

Polygones et polynômes

J. C. Fisher, D. Ruoff, J. Shilleto

1. Trois théorèmes à propos de n -gones

Dans cet article, une méthode algébrique sera développée pour traiter des problèmes de géométrie de nature apparemment variée. Nous utiliserons comme exemples les trois théorèmes suivants.

Théorème 1 (Napoléon, Barlotti). *Soit $A = A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un n -gone du plan et $B = B_0B_1 \dots B_{n-1}$ le n -gone dont les sommets sont les centres de n -gones réguliers tous construits extérieurement (ou intérieurement) sur les côtés de A . Alors B est régulier si et seulement si A est régulier affinement. (Voir Figure 1).*

Théorème 2. *Étant donné le carré $A = A_0A_1A_2A_3$, on définit B_j comme le sommet du triangle équilatéral intérieur à A de base A_jA_{j+1} ($j = 0, 1, 2, 3$ et $A_4 := A_0$). L'ensemble des points constitué des milieux de B_jB_{j+1} , A_jB_j et $A_{j+1}B_j$ ($j = 0, 1, 2, 3$) comprend alors les sommets d'un dodécagone régulier (figure 2).*

Théorème 3. *Tout pentagone équilatéral et équiangle en trois dimensions est planaire.*

Le théorème 1 généralise un résultat concernant les triangles attribué à Napoléon [5, p. 23]. Sa forme générale a été énoncée et démontrée pour la première fois par Barlotti [3], dont le raisonnement impliquait des calculs trigonométriques complexes. Le théorème 2 était considéré comme suffisamment difficile pour figurer comme question aux Olympiades internationales de mathématiques de 1977 (voir [12, pp. 185-188]). Le théorème 3 s'inspire d'un problème de chimie moléculaire et a été démontré par van der Waerden [18]. Sa démonstration, assez complexe, a été remplacée par plusieurs démonstrations plus simples (voir Math. Reviews 48, n° 12235 et Zbl. 416, n° 51008 pour les références).

Transcription en L^AT_EX et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

Les auteurs travaillent au Département de Mathématiques de l'Université de Regina, Regina, Canada S4S 0A2.

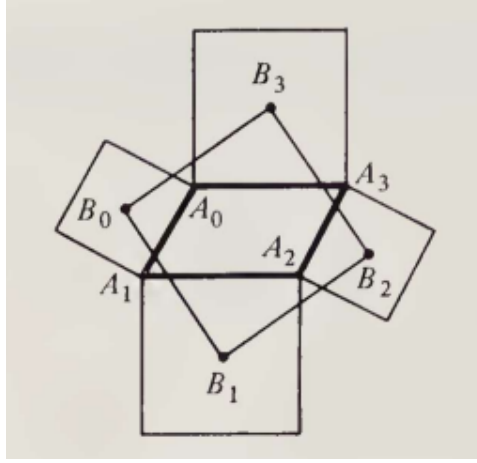


FIGURE 1. Théorème de Napoléon-Barlotti pour $n = 4$.

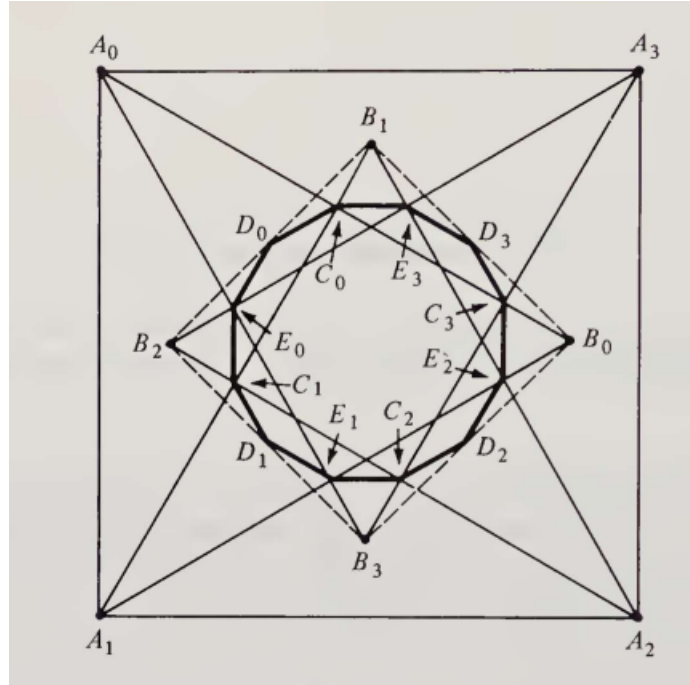


FIGURE 2. Théorème 2.

