Traduction d'un extrait du livre *Circulant matrices* de Philip J. Davis (p. 139 et suiv.)

4.6 Applications à la géométrie élémentaire plane : n-gones et K_r-diagrammes

On commence par deux théorèmes de géométrie élémentaire plane.

Théorème A. *Soient z_1, z_2, z_3, z_4 les sommets d'un quadrilatère. Relions les milieux des côtés de manière cyclique. La figure obtenue est toujours un parallélogramme (figure 4.6.1). Posons $P = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ et $C_{1/2} = \mathrm{circ}(1/2, 1/2, 0, 0)$. Cela signifie que $C_{1/2}P$ est toujours un parallélogramme. Par conséquent, la transformation $C_{1/2}$ n'est pas inversible (car si elle l'était, il existerait des quadrilatères dont les milieux seraient quelconques).*

Théorème B. *Étant donné un triangle quelconque, on peut construire sur ses côtés, vers l'extérieur (ou vers l'intérieur), des triangles équilatéraux. Les centres de ces trois triangles équilatéraux forment alors un triangle équilatéral (voir figure 4.6.2). C'est ce qu'on appelle le théorème de Napoléon.*

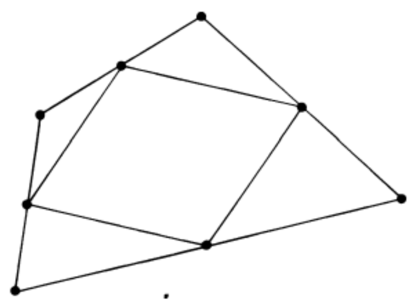

Figure 4.6.1

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

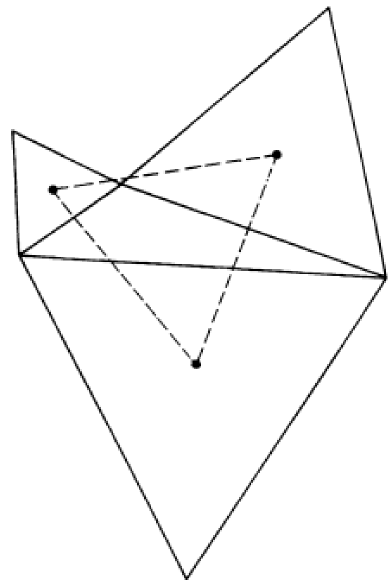

Figure 4.6.2

Notre objectif est maintenant d'unifier et de généraliser ces deux théorèmes au moyen de transformations circulantes et d'établir les propriétés extrémales de certaines configurations géométriques familières à l'aide des inverses M-P des circulantes pertinentes.

Commençons par définir des caractérisations simples pour les triangles équilatéraux et les parallélogrammes. Soient (21), (22) et (23) les sommets d'un triangle T, dans le sens antihoraire. Alors T est équilatéral si et seulement si

$$z_1 + wz_2 + w^2 z_3 = 0 \qquad w = \exp(2\pi i/3) \tag{1}$$

alors que

$$z_1 + w^2 z_2 + wz_3 = 0 \tag{2}$$

est nécessaire et suffisante pour que l'équilatéralité horaire soit vérifiée. La démonstration se déduit aisément du fait que si z_1, z_2, z_3 sont équilatéraux dans le sens horaire, ils sont les images par $z \to a + bz$ de $1, w, w^2$; c'est-à-dire si et seulement si, pour certains a, b, $z_1 = a + b$, $z_2 = a + bw$, $z_3 = a + bw^2$. Bien sûr, si $b = 0$, les trois points se réduisent à un seul point. Le centre du triangle est défini comme $z = a = \text{c.g.}(z_1, z_2, z_3)$.

Soit z_1, z_2, z_3, z_4 un quadrilatère Q non auto-intersectant donné dans le sens antihoraire. Alors Q est un parallélogramme si et seulement si

$$z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0. \tag{3}$$

Cela se démontre aisément.

Pour tout entier $n \geq 3$ et tout entier r, posons $w = \exp(2\pi i/n)$ et définissons :

$$K_r = \frac{1}{n}\,\mathrm{circ}(1, w^r, w^{2r}, \ldots w^{(n-1)r}). \tag{4}$$

Remarquons que les lignes de K_r sont identiques à la première ligne $1, w^r, \ldots, w^{(n-1)r}$, multipliée par un certain w^ℓ. En particulier, on a :

$$n = 3, \quad r = 1: \quad K_1 = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{circ}(1, w, w^2), \qquad w = \exp(2\pi i/3),$$

$$n = 4, \quad r = 2: \quad K_2 = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{circ}(1, -1, 1, -1), \quad w = \exp(2\pi i/4) = i.$$

