = [h, x], \quad x \in A_\theta^\infty .$$

2.4 Laplacien et facteur de Weyl sur $\mathbb{T}^2_\theta$

Le laplacien $\triangle$ sur les fonctions sur $\mathbb{T}^2_\theta$ est donné par

$$\triangle = \partial^*\partial = \delta_1^2 + \delta_2^2 , \tag{6}$$

où ∂ est considéré comme un opérateur non borné de $\mathcal{H}_0$ à $\mathcal{H}^{(1,0)}$.

Lorsqu'on modifie la forme volumique sur $\mathbb{T}^2_\theta$ en remplaçant la trace τ par la fonctionnelle φ, le laplacien modifié $\triangle'$ est donné par

$$\triangle' = \partial_\varphi^*\partial_\varphi \tag{7}$$

où ∂_φ est le même opérateur ∂, mais considéré comme un opérateur non borné de $\mathcal{H}_\varphi$ à $\mathcal{H}^{(1,0)}$. Par construction, $\triangle'$ est un opérateur non borné positif dans $\mathcal{H}_\varphi$.

Lemme 2.1 *L'opérateur $\triangle'$ est anti-unitairement équivalent à l'opérateur non borné positif $k\triangle k$ dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_0$, où $k = e^{h/2} \in A_\theta$ agit dans $\mathcal{H}_0$ par multiplication à gauche.*

La multiplication à droite par k s'étend à une isométrie W de $\mathcal{H}_0$ à $\mathcal{H}_\varphi$,

$$Wa = ak\,, \quad \forall a \in A_\theta \tag{8}$$

puisque

$$\langle Wa, Wb\rangle_\varphi = \tau((bk)^*(ak)k^{-2}) = \tau(b^*a)\,, \quad \forall a, b \in A_\theta.$$

L'opérateur $\partial_\varphi \circ W$ de $\mathcal{H}_0$ à $\mathcal{H}^{(1,0)}$ est donné par

$$\partial_\varphi \circ W(a) = \partial(ak) = \partial \circ R_k$$

où R_k est la multiplication à droite par k. Ainsi, $\triangle' = \partial_\varphi^*\partial_\varphi$ est unitairement équivalent à $(\partial \circ R_k)^*\partial \circ R_k = R_k\partial^*\partial R_k$.

Soit maintenant J l'involution anti-unitaire sur $\mathcal{H}_0$ donnée par l'opération étoile $Ja = a^*$ pour tout $a \in A_\theta$. L'opérateur J commute avec $\triangle$ et vérifie $JR_kJ = k$ en utilisant $k^* = k$. Cela donne l'équivalence recherchée.

Dans ce qui suit, on va étudier la dépendance de k dans les calculs du comportement de la fonction zêta de $k\triangle k$ à l'origine.

2.5 Triples spectraux

Avec les notations du paragraphe précédent, considérons l'espace de Hilbert et l'opérateur

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\varphi \oplus \mathcal{H}^{(1,0)}\,, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\varphi^* \\ \partial_\varphi & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

On rappelle que $\mathcal{H}^{(1,0)}$ est naturellement un bimodule unitaire sur A_θ.

Lemme 2.2 *1) L'action à gauche de A_θ dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\varphi \oplus \mathcal{H}^{(1,0)}$ et l'opérateur D donnent un triplet spectral pair $(A_\theta, \mathcal{H}, D)$.*

2) Soit J_φ l'unitaire antilinéaire de Tomita dans $\mathcal{H}_\varphi$ et $a \mapsto J_\varphi a^* J_\varphi$ l'action à droite unitaire correspondante de A_θ dans $\mathcal{H}_\varphi$. Alors, l'action à droite $a \mapsto a^{\rm op}$ de A_θ dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\varphi \oplus \mathcal{H}^{(1,0)}$ et l'opérateur D donnent un triplet spectral pair torsadé $(A_\theta^{\rm op}, \mathcal{H}, D)$, c'est-à-dire que les opérateurs suivants sont bornés

$$D\,a^{\rm op} - (k^{-1}ak)^{\rm op}D\,, \quad \forall a \in A_\theta. \tag{10}$$

3) La fonction zêta de l'opérateur D i.e. $\zeta_D(s) = \mathrm{Trace}(|D|^{-s})$ est égale à $2\mathrm{Trace}((k\triangle k)^{-s/2})$.

Preuve : 1) Pour démontrer que $[D, a]$ est borné, il suffit de vérifier que $[\partial_\varphi, a]$ est borné, ce qui découle de la propriété de dérivation de ∂_φ et de l'équivalence des normes $\|.\|_\varphi$ et $\|.\|_0$.

2) Montrons d'abord que le commutateur torsadé $\partial_\varphi\, a^{\rm op} - (k^{-1}ak)^{\rm op}\,\partial_\varphi$ est borné ou, de manière équivalente, que

$$\partial_\varphi\,(kak^{-1})^{\rm op} - a^{\rm op}\,\partial_\varphi \tag{11}$$

est borné comme un opérateur de $\mathcal{H}_\varphi$ à $\mathcal{H}^{(1,0)}$. En utilisant l'isométrie W de $\mathcal{H}_0$ à $\mathcal{H}_\varphi$ définie dans (8), on remplace ∂_φ par $\partial \circ R_k$ et $a^{\rm op}$ par la multiplication à droite R_a par a pour tout $a \in A_\theta$.

On remplace ainsi l'opérateur (11) par

$$\partial \circ R_k \circ R_{kak^{-1}} - R_a \circ \partial \circ R_k = R_{\partial a} \circ R_k$$

qui est un opérateur borné de $\mathcal{H}_0$ à $\mathcal{H}^{(1,0)}$. Ainsi, (11) est borné, tout comme son adjoint.

$$((kak^{-1})^{\rm op})^*\partial_\varphi^* - \partial_\varphi^*(a^{\rm op})^*.$$

Ainsi, la bornabilité de (10) résulte de l'égalité

$$((kak^{-1})^{\rm op})^* = ((kak^{-1})^*)^{\rm op} = (k^{-1}a^*k)^{\rm op}$$

de sorte que $\partial_\varphi^*\, a^{\rm op} - (k^{-1}ak)^{\rm op}\,\partial_\varphi^*$ est borné pour tout $a \in A_\theta$.