L'approche que nous utiliserons a été initialement proposée par F. Bachmann et E. Schmidt [2]. Elle a été simplifiée et développée dans [17] ; une approche similaire est présentée dans [8]. Cette théorie permet de passer d'une propriété géométrique des n -gones aux équations polynomiales qui leur sont associées. La procédure consiste à traduire un énoncé géométrique donné sous une forme algébrique, puis à effectuer des manipulations classiques pour obtenir une autre équation présentant le nouveau contenu géométrique.

Tout au long de cet article, l'exposé est élémentaire et repose uniquement sur des concepts de base impliquant des nombres complexes, des vecteurs et des polynômes. De nombreux lecteurs souhaiteront peut-être parcourir rapidement nos définitions et exemples élémentaires de la section 2, pour arriver directement à la section 2.6 ; nous y résumons les idées nécessaires aux démonstrations de

la section 3.

2. Traitement algébrique des n -gones

2.1. n -gones

Un n -gone A dans l'espace euclidien est une suite A_0, A_1, \dots, A_{n-1} de n points non nécessairement distincts. Les points de A sont appelés sommets, et les segments joignant des sommets consécutifs A_j, A_{j+1} sont appelés côtés, ou arêtes. Notons qu'un n -gone n'est ni convexe ni plan. De plus, un nombre quelconque de sommets peuvent coïncider. Un n -gone sera noté par une lettre majuscule, ses sommets par la lettre majuscule en question avec un indice.

2.2. Formules récursives des n -gones

La théorie part du constat que les n -gones peuvent être classés selon les relations linéaires entre leurs sommets. Par exemple, un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles ; c'est-à-dire

$$A_3 - A_2 = A_0 - A_1.$$

La formule reste vraie si les indices sont permutés cycliquement. Par conséquent

$$A_{j+3} - A_{j+2} = A_j - A_{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad A_{j+4} := A_j.$$

On peut écrire ces 4 équations de façon condensée comme suit :

$$(A_3, A_0, A_1, A_2) - (A_2, A_3, A_0, A_1) = (A_0, A_1, A_2, A_3) - (A_1, A_2, A_3, A_0)$$

Notons l'élégance de la formule si un décalage cyclique est indiqué par le facteur multiplicatif x , un double décalage par x^2 , etc. Alors la formule ci-dessus se lit simplement

$$(x^3 - x^2) \cdot A = (1 - x) \cdot A$$

où $A = (A_0, A_1, A_2, A_3)$.

Notation. La multiplication d'un n -gone par x^k dénotera un décalage cyclique du n -gone de k places vers la gauche, i.e., etc.

$$\begin{aligned} x \cdot (A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= (A_1, \dots, A_{n-1}, A_0), \\ x^2 \cdot (A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= (A_2, \dots, A_{n-2}, A_0, A_1), \end{aligned}$$

De nombreuses propriétés géométriques peuvent s'exprimer par des équations de la forme

$$p(x) \cdot A = 0, \quad 0 = (0, 0, \dots, 0), \quad (*)$$

où 0 est l'origine. Pour $p(x) = x^d - c_{d-1}x^{d-1} - \dots - c_0$, (*) est une abréviation de

$$A_{j+d} = c_{d-1}A_{j+d-1} + c_{d-2}A_{j+d-2} + \dots + c_0A_j, \quad (**)$$

où $j < n$ and $A_{j+n} := A_j$. Par conséquent, les sommets $A_d, A_{d+1}, \dots, A_{n-1}$ sont définis récursivement par (**) en commençant à partir de A_0, A_1, \dots, A_{d-1} .

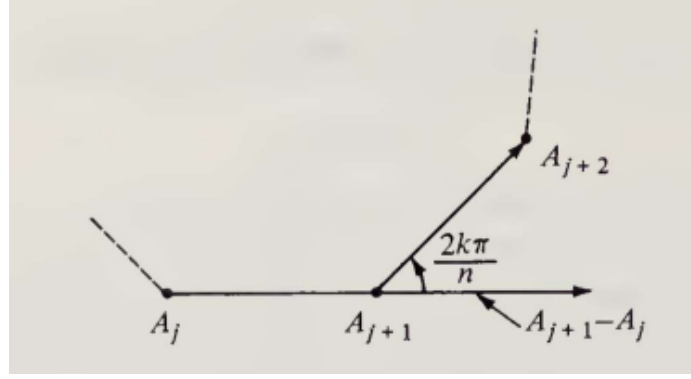


FIGURE 3. n -gones réguliers (Exemple (c)).

