Traduction d'un article d'Edward Kasner paru au journal American Mathematical Monthly (en mars 1903, num. 3, vol. x)

Le groupe engendré par les symétries centrales,

avec application aux polygones

Edward Kasner

Le but de cet article est de généraliser le théorème suivant, bien connu en géométrie élémentaire : si l'on joint les milieux de deux côtés consécutifs d'un quadrilatère, la figure obtenue est un parallélogramme. Dans le cas d'un triangle, la construction correspondante donne un triangle sans propriété particulière. La question se pose alors de savoir s'il existe, pour les polygones à plus de quatre côtés, un théorème analogue à celui concernant le quadrilatère. On montrera qu'à cet égard, il existe une distinction essentielle entre les polygones à nombre pair de côtés et ceux à nombre impair de côtés. Cette distinction dépend fondamentalement de la nature du groupe étudié au § 1.

§ 1. Le groupe.

1. Toute translation T du plan peut s'écrire

$$(T) \qquad \begin{aligned} x' &= x + h \\ y' &= y + k \end{aligned}$$

où h et k sont les composantes, dans la direction des axes de coordonnées, du vecteur correspondant à la translation. Il est évident que l'ensemble des translations forme un groupe ; la combinaison de deux translations quelconques, par exemple T_1 et T_2, dont les composantes vectorielles sont respectivement h_1 et k_1, et h_2 et k_2, donne

$$\begin{aligned} x' &= x + h_1 + h_2 \\ y' &= y + k_1 + k_2 \end{aligned}$$

qui est elle-même une translation.

2. Considérons maintenant les transformations appelées symétries centrales ou symétries ponctuelles. Une telle symétrie est définie par :

$$(S) \qquad \begin{aligned} x' &= -x + 2a \\ y' &= -y + 2b \end{aligned}$$

où a et b sont les coordonnées du centre de symétrie, c'est-à-dire le point fixe P par rapport auquel les points correspondants x, y et x', y' sont symétriques. Les symétries elles-mêmes ne forment pas un groupe, mais nous allons montrer que :

La translation T et les symétries centrales S forment un groupe.

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

En premier lieu, le produit de deux symétries est une translation. En effet, si le centre de S_1 est P_1 de coordonnées (a_1, b_1) et si le centre de S_2 est P_2 de coordonnées (a_2, b_2), la combinaison S_1S_2 donne

$$\begin{aligned} x' &= x + 2(a_2 - a_1) \\ y' &= y + 2(b_2 - b_1) \end{aligned}$$

Le vecteur de cette translation est le double du vecteur P_1P_2. De même, le produit S_2S_1 est la translation dont le vecteur est le double de P_2P_1. En second lieu, le produit d'une symétrie et d'une translation est une symétrie. En effet, la transformation ST est

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2a + h \\ y' &= -y + 2b + k \end{aligned}$$

Il s'agit de la symétrie dont le centre est obtenu à partir du centre de S en appliquant le vecteur de T. De même, le produit dans l'ordre inverse, c'est-à-dire TS, est la symétrie dont le centre est obtenu à partir du centre de S en appliquant le vecteur opposé à celui de T.

Il s'ensuit que toute combinaison de transformations T et S est elle-même soit une T, soit une S, ce qui démontre la propriété de groupe. Dans la terminologie de Lie, le groupe considéré est un groupe mixte à deux paramètres constitué de deux systèmes de transformations continus. Les translations forment un sous-groupe auto-conjugué.

3. Puisque le produit de deux symétries est une translation, et puisque les translations forment un groupe, il s'ensuit que le produit d'un nombre pair de symétries est une translation. Le produit des $2k$ symétries $S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$ est en fait

$$\begin{aligned} x' &= x + 2(a_{2k} - a_{2k-1} + \ldots + a_2 - a_1) \\ y' &= y + 2(b_{2k} - b_{2k-1} + \ldots + b_2 - b_1), \end{aligned}$$

où a_i et b_i désignent les coordonnées de P_i, le centre de S_i. Les formules peuvent être interprétées géométriquement en observant que les différences $a_2 - a_1$ et $b_2 - b_1$, par exemple, sont les composantes du vecteur P_1P_2 ; par conséquent, le vecteur de la translation résultante est le double de la somme vectorielle

$$P_1P_2 + P_3P_4 + \ldots + P_{2k-1}P_{2k}.$$

4. On peut combiner un nombre impair de symétries en combinant la première avec le produit de toutes les autres, ce qui, par la section 3. donne une translation. Par conséquent, le produit d'un nombre impair de symétries est une symétrie. Si les symétries sont $S_1, S_2, \ldots, S_{2k+1}$, leur produit est