3) On a vu dans le lemme 2.1 que le spectre de $\triangle' = \partial_\varphi^*\partial_\varphi$ est le même que celui de $k\triangle k$. Puisque la partie non nulle du spectre d'un produit A^*A est identique à la partie non nulle du spectre de AA^*, en utilisant l'équivalence unitaire donnée par la décomposition polaire, on obtient le résultat recherché.

3 Énoncé du théorème

Avec la notation du § 1, on étudie la fonction zêta laplacienne définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ par la transformée de Mellin.

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{Trace}^+(e^{-t\triangle'})\, t^{s-1}\, dt = \mathrm{Trace}(\triangle'^{-s})\,.$$

Ici, $\triangle' \sim k \triangle k$, et

$$\mathrm{Trace}^+(e^{-t\triangle'}) = \mathrm{Trace}\,(e^{-t\triangle'}) - \mathrm{Dim\,Ker}(\triangle')\,,$$

où $\mathrm{Trace}(\cdot)$ désigne la trace ordinaire de l'opérateur. La définition de $\zeta(s)$ peut être étendue par continuation méromorphe à toutes les valeurs de s, sauf à la valeur $s = 1$ pour laquelle la fonction possède un pôle simple. Énonçons maintenant le résultat principal.

Théorème 3.1 - *Soient θ un nombre irrationnel et k un élément positif inversible de A_θ^∞. Alors la valeur à l'origine de la fonction zêta $\zeta(s)$ de l'opérateur $\triangle' \sim k \triangle k$ est indépendante de k.*

Notre preuve repose sur un long calcul explicite dont l'ingrédient principal est le lemme suivant :

3.1 Lemme technique principal

Lemme 3.2 – *Soient θ un nombre irrationnel et k un élément positif inversible de A_θ^∞. Alors, la valeur à l'origine de la fonction zêta $\zeta(s)$ de l'opérateur $\triangle' \sim k \triangle k$ est donnée par* [1]

$$\zeta(0) + 1 = 2\pi\, \varphi(f(\Delta)(\delta_j(k))\delta_j(k)) \tag{12}$$

où φ est la fonctionnelle $\varphi(x) = \tau(xk^{-2})$, Δ est l'opérateur modulaire de φ et la fonction $f(u)$ est donnée par

$$f(u) = \frac{1}{6}u^{-1/2} - \frac{1}{3} + \mathcal{L}_1(u) - 2(1+u^{1/2})\mathcal{L}_2(u) + (1+u^{1/2})^2\,\mathcal{L}_3(u) \tag{13}$$

où $\mathcal{L}_m$, m étant un entier positif, représente le logarithme modifié

$$\mathcal{L}_m(u) = (-1)^m\,(u-1)^{-(m+1)}\left(\log u - \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\frac{(u-1)^j}{j}\right).$$

La démonstration de ce lemme occupera les paragraphes suivants de l'article. Dans le présent paragraphe, nous montrerons comment le lemme implique le théorème 3.1. L'énoncé du lemme 3.2 est le même [2] que celui du théorème principal de [5], où le membre de droite s'écrit $\tau(h(\theta,k))$ où

$$h(\theta,k) = \frac{\pi}{3}k^{-1}\delta_j^2(k) - \frac{2\pi}{3}k^{-1}\delta_j(k)\delta_j(k)k^{-1} + 2\pi\mathcal{D}_1(k^{-1}\delta_j(k))\delta_j(k)k^{-1} \tag{14}$$

$$-4\pi\mathcal{D}_2(1+\Delta^{1/2})(k^{-1}\delta_j(k))\delta_j(k)k^{-1} + 2\pi\mathcal{D}_3(1+2\Delta^{1/2}+\Delta)(k^{-1}\delta_j(k))\delta_j(k)k^{-1}$$

où $\mathcal{D}_n = \mathcal{L}_n(\Delta)$. On a en effet

$$\tau(k^{-1}\delta_j^2(k)) = -\tau(\delta_j(k^{-1})\delta_j(k)) = \tau(k^{-1}\delta_j(k)k^{-1}\delta_j(k)) = \tau(k^{-2}\Delta^{-1/2}(\delta_j(k))\delta_j(k))$$

ce qui rend compte du premier terme du membre de droite de (13), tandis que les autres termes sont facilement comparables puisque la multiplication à gauche par k^{-1} commute avec toute fonction de Δ.

3.2 Résultat en termes de $\log(k)$

La fonction $f(u)$ est de la forme $h(\log(u))$ où h est la fonction entière

$$h(x) = -\frac{e^{-x/2}\left(-1+3e^{x/2}+3e^{x}+6e^{3x/2}x-3e^{2x}-3e^{5x/2}+e^{3x}\right)}{6\left(-1+e^{x/2}\right)^4\left(1+e^{x/2}\right)^2}. \tag{15}$$

On peut donc réécrire (12) sous la forme

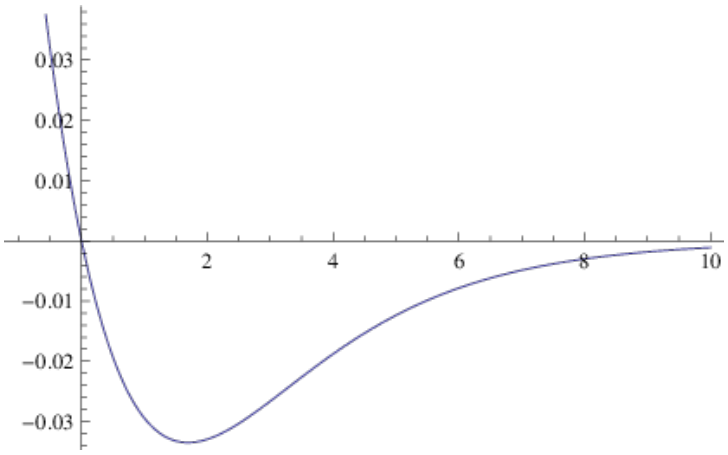
$$\zeta(0) + 1 = 2\pi\, \varphi(h(\log\Delta)(\delta_j(k))\delta_j(k)) \tag{16}$$

Comme indiqué dans le § 1, dans le cas commutatif, la valeur correspondante de la fonction zêta à l'origine est nulle. En fait, dans ce cas, on a $\log\Delta = 0$. La fonction h s'annule en 0 et son développement de Taylor en ce point est

$$h(x) = -\frac{x}{20} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{210} + \frac{x^4}{3360} + \frac{x^5}{201600} + O[x]^6.$$

[1] la sommation des indices répétés sur $j = 1, 2$ est comprise.