Nous voyons (à partir de (4.4.1) et (4.4.2)) que P est équilatéral ou un parallélogramme (interprété correctement) si et seulement si $KP = 0$, c'est-à-dire si et seulement si P se trouve dans le noyau de K. Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition. Un n-gone $P = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$ est appelé un K_r-gramme si :

$$K_r P = 0 \tag{5}$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si :

$$1 + w^r z_2 + w^{2r} z_3 + \ldots + w^{(n-1)r} z_n = 0 \tag{6}$$

Le polynôme représentant K_r est

$$p(z) = \frac{1}{n}\,(1 + w^r z + w^{2r} z^2) + \ldots + w^{(n-1)r} z^{n-1} = ((w^r z)^{n-1})/n(w^r z - 1).$$

Les valeurs propres de K_r sont $p(w^{j-1})$, $\;j = 1, 2, \ldots, n$. Or, pour $j - 1 \neq n - r$, $p(w^{j-1}) = 0$, tandis que $p(w^{n-r+1}) = 1$. Ainsi, si

$$r = n - j + 1 \tag{7}$$

alors $K_r = F^*\,\mathrm{diag}(0, 0, 0, 1, 0, 0)\,F$, le 1 venant en j-ième position. Cela signifie que

$$K_r = F^* \Lambda_j F = B_j \qquad [\text{voir (3.4.9)}]. \tag{8}$$

Les B_j sont les idempotents principaux de tous les circulants d'ordre n. On a [voir après (3.4.10)]

$$K_r^2 = B_j^2 = B_j = K_r\,; \qquad K_r K_s = 0, \qquad r \neq s.$$

Si C est un circulant de rang $n-1$, alors d'après (3.3.13), pour un certain entier j, $1 \leq j \leq n$,

$$B_j = I - CC^{\div} = K_r. \tag{9}$$

D'après (8), (9) et la section 2.8.2, propriétés (1) et (2), si

$$\begin{aligned} CK_r &= CB_j = C(I - CC^{\div}) = C - CCC^{\div} = 0 \\ C^{\div}K_r &= C^{\div}B_j = C^{\div}(I - CC^{\div}) = C^{\div} - C^{\div}CC^{\div} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Plusieurs autres identités seront utiles. Soit à nouveau $K_r = \frac{1}{n}$ circ$(1, w^r, w^{2r}, \ldots, w^{(n-1)r}$. Soit Y un circulant quelconque tel que l'on puisse écrire $Y = F^*$ diag$(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ F pour η_i approprié. Alors $K_rY = (F^*\ \Lambda_j\ F)(F^*\ \mathrm{diag}(\eta_1, \ldots, \eta_n)\ F) = F^*\ \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \eta_j, 0, \ldots, 0)\ F = \eta j F^*\ \Lambda_j\ F = \eta_j K_r$. Ainsi :

$$K_rY = \eta_j K_r. \tag{11}$$

En particulier, si Y est simplement un vecteur colonne $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})^T$, alors

$$K_rY = \eta_j\ \mathrm{pc}(K_r) \tag{12}$$

où la notation pc(K_r) désigne la première colonne de K_r. On a également

$$K_rY = \sigma(1, w^{(n-1)r}, w^{(n-2)r}, \ldots, w^r)^T \tag{13}$$

où

$$\sigma = y_0 + y_1 w^r + \ldots + y_{n-1} w^{(n-1)r}. \tag{14}$$

Spécialisons Y en $Y = \mathrm{pc}(K_r)$. Alors $Y = (1/n)(1, w^{(n-1)r}, w^{(n-2)r}, \ldots, w^r)^T$. Par conséquent, d'après (14), $\sigma = 1$ et à partir de (13)

$$K_r\ \mathrm{pc}(K_r) = \mathrm{pc}(K_r). \tag{15}$$

Chaque circulant C de rang $n-1$ détermine un entier j de manière unique, et grâce à (3.3.13) et (9), on obtient une matrice K_r, donc une classe de K_r-grammes. Dans les théorèmes suivants, cette détermination sera supposée.

Théorème 4.6.1. *Soit P un n-gone. Alors il existe un n-gone $\widehat{P}$ tel que $C\widehat{P} = P$ si et seulement si P est un K_r-gramme.*

Preuve. Le système d'équations $C\widehat{P} = P$ admet une solution si et seulement si $P = CC^{\div}P$. Ceci est équivalent à $P = (I - K_r)P = PK_rP$ ou $K_rP = 0$ [d'après (4.6.9)].

Corollaire. *Soit P un K_r-gramme. Alors la solution générale de $C\widehat{P} = P$ est donnée par :*

$$\widehat{P} = C^{\div}CP + \tau \operatorname{pc}(K_r) \tag{16}$$

pour une constante τ arbitraire.

Preuve. Si P est un K_r-gramme, alors la solution générale de $C\widehat{P} = P$ est donnée par

$$\widehat{P} = C^{\div}P + (I - C^{\div}C)Y = C^{\div}P + K_rY$$

pour un vecteur colonne Y quelconque. D'après (16), $K_rY = \eta_j \operatorname{pc}(K_r)$ et le résultat s'ensuit.