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2(a_{2k+1} - a_{2k} + \ldots + a_3 - a_2 + a_1) \\ y' &= -y + 2(b_{2k+1} - b_{2k} + \ldots + b_3 - b_2 + b_1). \end{aligned}$$

Le centre de la symétrie résultante s'obtient à partir du centre P de la première symétrie en appliquant la somme vectorielle

$$P_2P_3 + P_4P_5 + \ldots + P_{2k}P_{2k+1}.$$

5. L'application que l'on peut faire de ces résultats dépend essentiellement des points fixes des transformations, c'est-à-dire des points qui se transforment en eux-mêmes. En excluant les points à l'infini, on observe tout d'abord que, dans le cas d'une symétrie, il existe un unique point fixe, à savoir le centre de symétrie. En revanche, dans le cas d'une translation, il n'existe aucun point

fixe, sauf lorsque la translation se réduit à la transformation identique, auquel cas tous les points du plan sont fixes.

§ 2. Polygones milieux.

6. Considérons un polygone quelconque dont les sommets peuvent être notés successivement $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Si l'on relie successivement les milieux des côtés, on obtient un nouveau polygone ayant le même nombre de côtés, que l'on appellera par souci de concision le polygone inscrit ; le polygone initial, par rapport au polygone inscrit, est alors appelé le polygone circonscrit. À chaque polygone correspond un polygone inscrit défini. La question à présent concerne le problème inverse : étant donné un polygone quelconque $P_1, \ldots, P_n$, est-il possible de construire un polygone inscrit, c'est-à-dire de trouver des points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tels que P_1 soit à mi-chemin entre Q_1 et Q_2, P_2 à mi-chemin entre Q_2 et Q_3, et ainsi de suite jusqu'à ce que P_n soit à mi-chemin entre P_n et P_1.

Pour répondre à cette question, prenons provisoirement un point Q quelconque du plan ; construisons par rapport à P_1 le point symétrique ; puis, par rapport à P_2, construisons le point symétrique à celui qui vient d'être obtenu ; et ainsi de suite jusqu'à obtenir, par symétrie par rapport à P_n, un point Q'. Le polygone initial $P_1, \ldots, P_n$ définit ainsi une transformation précise par laquelle à tout point Q correspond un unique point Q'. Cette transformation est simplement le produit de n symétries et, par conséquent, d'après la section précédente, est soit une translation, soit une symétrie selon que n est pair ou impair.

7. Considérons d'abord le cas d'un polygone ayant un nombre impair de côtés $n = 2k + 1$. La transformation de Q en Q' est alors une symétrie. Il existe donc, d'après le § 5, un unique point qui reste invariant par cette transformation. En notant ce point Q_1, on obtient, par symétrie successive par rapport à P_1, P_2, P_{2k}, les points Q_2, Q_3, Q_{2k+1} ; Q_{2k+1} et Q_1 sont alors nécessairement symétriques par rapport au dernier sommet P_{2k+1}, de sorte que $Q_1, \ldots, Q_{2k+1}$ sont en fait les sommets de l'unique polygone circonscrit.

Tout polygone ayant un nombre impair de côtés peut être obtenu comme polygone inscrit ; il existe un et un seul polygone circonscrit.

Le polygone circonscrit peut être construit en appliquant le résultat énoncé à la fin de la section 4. Le premier sommet Q_1 est obtenu à partir du premier sommet P_1 du polygone initial en effectuant la somme vectorielle $P_2P_3 + P_4P_5 + \ldots + P_{2k}P_{2k+1}$. Les sommets restants Q_2 et Q_{2k+1} sont ensuite obtenus par symétrie successive, comme décrit précédemment.

8. Si le polygone possède un nombre pair de côtés $n = 2k$, alors, d'après 3, la transformation de Q à Q' est une translation qui, en général, ne se réduit pas à la transformation identique. Dans ce cas, d'après 5, il n'existe aucun point fixe, et donc aucun polygone circonscrit.

Dans le cas d'un polygone quelconque à nombre pair de côtés, il n'existe pas de polygone circonscrit, c'est-à-dire que tous les polygones de ce type ne peuvent pas être obtenus comme polygones inscrits.