[2] à l'addition de 1 à $\zeta(0)$.



Graphique de la fonction h.

En fait, on obtient une simplification supplémentaire en général en exprimant le résultat en termes de l'élément $\psi = \log k$. On introduit la fonction

$$K(x) = -\frac{x - \mathrm{sh}\left[\frac{x}{2}\right] - \mathrm{sh}[x] + \frac{1}{3}\mathrm{sh}\left[\frac{3x}{2}\right]}{x^2 \mathrm{sh}\left[\frac{x}{2}\right]^2}. \tag{17}$$

Lemme 3.3 – *Avec les notations du théorème 3.2, on a*

$$\zeta(0) + 1 = 2\pi\,\tau(K(\log\Delta)(\delta_j(\log k))\delta_j(\log k)). \tag{18}$$

Preuve : On utilise la formule suivante

$$k^{-1}\delta_j(k) = \int_0^1 \Delta^{s/2}(\delta_j(\log k))ds \tag{19}$$

ce qui donne

$$k^{-1}\delta_j(k) = 2\,\frac{\Delta^{1/2} - 1}{\log\Delta}(\delta_j(\log k)) \tag{20}$$

et de même

$$\delta_j(k)k^{-1} = -2\,\frac{\Delta^{-1/2} - 1}{\log\Delta}(\delta_j(\log k)).$$

On réécrit ensuite (12) sous la forme

$$\zeta(0) + 1 = 2\pi\,\tau(f(\Delta)(k^{-1}\delta_j(k))\delta_j(k)k^{-1})$$

et on utilise l'identité suivante, où F est une fonction entière,

$$\tau(aF(\log\Delta)(b)) = \tau(F(-\log\Delta)(a)b)\,, \qquad \forall a, b \in A_\theta^\infty \tag{21}$$

ce qui montre que (18) est vraie avec

$$K(x) = 4\left(-1 + e^{x/2}\right)^2 x^{-2}\,h(x)$$

ce qui se simplifie en (17).

3.3 Preuve du théorème 3.1

D'après (17), la fonction $K(x)$ est une fonction impaire. Ainsi, en utilisant (21), on a

$$\tau(K(\log\Delta)(\delta_j(\log k))\delta_j(\log k)) = -\tau(K(\log\Delta)(\delta_j(\log k))\delta_j(\log k)) = 0.$$

4 Calcul pseudo-différentiel

Avec les notations des paragraphes précédents, on introduit dans le présent paragraphe la notion d'opérateur pseudo-différentiel étant donné le système dynamique $(A_\theta^\infty, \alpha_s)$ tel que développé dans [1] et [7]. Tout d'abord, pour un entier non négatif n, on définit l'espace vectoriel des opérateurs différentiels d'ordre au plus n comme étant les expressions polynomiales dans δ_1, δ_2 de la forme

$$P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{|j|\leq n} a_j\, \delta_1^{j_1}\, \delta_2^{j_2}\,, \quad a_j \in A_\theta^\infty\,, \quad j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0}\,, \quad |j| = j_1 + j_2\,.$$

Pour étendre cette définition, soit $\mathbb{R}^2$ le dual de $\mathbb{R}^2$ et introduisons la classe des distributions à valeurs d'opérateurs données par les fonctions linéaires complexes $P : C^\infty(\mathbb{R}^2) \to A_\theta^\infty$ continues par rapport aux semi-normes p_{i_1,i_2} déterminées par

$$p_{i_1,i_2}(P(\varphi)) = \|\delta_1^{i_1}\, \delta_2^{i_2}(P(\varphi))\|\,, \quad i_1, i_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\,.$$

On utilise les notations $y_1 = e^{2\pi i\xi_1}$, $y_2 = e^{2\pi i\xi_2}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, pour les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^2$, et $\partial_1 = \partial/\partial\xi_1$, $\partial_2 = \partial/\partial\xi_2$ pour les dérivations correspondantes. On peut maintenant introduire l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels via l'algèbre des symboles à valeurs d'opérateurs.

Définition 4.1 – *Un élément $\rho = \rho(\xi) = \rho(\xi_1, \xi_2)$ de $C^\infty(\mathbb{R}^2, A_\theta^\infty)$ est un symbole d'ordre n si et seulement si quels que soient i_1, i_2, j_1, j_2 des entiers non négatifs*

$$p_{i_1,i_2}(\partial_1^{j_1}\, \partial_2^{j_2}\, \rho(\xi)) \leq c\,(1 + |\xi|)^{n-|j|}\,,$$

où c est une constante ne dépendant que de ρ, et s'il existe un élément $k = k(\xi_1, \xi_2)$ de $C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0,0\}, A_\theta^\infty)$ tel que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{-n}\, \rho(\lambda\,\xi_1, \lambda\,\xi_2) = k(\xi_1, \xi_2)\,.$$

On désigne l'espace des symboles d'ordre n par S_n, l'union $S = \cup_{n\in\mathbb{Z}}\, S_n$ formant une algèbre. Les symboles d'ordre non entier ne sont pas requis pour cet article. Un exemple de symbole d'ordre n, un entier positif, est fourni par le polynôme $\rho(\xi) = \sum_{|j|\leq n}\, a_j\, \xi_1^{j_1}\, \xi_2^{j_2}$, $a_j \in A_\theta^\infty$, et on a $\rho(n,m) = \sum_{|j|\leq n}\, a_j\, n^{j_1}\, m^{j_2}$ tel que $\rho(n,m)\, U^n\, V^m = \sum_{|j|\leq n}\, a_j\, \delta_1^{j_1}\, \delta_2^{j_2}(U^n\, V^m)$. Pour un élément $a = \sum_{n,m}\, a(n,m)\, U^n\, V^m$ de A_θ^∞, on a donc $\sum_{n,m}\, \rho(n,m)\, a(n,m)\, U^n\, V^n = \sum_{|j|\leq n}\, a_j\, \delta_1^{j_1}\, \delta_2^{j_2}(a)$, en associant au symbole ρ l'opérateur différentiel $P_\rho = P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{|j|\leq n}\, a_j\, \delta_1^{j_1}\, \delta_2^{j_2}$ sur A_θ^∞.