EXEMPLES.

- (a) Les parallélogrammes sont des quadrilatères A satisfaisant $(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot A = 0$ (voir ci-dessus).
- (b) Les n -gones A qui se répètent après m étapes, où $m|n$, satisfont $(x^m - 1) \cdot A = 0$. Quand $m = n$, on a $(x^n - 1) \cdot A = 0$, qui est satisfaite par tout n -gone, puisqu'un décalage cyclique de n places est l'identité.

Dans le plan euclidien, on peut identifier les vecteurs (a, b) aux nombres complexes $a + bi$. L'équation (*) est alors une condition sur les n -uplets de nombres complexes. En fait, des propriétés géométriques intéressantes peuvent être exprimées sous cette forme lorsque $p(x)$ peut avoir des coefficients complexes. Ceci s'explique par le fait que la rotation d'un vecteur $a + bi$ d'un angle θ correspond à sa multiplication par $e^{i\theta}$.

- (c) Les n -gones réguliers du plan A vérifient $\omega(x \cdot A - A) = x^2 \cdot A - xA$, où $\omega = e^{2k\pi i/n}$ et k est un entier quelconque. Cela signifie que $\omega(A_{j+1} - A_j) = A_{j+2} - A_{j+1}$, c'est-à-dire que le vecteur $A_{j+1} - A_j$, après une rotation d'un angle $2\pi k/n$, devient $A_{j+2} - A_{j+1}$ (voir figure 3). Si $k = \pm 1$, alors A est convexe; sinon, A est un n -gone étoilé régulier (lorsque k est premier avec n), ou un polygone régulier à sommets répétés.

- (d) Les n -gones réguliers affinement satisfont à l'équation $x^3 \cdot A - A = (1 + c)(x^2 \cdot A - x \cdot A)$, où $c = 2\cos(2k\pi/n)$; ils possèdent n sommets distincts lorsque k est premier avec n . Rappelons qu'une affinité est la composition d'une transformation linéaire non singulière et d'une translation [5, §13.3]. Un n -gone régulier affinement est défini comme l'image d'un n -gone régulier par une affinité. Étant donné que les affinités préservent les rapports des segments parallèles ([5, p. 443, 14] ou [6, §2]) et étant donné que le n -gone régulier dans (c) satisfait $A_{j+3} - A_j = (1 + c)(A_{j+2} - A_{j+1})$, l'équation ci-dessus est valable (voir Figure 4).

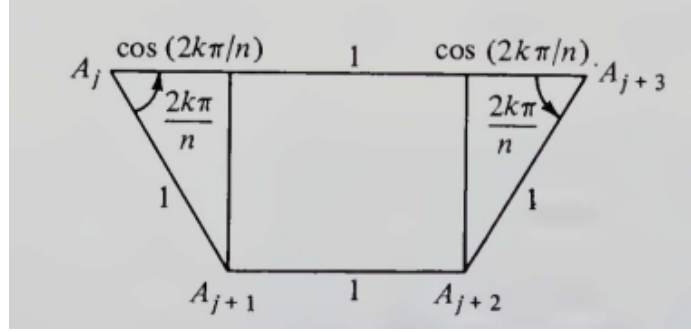


FIGURE 4. $A_j A_{j+3} : A_{j+1} A_{j+2} = 1 + 2 \cos(2k\pi/n) : 1$.

Un n -gone A régulier affinement peut également être caractérisé comme l'orbite bidimensionnelle d'une affinité α de période n ; c'est-à-dire $A = (A, \alpha A, \alpha^2 A, \dots, \alpha^{n-1} A)$ et $\alpha^n A = A$ [6, § 3]

2.3. Quelques applications élémentaires

(a) Prenons comme premier exemple très simple la démonstration algébrique du fait (évident) que les n -gones réguliers sont réguliers affinement. D'après la section 2.2 (c), A est un n -gone régulier si et seulement si $(x - 1)(x - \omega) \cdot A = 0$ où $\omega = e^{2k\pi i/n}$ et k est premier avec n . Multiplions les deux membres de cette équation par $x - \omega^{-1}$ et posons $c = \omega + \omega^{-1} = 2 \cos(2k\pi/n)$ pour obtenir $(x - 1)(x^2 - cx + 1) \cdot A = 0$. Ceci correspond à la condition (d) de la section 2.2.