9. La construction sera toutefois possible dans le cas exceptionnel où la translation résultante se

réduit à l'identité. Si l'on qualifie de *spécial* un $2k$-gone pour lequel il est possible de circonscrire un polygone, on peut énoncer le résultat suivant :

Tout $2k$-gone spécial est caractérisé par le fait que le produit des symétries ayant pour centres les sommets du polygone est égal à l'identité.

La classe de polygones considérée peut être définie autrement comme suit : D'après les formules du paragraphe 3, les conditions de réduction à l'identité sont les suivantes :

$$a_{2k} - a_{2k-1} + \ldots + a_2 - a_1 = 0$$

$$b_{2k} - b_{2k-1} + \ldots + b_2 - b_1 = 0 \,;$$

qui ensemble exprime l'évanouissement de la somme vectorielle

$$P_1P_2 + P_3P_4 + \ldots + P_{2k-1}P_{2k}.$$

L'évanouissement de cette somme nécessite l'évanouissement de

$$P_2P_3 + P_4P_5 + \ldots + P_{2k}P_1,$$

puisque pour tout polygone, la somme vectorielle de tous les côtés est nulle. Par conséquent

Dans tout $2k$-gone, la somme vectorielle des côtés alternés s'évanouit ; cette condition est aussi suffisante.

L'équation de la condition ci-dessus peut aussi s'écrire

$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1}}{k} = \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2k}}{k}$$

$$\frac{b_1 + b_3 + \ldots + b_{2k-1}}{k} = \frac{b_2 + b_4 + \ldots + b_{2k}}{k}$$

qui peut s'interpréter comme suit :

Dans tout $2k$-gone particulier de sommets $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$, le point moyen (ou centre de gravité) des sommets alternés $P_1, P_3, \ldots, P_{2k-1}$ coïncide avec le point moyen des sommets restants $P_2, P_4, \ldots, P_{2k}$.

Ces deux points coïncident évidemment avec le point moyen de tous les sommets du $2k$-gone.

10. Pour un $2k$-gone particulier, la transformation de Q en Q' décrite en 6 se réduit à l'identité, de sorte que tout point du plan est un point invariant. Par conséquent, pour construire le polygone circonscrit, on peut choisir n'importe quel point pour le premier sommet Q, les autres sommets étant alors déterminés par symétrie successive par rapport à $P_1, P_2, \ldots, P_{2k-1}$.

Autour d'un $2k$-gone particulier, on peut construire une double infinité de $2k$-gones circonscrits ; autrement dit, s'il est possible de circonscrire un polygone à un $2k$-gone donné, il est possible d'en *circonscrire une double infinité.*

Nous allons maintenant démontrer que parmi cette double infinité de $2k$-gones, il en existe un qui est particulier, de sorte qu'à tout $2k$-gone particulier, il est possible de circonscrire un seul et unique $2k$-gone particulier. Soit le premier sommet Q_1 d'un polygone circonscrit quelconque P_1, noté x, y ; alors le sommet suivant Q_2, obtenu par symétrie par rapport à P_1, est $-x+2a_1, -y+2b_1$; de même, Q_2 est $x-2a_1+2a_2, y-2b_1, +2b_2$; enfin, Q_{2k} est $-x+2a_1-2a_2+\ldots+2a_{2k-1}, -y+2b_1-2b_2+\ldots+2b_{2k-1}$.

Si le polygone circonscrit doit être particulier, alors il faut que

$$Q_1Q_2 + Q_3Q_4 + \ldots + Q_{2k-1}Q_{2k} = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned} kx - (2k-1)a_1 + (2k-2)a_2 - \ldots - a_{2k-1} &= 0 \\ ky - (2k-1)b_1 + (2k-2)b_2 - \ldots - b_{2k-1} &= 0 \end{aligned}$$

Ces équations déterminent x et y, c'est-à-dire le premier sommet Q_1, de manière unique, ce qui démontre le théorème énoncé.

Les quadrilatères spéciaux sont simplement des parallélogrammes. À tout parallélogramme, on peut circonscrire une infinité double de quadrilatères, dont l'un est lui-même un parallélogramme ; à celui-ci, on peut à son tour circonscrire un parallélogramme, et ainsi de suite indéfiniment. Ainsi, pour tout $2k$-gone spécial, on peut non seulement inscrire une infinité de $2k$-gones spéciaux, mais aussi les circonscrire. De même que le quadrilatère inscrit dans un parallélogramme quelconque est lui-même un parallélogramme quelconque, le $2k$-gone inscrit dans un $2k$-gone spécial n'est pas davantage spécialisé, mais est un $2k$-gone spécial quelconque.