Pour tout entier n, un symbole ρ de cet ordre détermine un opérateur sur A_θ^∞ via l'application $\psi : \rho \mapsto P_\rho$ donnée par la formule générale

$$P_\rho(a) = (2\pi)^{-2} \int\int e^{-is.\xi} \rho(\xi)\, \alpha_s(a) ds d\xi\,. \tag{22}$$

Dans notre cas, cela donne, en utilisant

$$\alpha_s(U^n\,V^m) = e^{is.(n,m)}U^n\,V^m$$

la formule simplifiée

$$P_\rho(a) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} \rho(n,m)\,a(n,m)\,U^n\,V^m\,, \quad a = \sum_{n,m} a(n,m)\,U^n\,V^m\,. \tag{23}$$

Par exemple, l'image sous ψ du symbole $(1+|\xi|^2)^{-k}$, $k\geq 1$, d'ordre $-2k$ agit sur A_θ^∞.

Définition 4.2 – *L'espace ψ des opérateurs pseudo-différentiels est donné par l'image de l'algèbre S sous l'application ψ.*

Définition 4.3 – *L'équivalence $\rho\sim\rho'$ entre deux symboles ρ,ρ' dans S_k, $k\in\mathbb{Z}$, est vérifiée si et seulement si $\rho-\rho'$ est un symbole d'ordre n pour tout entier n.*

Définition 4.4 – *La classe des opérateurs pseudo-différentiels est l'espace ψ modulo l'addition d'un élément de $\psi(Z)$, où Z est la sous-algèbre de S dont les éléments sont équivalents au symbole zéro.*

Il est possible d'inverser l'application ψ afin d'obtenir pour chaque élément P de ψ un unique symbole $\sigma(P)$ à équivalence près. Rappelons, d'après le § 1, que la trace τ sur A_θ^∞ permet de définir l'adjoint des opérateurs agissant sur A_θ^∞ via leur extension à $\mathcal{H}_0$. Par analogie directe avec [11], chapitre 1, théorème, p. 16, on peut en déduire le résultat suivant.

Proposition 4.5 – *Pour un élément P de ψ de symbole $\sigma(P)=\rho=\rho(\xi)$, le symbole de l'adjoint P^* vérifie*

$$\sigma(P^*)\sim\sum_{(\ell_1,\ell_2)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2}(1/(\ell_1)!\,(\ell_2)!)\,[\partial_1^{\ell_1}\,\partial_2^{\ell_2}\,\delta_1^{\ell_1}\,\delta_2^{\ell_2}(\rho(\xi))^*]\,.$$

Si Q est un élément de ψ de symbole $\sigma(Q)=\rho'=\rho'(\xi)$, alors le produit PQ est également dans ψ et de symbole

$$\sigma(PQ)\sim\sum_{(\ell_1,\ell_2)\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2}(1/(\ell_1)!\,\ell_2)!)\,[\partial_1^{\ell_1}\,\partial_2^{\ell_2}(\rho(\xi))\,\delta_1^{\ell_1}\,\delta_2^{\ell_2}(\rho'(\xi))]\,.$$

Remarquons que dans la proposition ci-dessus, comme dans tout le présent article, étant donné les symboles $\{\rho_j\}_{j=0}^\infty$, la relation $\rho\sim\sum_{j=0}^\infty\rho_j$ signifie que pour tout k donné, il existe un entier positif h tel que pour tout $n>h$, la différence $\rho-\sum_{j=0}^n\rho_j$ soit dans S_k.

Les opérateurs pseudo-différentiels elliptiques sont ceux dont les symboles remplissent le critère suivant.

Définition 4.6 – *Soit n un entier et ρ un symbole d'ordre n. Alors $\rho=\rho(\xi)$ est elliptique s'il est inversible dans l'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^2,A_\theta^\infty)$ et si son inverse vérifie*

$$\|\rho(\xi)^{-1}\|\leq c(1+|\xi|)^{-n}$$

pour une constante c ne dépendant que de ρ et pour $|\xi|=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}$ suffisamment grand.

Un exemple d'opérateur elliptique est fourni par le laplacien $\triangle=\delta_1^2+\delta_2^2$ sur A_θ^∞ introduit dans le § 1, qui possède le symbole inversible correspondant $\sigma(\triangle)=|\xi|^2$.

5 Comprendre les calculs

Les arguments de ce paragraphe sont concis, étant des analogues directs des arguments standards. En gardant à l'esprit la définition de la fonction zêta donnée dans le § 3, on observe que, par la formule de Cauchy, on a

$$e^{-t\triangle'} = (1/2\pi i)\int_C e^{-t\lambda}(\triangle' - \lambda\mathbf{1})^{-1}\, d\lambda$$

où λ est un nombre complexe, mais non réel positif, et C entoure l'axe des réels positifs dans le sens inverse des aiguilles d'une montre sans le toucher. On obtient alors une estimation exploitable de $(\triangle' - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ en passant à l'algèbre des symboles, avec la nuance importante que le scalaire λ est désormais traité comme un symbole d'ordre deux dans tous les calculs. En utilisant la définition d'un symbole, on peut remplacer la trace dans la formule de la fonction zêta par une intégration dans l'espace des symboles (argument le long de la diagonale), à savoir :

$$\zeta(s) = (1/\Gamma(s))\int_0^\infty \int \tau(\sigma(e^{-t\triangle'})(\xi))\, t^{s-1}\, d\xi\, dt\,.$$

La fonction $\Gamma(s)$ possède un pôle simple en $s = 0$ de résidu 1 tel que,

$$\zeta(0) = \mathrm{Res}_{s=0}\int_0^\infty \int \tau(\sigma(e^{-t\triangle'})(\xi))\, t^{s-1}\, d\xi\, dt\,.$$