Corollaire. *P est un K_r-gramme si et seulement s'il existe un n-gone Q tel que $P = CQ$.*

Preuve. Soit $P = CQ$. Alors $K_rP = K_rCQ$. Puisque $K_rC = 0$, il s'ensuit que $K_rP = 0$, donc P est un K_r-gramme. Réciproquement, soit P un K_r-gramme. Prenons maintenant pour Q un $\widehat{P}$ quelconque dont l'existence est garantie par le corollaire précédent.

Corollaire. *Étant donné un n-gone P qui est un K_r-gramme. Étant donné un nombre complexe quelconque $\widehat{z}_1$, on peut trouver un unique polygone à n sommets $\widehat{P} = (\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \ldots, \widehat{z}_n)^T$, dont $\widehat{z}_1$ est le premier sommet et tel que $C\widehat{P} = P$.*

Preuve. La solution générale de $C\widehat{P} = P$ étant $P = C^{\div}P + \tau \operatorname{pc}(K_r)$, pour tout $\widehat{z}_1$, on peut trouver une valeur unique de τ, car la première composante de $\operatorname{pc}(K_r)$ vaut 1 ($\neq 0$).

Théorème 4.6.2. *Soit P un n-gone qui est un K_r-gramme. Alors il existe un unique n-gone Q qui est un K_r-gramme tel que $CQ = P$. Il est donné par $Q = C^{\div}P$.*

Preuve : (a) Puisque P est un K_r-gramme, il est de la forme $P = CR$ pour un certain R. Donc $Q = C^{\div}P = C^{\div}CR = C(C^{\div}R)$. Par conséquent, Q est un K_r-gramme.

(b) Q est une solution de $CQ = P$, comme on peut le constater en choisissant $\tau = 0$ ci-dessus.

(c) Toutes les solutions sont de la forme $P = C^{\div}P + \tau \operatorname{pc}(K_r)$. Maintenant $\widehat{P}$ est un K_r-gramme si et seulement si $K_r\ \widehat{P} = 0$. Autrement dit, si et seulement si $K_r\ C^{\div}\ P + \tau\ K_r \operatorname{pc}(K_r) = 0$. Or $K_rC^{\div} = 0$. Mais $K_r \operatorname{pc}(K_r) = K_r$. Donc $\tau = 0$.

Théorème 4.6.3. *Soit P un K_r-gramme. Parmi l'infinité de n-gones R tels que $CR = P$, il en existe un unique de norme minimale $\|R\|$. Il est donné par $R = C^{\div}P$. Par conséquent, il coïncide avec l'unique K_r-gramme Q tel que $CQ = P$.*

Preuve. Utilisons le théorème précédent et la caractérisation par les moindres carrés de l'inverse M-P.

Supposons maintenant que P soit un n-gone quelconque et que nous souhaitions l'approcher par un K_r-gramme R tel que $\|P-R\|$ soit minimal. Tout K_r-gramme peut s'écrire sous la forme $R=CQ$ pour un n-gone Q, de sorte que notre problème est le suivant : étant donné P, trouver Q tel que $\|P-CQ\|$ soit minimal. Ce problème admet une solution, et cette solution est unique si et seulement si les colonnes de C sont linéairement indépendantes. Ce n'est pas le cas (le rang de C étant $n-1$), donc $Q=C^{\div}P$ est la solution avec $\|Q\|$ minimal. Ainsi, $R=CQ=CC^{\div}P$ est la meilleure approximation du n-gone P par un K_r-gramme avec $\|Q\|$ minimal. Nous formulons ce résultat comme suit.

Théorème 4.6.4. *Étant donné un n-gone quelconque $P=(z_1,\ldots,z_n)^T$. Le K_r-gramme unique $R=CQ$ pour lequel $\|P-R\|$ = minimum et $\|Q\|$ = minimum est donné par*

$$R \;\; = CC^{\div}P = (1-K_r)P = P - K_rP$$

où $\sigma = z_1 + z_2w^r + \ldots + z_nw^{(n-1)r}$.

On peut écrire cela sous la formulation alternative

$$R = P - \eta_j \ \mathrm{pc}(K_r) \tag{18}$$

où η_j est déterminé à partir de

$$\mathrm{circ}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F^* \ \mathrm{diag}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \ F.$$

Preuve. Comme précédemment, $R=CC^{\div}P=(I-K_r)P=P-K_rP$. Par (15), $K_rP=\eta_j\mathrm{pc}(K_r)$. Notons que R est un K_r-gramme parce que $K_rR=K_r(P-\eta_j\mathrm{pc}(K_r))=K_rP-\eta_jK_r\mathrm{pc}(K_r)$. Puisque par (15) $K_r\mathrm{pc}(K_r)=\mathrm{pc}(K_r), K_rR=0$.

Notons également que si P est déjà un K_r-gramme, $\sigma = z_1 + z_2w^r + \ldots + z_nw^{(n-1)r} = 0$. Dans ce cas, de (17), $R=P$; ainsi, comme attendu, P est sa propre meilleure approximation.

Généralement, bien sûr, l'opération $R(P)=CC^{\div}P$ est une projection sur l'espace ligne ou l'espace colonne de C.