11. La seconde caractéristique donnée en 9 permet la construction suivante de $2k$-gones spéciaux. Soit un k-gone quelconque $D', D'', \ldots, D^{(k)}$; sur chaque côté, on construit un parallélogramme, donc sur $D'D''$, on construit $P_1D_1D_2P_2$, sur $D''D'''$, on construit $P_3D''D'''P_4$, et enfin on construit $P_{2k-1}D^{(k-1)}D^{(k)}P_{2k}$; alors $P_1, P_2, \ldots, P_{2k}$ constituent un $2k$-gone spécial. Pour le démontrer, il suffit d'observer que, puisque les côtés alternés $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ sont respectivement égaux et parallèles à $D'D'', D''D'''$, la somme vectorielle des premiers côtés est égale à la somme vectorielle de tous les côtés du k-gone auxiliaire et s'annule donc.

On constate ainsi qu'un $2k$-gone particulier est entièrement déterminé par $2k-1$ de ses sommets. En effet, si $P_1, P_2, \ldots, P_{2k-1}$ sont donnés, on peut construire le k-gone auxiliaire en partant d'un point arbitraire D', en traçant le vecteur $D'D''$ égal à P_1P_2, puis $D''D'''$ égal à P_3P_4, ..., et enfin $D^{(k-1)}D^{(k)}$ égal à $P_{2k-3}P_{2k-2}$; P_{2k} est alors trouvé en traçant à partir de P_{2k-1} un vecteur égal à $D^{(k)}D'$. Il s'agit de la généralisation du fait qu'un parallélogramme est déterminé par trois de ses sommets (donnés, bien entendu, dans l'ordre).

Après le cas du parallélogramme $k=2$, le premier cas méritant une attention particulière est le cas $k=3$, c'est-à-dire l'hexagone particulier. Un tel hexagone peut être obtenu, conformément au résultat précédent, en construisant des parallélogrammes sur les côtés d'un triangle quelconque.

Une autre construction est la suivante : prenons deux parallélogrammes quelconques $ABCO$ et $ODEF$ ayant un sommet en commun ; les sommets restants $ABCDEF$ constituent un hexagone particulier. Le même hexagone peut être obtenu de cette manière à l'aide de trois paires distinctes de parallélogrammes. Ceci peut être généralisé pour s'appliquer aux $2k$-gones.

La troisième caractéristique énoncée en 9, dans le cas d'un hexagone particulier $ABCDEF$, montre que le point médian du triangle ACE coïncide avec celui du triangle BDF ; par conséquent, les six droites obtenues en joignant chaque sommet au milieu de la diagonale opposée de l'hexagone sont concourantes, le point de concours étant le point moyen de l'hexagone.

§ 3. Extension à l'espace.

12. Les résultats précédents s'étendent immédiatement à l'espace à trois dimensions, et même aux espaces d'ordre supérieur. En effet, les translations et les symétries centrales forment toujours un ensemble, et les résultats pour les polygones dans l'espace s'enchaînent de manière tout à fait analogue à celle employée précédemment. On peut toutefois noter une différence quant à la nature des symétries ponctuelles : dans le plan, une symétrie ponctuelle est identique à une rotation du plan sur lui-même de 180° ; dans l'espace, en revanche, une symétrie ponctuelle n'est pas équivalente à une rotation, car les figures correspondantes ne sont pas congruentes, mais diffèrent par l'ordre de leurs éléments. Si l'on considère une symétrie centrale dans le plan comme une rotation, l'analogue dans l'espace serait une symétrie axiale, qui correspond en fait à une rotation de 180° autour d'un axe. Cependant, dans l'application aux polygones spatiaux, seules les symétries du premier type, c'est-à-dire les symétries ponctuelles par rapport aux sommets, sont considérées.

Les résultats restent valables en une dimension, c'est-à-dire pour des ensembles de points alignés. Ainsi, pour tout ensemble $P_1, P_2, \ldots, P_n$, il existe un ensemble "inscrit" dérivé constitué des milieux des segments P_1P_2, P_2P_3, …, P_nP_1. Cet ensemble est totalement arbitraire si n est impair, mais pas si n est pair ; les caractéristiques énoncées en 9 s'appliquent presque littéralement aux ensembles particuliers de points de ce dernier type.

Université de Columbia, New York, 15 janvier 1903.