Tout comme dans les arguments utilisés pour la dérivation de la formule asymptotique (voir par exemple [11]),

$$\int \tau(\sigma(e^{-t\triangle'})(\xi))\, d\xi \sim t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} B_{2n}(\triangle')\, t^n\,, \quad t \to 0_+\,,$$

on peut faire appel à la formule de Cauchy citée ci-dessus. En particulier, si B_λ désigne (une approximation choisie) l'opérateur inverse de $(\lambda\mathbf{1} - \triangle')$, son symbole possède un développement de la forme

$$\sigma(B_\lambda) = \sigma(B_\lambda)(\xi) = b_0(\xi) + b_1(\xi) + b_2(\xi) + \dots$$

où j est compris entre les entiers non négatifs et $b_j(\xi) = b_j(\xi, \lambda)$ est un symbole d'ordre $-2 - j$. Comme nous l'expliquerons plus en détail dans le § 6, ces symboles peuvent être calculés par induction à l'aide des formules d'algèbre symbolique commençant par $b_0(\xi) = (\lambda - k^2|\xi|^2)^{-1}$ qui est le principal (degré homogène le plus élevé dans ξ) symbole de $(\lambda\mathbf{1} - \triangle')^{-1}$. Il s'avère que $\zeta(0)$ est égal au coefficient de λ^{-1} dans $\int \tau(b_2(\xi))\, d\xi$. Par un argument d'homogénéité, on a en fait

$$\zeta(0) = \int \tau(b_2(\xi))\, d\xi\,. \tag{24}$$

6 Preuve computationnelle du lemme principal

Suite aux arguments du § 5, par homogénéité, il n'y a aucune perte de généralité à placer $\lambda = -1$ tout au long du calcul de $\zeta(0)$ et à multiplier la réponse finale par -1. Le problème consiste alors à dériver, en algèbre des symboles, une solution récursive de la forme $\sigma = b_0(\xi) + b_1(\xi) + b_2(\xi) + \dots$ à l'équation

$$\sigma \cdot (\sigma(\triangle' - \lambda)) = 1 + 0(|\xi|^{-3})\,.$$

La précision à l'ordre de -3 dans ξ du côté droit est en pratique suffisante, car nous ne nous intéressons qu'à l'évaluation de σ jusqu'à $b_2(\xi)$. Tout au long de ce paragraphe, la convention de sommation sur les indices répétés dans l'intervalle $i, j = 1, 2$ est respectée.

Lemme 6.1 – *L'opérateur $\triangle'$ a pour symbole $\sigma(\triangle') = a_2(\xi) + a_1(\xi) + a_0(\xi)$ où, en sommant les indices répétés dans l'intervalle $i = 1, 2$, on a*

$$a_2 = a_2(\xi) = k^2 \xi_i \, \xi_i$$

$$a_1 = a_1(\xi) = 2\, \xi_i (k\, \delta_i(k))$$

$$a_0 = a_0(\xi) = k\, \delta_i \, \delta_i(k)\, .$$

Ces expressions sont dérivées en appliquant la formule du produit dans l'algèbre des symboles donnée dans la proposition § 4 à $\sigma_1(\xi) = \xi_i \, \xi_i$ et $\sigma_2(\xi) = k$, puis en multipliant à gauche par k.

Pour commencer le calcul inductif de l'inverse du symbole de $\triangle' - \lambda$, posons

$$b_0 = b_0(\xi) = (k^2 \, |\xi|^2 + 1)^{-1} \tag{25}$$

et calculons à l'ordre -3 dans ξ le produit $b_0 \cdot ((a_2 + 1) + a_1 + a_0)$. En sélectionnant les termes de degré -1 appropriés dans ξ et en utilisant la proposition du § 4, on obtient

$$b_1 = -(b_0 \, a_1 \, b_0 + \partial_i(b_0) \, \delta_i(a_2) \, b_0)\, . \tag{26}$$

Notons que b_0 apparaît à droite dans cette formule, contrairement à ce qui est donné dans la formule de la page 52 de [11], qui n'est valable que pour le symbole principal scalaire. De la même manière, en collectant les termes de degré -2 dans ξ et en utilisant (26), on obtient

$$\begin{aligned} b_2 \;&=\; -(b_0 \, a_0 \, b_0 + b_1 \, a_1 \, b_0 + \partial_i(b_0) \, \delta_i(a_1) \, b_0 \\ &+\; \partial_i(b_1) \, \delta_i(a_2) \, b_0 + (1/2) \, \partial_i \, \partial_j(b_0) \, \delta_i \, \delta_j(a_2) \, b_0)\, . \end{aligned} \tag{27}$$

Un calcul direct de ces termes (jusqu'à la dernière multiplication par b_0) donne, en ignorant les termes impairs dans ξ,

$$\begin{gathered} -b_0 k\delta_1^2(k) - b_0 k\delta_2^2(k) + \left(\xi_2^2 + 5\xi_1^2\right)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1^2(k) + \left(5\xi_2^2 + \xi_1^2\right)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_2^2(k) + 2\xi_2^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)\delta_1(k) + \\ 6\xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)\delta_1(k) + \xi_2^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1^2(k)k + \xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1^2(k)k + 6\xi_2^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_2(k)\delta_2(k) + 2\xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_2(k)\delta_2(k) + \\ \xi_2^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_2^2(k)k + \xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right)\delta_2^2(k)k - 4\xi_2^2\xi_1^2\left(k^4 b_0^3\right) k\delta_1^2(k) - 4\xi_1^4\left(k^4 b_0^3\right) k\delta_1^2(k) - 4\xi_2^4\left(k^4 b_0^3\right) k\delta_2^2(k) - \\ 4\xi_2^2\xi_1^2\left(k^4 b_0^3\right) k\delta_2^2(k) - 8\xi_2^2\xi_1^2\left(k^4 b_0^3\right)\delta_1(k)\delta_1(k) - 8\xi_1^4\left(k^4 b_0^3\right)\delta_1(k)\delta_1(k) - 4\xi_2^2\xi_1^2\left(k^4 b_0^3\right)\delta_1^2(k)k - \\ 4\xi_1^4\left(k^4 b_0^3\right)\delta_1^2(k)k - 8\xi_2^4\left(k^4 b_0^3\right)\delta_2(k)\delta_2(k) - 8\xi_2^2\xi_1^2\left(k^4 b_0^3\right)\delta_2(k)\delta_2(k) - 4\xi_2^4\left(k^4 b_0^3\right)\delta_2^2(k)k - \\ 4\xi_2^2\xi_1^2\left(k^4 b_0^3\right)\delta_2^2(k)k + 2\xi_2^2 b_0 k\delta_1(k) b_0 k\delta_1(k) + 6\xi_1^2 b_0 k\delta_1(k) b_0 k\delta_1(k) + 2\xi_2^2 b_0 k\delta_1(k) b_0\delta_1(k)k + \\ 2\xi_1^2 b_0 k\delta_1(k) b_0\delta_1(k)k - 4\xi_2^2\xi_1^2 b_0 k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) - 4\xi_1^4 b_0 k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) - \\ 4\xi_2^2\xi_1^2 b_0 k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)k - 4\xi_1^4 b_0 k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)k + 6\xi_2^2 b_0 k\delta_2(k) b_0 k\delta_2(k) + 2\xi_1^2 b_0 k\delta_2(k) b_0 k\delta_2(k) + \\ 2\xi_2^2 b_0 k\delta_2(k) b_0\delta_2(k)k + 2\xi_1^2 b_0 k\delta_2(k) b_0\delta_2(k)k - 4\xi_2^4 b_0 k\delta_2(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_2(k) - 4\xi_2^2\xi_1^2 b_0 k\delta_2(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_2(k) - \\ 4\xi_2^4 b_0 k\delta_2(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_2(k)k - 4\xi_2^2\xi_1^2 b_0 k\delta_2(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_2(k)k - 2\xi_2^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) b_0 k\delta_1(k) - \\ 16\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) b_0 k\delta_1(k) - 14\xi_1^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) b_0 k\delta_1(k) - 2\xi_2^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) b_0\delta_1(k)k - \\ 12\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) b_0\delta_1(k)k - 10\xi_1^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) b_0\delta_1(k)k + 4\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) + \\ 8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) + 4\xi_1^6\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k) + 4\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)k + \\ 8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)k + 4\xi_1^6\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_1(k)\left(k^2 b_0^2\right)\delta_1(k)k - 14\xi_2^4\left(k^2 b_0^2\right) k\delta_2(k) b_0 k\delta_2(k) - \end{gathered}$$

$$16\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)-2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)-10\xi_2^4\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k-$$
$$12\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k-2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+4\xi_2^6\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+$$
$$8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+4\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+4\xi_2^6\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+$$
$$8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+4\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k-2\xi_2^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)-$$
$$12\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)-10\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)-2\xi_2^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k-$$
$$8\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k-6\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+4\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+$$
$$8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+4\xi_1^6\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+4\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k+$$
$$8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k+4\xi_1^6\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k-10\xi_2^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)-$$
$$12\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)-2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)-6\xi_2^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k-$$
$$8\xi_2^2\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k-2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k+4\xi_2^6\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+$$
$$8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+4\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+4\xi_2^6\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+$$
$$8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+4\xi_2^2\xi_1^4\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+$$
$$16\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+8\xi_1^6\left(k^4b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+$$
$$16\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+8\xi_1^6\left(k^4b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+8\xi_2^6\left(k^4b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+$$
$$16\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+8\xi_2^6\left(k^4b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+$$
$$16\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)+$$
$$16\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)+8\xi_1^6\left(k^4b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)+8\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+$$
$$16\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+8\xi_1^6\left(k^4b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+8\xi_2^6\left(k^4b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)+$$
$$16\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)+8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)+8\xi_2^6\left(k^4b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k+$$
$$16\xi_2^4\xi_1^2\left(k^4b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k+8\xi_2^2\xi_1^4\left(k^4b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k$$

Il est extrêmement utile, lors du calcul, d'exploiter le fait que, dans la formule cible pour $\zeta(0)$ donnée dans (24), § 6, on invoque la trace, de sorte que les membres des facteurs des termes individuels puissent être permutés cycliquement sans perte de généralité de la réponse. Dans notre cas, cela signifie qu'au lieu de multiplier la somme ci-dessus par b_0 à droite, on peut simplement la multiplier à gauche, ajoutant ainsi simplement un à l'exposant de la première occurrence de b_0. Par la formule (24), il faut ensuite sommer les intégrales de chacun de ces termes sur l'ensemble du plan ξ. Après multiplication par b_0 à gauche, passage en coordonnées polaires et intégration de la variable angulaire, on obtient un facteur global de 2π,

$$-b_0^2k\delta_1^2(k)-b_0^2k\delta_2^2(k)+3r^2\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1^2(k)+3r^2\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2^2(k)+4r^2\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)\delta_1(k)+r^2\left(k^2b_0^3\right)\delta_1^2(k)k+$$
$$4r^2\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)\delta_2(k)+r^2\left(k^2b_0^3\right)\delta_2^2(k)k-2r^4\left(k^4b_0^4\right)k\delta_1^2(k)-2r^4\left(k^4b_0^4\right)k\delta_2^2(k)-4r^4\left(k^4b_0^4\right)\delta_1(k)\delta_1(k)-$$
$$2r^4\left(k^4b_0^4\right)\delta_1^2(k)k-4r^4\left(k^4b_0^4\right)\delta_2(k)\delta_2(k)-2r^4\left(k^4b_0^4\right)\delta_2^2(k)k+4r^2b_0^2k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+$$
$$2r^2b_0^2k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k-2r^4b_0^2k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)-2r^4b_0^2k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k+4r^2b_0^2k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+$$
$$2r^2b_0^2k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k-2r^4b_0^2k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)-2r^4b_0^2k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k-8r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)-$$
$$6r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k-$$
$$8r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)-6r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+$$
$$2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k-6r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)-4r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+$$
$$2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k-6r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)-$$
$$4r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+$$
$$4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+$$
$$4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+$$
$$4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k$$

où $b_0=(r^2k^2-\lambda)^{-1}$ et où l'intégration est dans rdr et de 0 à ∞.

6.1 Termes avec tous les b_0 à gauche

En utilisant la propriété de trace, ces termes donnent ce qui suit :

$$-b_0^2k\delta_1^2(k)-b_0^2k\delta_2^2(k)+r^2(3k^2b_0^3k\delta_1^2(k)-2k^4r^2b_0^4k\delta_1^2(k)+3k^2b_0^3k\delta_2^2(k)-2k^4r^2b_0^4k\delta_2^2(k)+4k^2b_0^3\delta_1(k)\delta_1(k)-4k^4r^2b_0^4\delta_1(k)\delta_1(k)+k^2b_0^3\delta_1^2(k)k-2k^4r^2b_0^4\delta_1^2(k)k+4k^2b_0^3\delta_2(k)\delta_2(k)-4k^4r^2b_0^4\delta_2(k)\delta_2(k)+k^2b_0^3\delta_2^2(k)k-2k^4r^2b_0^4\delta_2^2(k)k)$$

qui donne le même résultat que

$$\left(4k^2r^2b_0^3-4k^4r^4b_0^4\right)\left(\delta_1(k)^2+\delta_2(k)^2\right)+(-kb_0^2+4k^3r^2b_0^3-4k^5r^4b_0^4)(\delta_1^2(k)+\delta_2^2(k))$$

et le coefficient de $1/\lambda$ dans l'intégrale $\int \bullet\, rdr$ donne, jusqu'à un coefficient global de 2π,

$$-\frac{1}{3}k^{-2}\left(\delta_1(k)^2+\delta_2(k)^2\right)+\frac{1}{6}k^{-1}\left(\delta_1^2(k)+\delta_2^2(k)\right) \tag{28}$$

qui correspond aux deux premiers termes de la formule de $h(\theta,k)$ dans l'énoncé du lemme sous la forme (14).

6.2 Termes avec b_0^2 au milieu

Ce sont les suivants

$$-2r^4b_0^2k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)-2r^4b_0^2k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k-2r^4b_0^2k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)-2r^4b_0^2k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_1(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_1(k)k+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)k\delta_2(k)+2r^6\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)k\left(k^2b_0^2\right)\delta_2(k)k$$

On a

$$\partial_r(b_0)=-2k^2rb_0^2$$

et on peut utiliser l'intégration par parties dans r pour transformer des termes tels que

$$\int_0^\infty r^6(k^2b_0^3)\delta_1(k)k(k^2b_0^2)\delta_1(k)krdr$$

et les remplacer par

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \partial_r\left(r^6(k^2b_0^3)\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)kdr$$

où b_0 n'apparaît plus qu'à la première puissance lors de la deuxième occurrence.

Après avoir effectué cette opération et combiné avec ceux qui ont b_0 au milieu, soit

$$4r^2b_0^2k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+2r^2b_0^2k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+4r^2b_0^2k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+2r^2b_0^2k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k-8r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)-6r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k-8r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)-6r^4\left(k^2b_0^3\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k-6r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)-4r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k-6r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)-4r^4\left(k^2b_0^3\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k+4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_1(k)b_0k\delta_1(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_2(k)b_0k\delta_2(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_1(k)kb_0k\delta_1(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_2(k)kb_0k\delta_2(k)+4r^6\left(k^4b_0^4\right)\delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k$$

on obtient les termes suivants :

$$T = -2\,(r^2 b_0^2)\,(k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k + k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k) + 2\,(k^2 r^4 b_0^3)\,(k\delta_1(k)b_0 k\delta_1(k) + 2k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k + k\delta_2(k)b_0 k\delta_2(k) + 2k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k + \delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k + \delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k) - 2\,(k^4 r^6 b_0^4)\,(k\delta_1(k)b_0 k\delta_1(k) + k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k + k\delta_2(k)b_0 k\delta_2(k) + k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k + \delta_1(k)kb_0 k\delta_1(k) + \delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k + \delta_2(k)kb_0 k\delta_2(k) + \delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k)$$

qui ont tous b_0 au milieu.

6.3 Termes avec b_0 au milieu

Puisque nous sommes dans le cas non-commutatif, où en particulier k et $\delta_i(k)$, $i = 1, 2$, ne commutent pas, le calcul de ces termes nécessite de permuter k avec des éléments de A_θ^∞. Ceci est réalisé grâce au lemme suivant.

Lemme 6.2 – *Pour tout élément ρ de A_θ^∞ et tout entier positif m,*

$$\int_0^\infty \frac{k^{2m+2}\,u^m}{(k^2\,u+1)^{m+1}}\,\rho\,\frac{1}{(k^2\,u+1)}\,du = \mathcal{D}_m(\rho)\,, \tag{29}$$

où la fonction logarithme modifiée est $\mathcal{D}_m = \mathcal{L}_m(\Delta)$, Δ est l'opérateur introduit dans le § 1, et

$$\mathcal{L}_m(u) = \int_0^\infty \frac{x^m}{(x+1)^{m+1}}\,\frac{1}{(xu+1)}\,dx\,. \tag{30}$$

Preuve : En effectuant le changement de variables $u = e^s$, on obtient, with $k = e^{f/2}$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{k^{2m+2}\,u^m}{(k^2\,u+1)^{m+1}}\,\rho\,\frac{1}{(k^2\,u+1)}\,du \\
=\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(m+1)f+ms}}{(e^{(s+f)}+1)^{m+1}}\,\rho\,\frac{e^s}{(e^{(s+f)}+1)}\,ds \\
=\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(m+1/2)(s+f)}}{(e^{(s+f)}+1)^{m+1}}\,\Delta^{-1/2}(\rho)\,\frac{e^{(s+f)/2}}{(e^{(s+f)}+1)}\,ds \\
=\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(m+1/2)(s+f)}}{(e^{(s+f)}+1)^{m+1}}\,\Delta^{-1/2}(\rho)\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it(s+f)}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\,dt\,ds \\
=\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(m+1/2)(s+f)}}{(e^{(s+f)}+1)^{m+1}}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{it(s+f)}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\,\Delta^{-1/2+it}(\rho)\,dt\,ds \\
=\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itf}}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(m+1/2)(s+f)}e^{its}}{(e^{(s+f)}+1)^{m+1}}\,ds\right)\Delta^{-1/2+it}(\rho)\,dt
\end{aligned}$$

Maintenant on a

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(m+1/2)(s+f)}e^{its}}{(e^{(s+f)}+1)^{m+1}}\,ds = e^{-itf}\,F_m(t)$$

où F_m est la transformée de Fourier de la fonction

$$h_m(s) = \frac{e^{(m+1/2)s}}{(e^s+1)^{m+1}}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{k^{2m+2}\,u^m}{(k^2\,u+1)^{m+1}}\,\rho\,\frac{1}{(k^2\,u+1)}\,du\\ =\;&\int_{-\infty}^\infty \frac{F_m(t)}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\,\Delta^{-1/2+it}(\rho)\,dt\,.\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^\infty \frac{F_m(t)}{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}\,u^{-it}\,dt\\ =\;&\int_0^\infty \frac{x^{(m+1/2)}}{(x+1)^{m+1}}\frac{x^{-1/2}u^{1/2}}{x^{-1}u+1}\,\frac{dx}{x}=u^{-1/2}\,\mathcal{L}_m(u^{-1})\,.\end{aligned}$$

En remplaçant u par Δ^{-1}, on obtient l'égalité recherchée (29). On peut vérifier la normalisation en prenant $u=1$. Alors, l'intégrale $\mathcal{L}_m$ est égale à I_m

$$I_m=\int_0^\infty v^m/(v+1)^{m+2}\,dv=1/(m+1)\,,$$

pour tout entier positif m. Par ailleurs, par inspection, on constate que $\mathcal{L}_m$ est de la forme

$$\mathcal{L}_m(u)=c_m\left(\log(u)-P(u)\right)/(u-1)^{m+1}\,,$$

où P est un polynôme de degré au plus m. Au voisinage de $u=1$, on a

$$\log(u)=\sum_{j=1}^\infty \frac{(-1)^{j+1}}{j}(u-1)^j\,,$$

et à partir de cette valeur $u=1$, où $\mathcal{L}_m$ est non singulier, on voit, d'après cette dernière expression, que $\mathcal{L}_m$ est le logarithme modifié $\mathcal{D}_m$ introduit dans le § 3 où,

$$\mathcal{D}_m(\Delta)=((-1)^m/(\Delta-1)^{m+1})\left\{\log(\Delta)-\sum_{j=1}^m\frac{(-1)^{j+1}}{j}(\Delta-1)^j\right\}\,.$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Décomposons maintenant la somme T du § 6.2 en une somme de trois termes $T=T_1+T_2+T_3$ et calculons le coefficient de $1/\lambda$ dans l'intégrale par rapport à rdr dans chacun d'eux en utilisant le lemme précédent.

6.3.1 Termes impliquant $\mathcal{D}_1$

Ces termes proviennent de

$$T_1=-2\left(r^2b_0^2\right)\left(k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k+k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k\right)$$

Avec $u=r^2$, l'intégrande est $rdr=\frac{1}{2}du$ et donc (au facteur global près de 2π) ces termes donnent, en posant $\lambda=-1$ et en changeant le signe global,

$$\tau(k^{-2}\int_0^\infty \frac{k^4\,u}{(k^2\,u+1)^2}\,\delta_i(k)\,\frac{1}{(k^2\,u+1)}\,du\,\delta_i(k))=\tau(\mathcal{D}_1(\delta_i(k))\,\delta_i(k)\,k^{-2}) \tag{31}$$

6.3.2 Termes impliquant $\mathcal{D}_2$

Ces termes proviennent de

$$T_2 = 2\,(k^2 r^4 b_0^3)\,(k\delta_1(k)b_0 k\delta_1(k) + 2k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k + k\delta_2(k)b_0 k\delta_2(k) + 2k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k + \delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k + \delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k)$$

Puisque k commute avec b_0 et que l'on travaille sous la trace, ils donnent la même chose que

$$4\left(k^2 r^4 b_0^3\right)\,(k\delta_j(k)kb_0\delta_j(k) + k^2\delta_j(k)b_0\delta_j(k))$$

On a $k\delta_j(k)k = k^2\Delta^{1/2}(\delta_j(k))$. Ainsi, après avoir fixé $\lambda = -1$ et modifié le signe global, on obtient

$$-2\tau(k^{-2}\int_0^\infty \frac{k^6\,u^2}{(k^2\,u+1)^3}\,(\Delta^{1/2}(\delta_i(k)) + \delta_i(k))\,\frac{1}{(k^2\,u+1)}\,du\,\delta_i(k))$$

$$= -2\tau((\mathcal{D}_2\,\Delta^{1/2})(\delta_i(k))\,\delta_i(k)\,k^{-2}) - 2\tau(\mathcal{D}_2(\delta_i(k))\,\delta_i(k)\,k^{-2}) \tag{32}$$

6.3.3 Termes impliquant $\mathcal{D}_3$

Ces termes proviennent de

$$T_3 = -2\,(k^4 r^6 b_0^4)\,(k\delta_1(k)b_0 k\delta_1(k) + k\delta_1(k)b_0\delta_1(k)k + k\delta_2(k)b_0 k\delta_2(k) + k\delta_2(k)b_0\delta_2(k)k + \delta_1(k)kb_0 k\delta_1(k) + \delta_1(k)kb_0\delta_1(k)k + \delta_2(k)kb_0 k\delta_2(k) + \delta_2(k)kb_0\delta_2(k)k)$$

Puisque k commute avec b_0 et que l'on travaille sous la trace, ils donnent la même chose que

$$-2\left(k^4 r^6 b_0^4\right)\left(k^2\delta_j(k)b_0\delta_j(k) + 2k\delta_j(k)kb_0\delta_j(k) + \delta_j(k)k^2 b_0\delta_j(k)\right)$$

On a $k\delta_j(k)k = k^2\Delta^{1/2}(\delta_j(k))$ et $\delta_j(k)k^2 = k^2\Delta(\delta_j(k))$. Ainsi, après avoir posé $\lambda = -1$ et changé le signe global, on obtient

$$\tau\left(\left(\mathcal{D}_3(\delta_i(k))\,\delta_i(k) + 2(\mathcal{D}_3\,\Delta^{1/2})(\delta_i(k))\,\delta_i(k) + (\mathcal{D}_3\,\Delta)(\delta_i(k))\,\delta_i(k)\right)k^{-2}\right) \tag{33}$$

Références

[1] S. Baaj, *Calcul pseudo-différentiel et produits croisés de C^*-algèbres. I et II*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 307, Série I, p. 581-586, et p. 663-666, 1988.

[2] A. Chamseddine, A. Connes, *The Spectral action principle*, Comm. Math. Phys. Vol.186 (1997), 731–750.

[3] A. Chamseddine, A. Connes, *Scale invariance in the spectral action*, J. Math. Phys. 47 (2006), N.6, 063504, 19 pp.

[4] A. Chamseddine, A. Connes, M. Marcolli, *Gravity and the standard model with neutrino mixing*, Arxiv:hep-th/0610241 https://arxiv.org/pdf/hep-th/0610241.

[5] P. B. Cohen, A. Connes *Conformal geometry of the irrational rotation algebra* Preprint MPI / 92-93.

[6] P. B. Cohen, *On the Non-commutative Torus of real dimension Two*, Number Theory and Physics, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1990.

[7] A. Connes, *C^*-algèbres et géométrie différentielle*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 290, Série A, 599-604, 1980.

[8] A. Connes, J. Cuntz, *Quasi-homomorphismes, cohomologie cyclique et positivité*, Comm. Math. Phys. 114 (1988).

[9] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[10] A. Connes, H. Moscovici, *Type III and spectral triples*, ArXiv:math/0609703 https://arxiv.org/pdf/math/0609703.

[11] P. Gilkey, *The Index Theorem and the Heat Equation*, Publish or Perish, Boston, 1974.

[12] S. Rosenberg, *The Laplacian in a Riemannian manifold*, LMS Student Texts 31, CUP, 1997.