(b) Les milieux des côtés d'un quadrilatère A forment les sommets d'un parallélogramme B . La figure du milieu B est simplement $\frac{1}{2}(x + 1) \cdot A$. Or, $(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot B = (x - 1)(x^2 + 1) \cdot B = (x - 1)(x^2 + 1)\frac{1}{2}(x + 1) \cdot A = \frac{1}{2}(x^4 - 1) \cdot A = 0$. D'après la section 2.2 (a), B est un parallélogramme.

(c) Pour tout $n \geq 3$, l'ensemble des n -gones réguliers, convexes et orientés dans le sens antihoraire du plan euclidien est un espace vectoriel bidimensionnel sur les nombres complexes. Les conditions spécifient tous les n -gones A qui satisfont $(x - 1)(x - \omega) \cdot A = 0$ où $\omega = e^{2k\pi/n}$ (voir section 2.2 (c)). Ces n -gones forment un espace vectoriel puisque

$$(x - 1)(x - \omega) \cdot (c \cdot A + d \cdot B) = c(x - 1)(x - \omega) \cdot A + d(x - 1)(x - \omega) \cdot B.$$

Une base de cet espace vectoriel est constituée de deux n -gones quelconques de centres différents, par exemple $A = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$ and $B = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}) + (1, 1, 1, \dots, 1)$. Ceci est vrai car tout C donné est de la forme $(c, c\omega, c\omega^2, \dots, c\omega^{n-1}) + (d, d, d, \dots, d)$; d'où $C = (c - d) \cdot A + d \cdot B$.

Ce théorème peut être généralisé en remplaçant le polynôme $(x - 1)(x - \omega)$ par un polynôme quelconque. Sous sa forme actuelle, il a pour conséquence immédiate le théorème de Finsler et Hadwiger [10, p. 324] :

(d) Supposons que deux carrés $ABCD$ et $AB'C'D'$ partagent un sommet A et soient orientés de manière similaire. Les quatre points formés par les centres des carrés et les milieux de BD' et $B'D$ peuvent alors être ordonnés pour former les sommets d'un carré (voir figure 5).

Pour la démonstration, on remarque que si A est le premier sommet d'un carré et le troisième de l'autre, alors la figure obtenue est égale à la moitié de la somme des sommets des deux carrés et

est donc elle-même un carré.

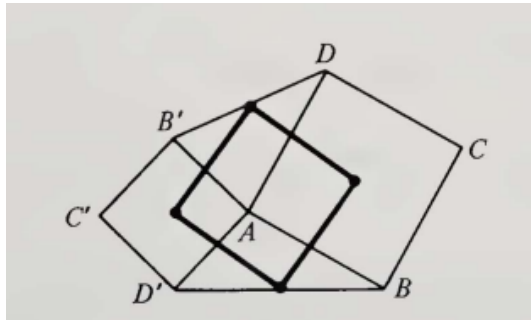


FIGURE 5. Théorème de Finsler-Hadwiger (partie (d)).

On trouvera d'autres exemples intéressants dans [2]. La théorie peut également être appliquée avec succès aux exercices du § 13.2 de [5] et à [16, § 2].

2.4. Décomposition des n -gones

Factoriser un polynôme correspond à une décomposition d'un n -gone au sens suivant.

Théorème. *Étant donné le n -gone A et les polynômes premiers entre eux $p(x)$ et $q(x)$ tels que $p(x)q(x) \cdot A = 0$, alors il existe des n -gones uniques B et C tels que $A = B + C$ et $p(x) \cdot B = q(x) \cdot C = 0$.*

La démonstration est simple si l'on considère le théorème correctement (comme impliquant un module sur un élément premier) [17, Théorème 2], mais elle ne sera pas donnée ici.

EXEMPLES.

(a) Tout polygone à n côtés $A = B + C$ tel que $(x^{n-1} + \dots + x + 1) \cdot B = (x - 1) \cdot C = 0$, car $(x^n - 1) \cdot A = 0$. Par conséquent, C a pour centre 0 ; c'est-à-dire que $\frac{1}{n}(B_{n-1} + \dots + B_1 + B_0) = 0$. Ainsi, C est nécessairement le centre de A , et B est simplement la figure translatée. Plus généralement, si $(x - 1)p(x) \cdot A = 0$ et $x - 1 \nmid p(x)$, alors B , la figure translatée de A de centre 0, vérifie $p(x) \cdot B = 0$.

(b) Tout triangle A est la somme de deux triangles réguliers. Sans perte de généralité, supposons que le triangle A ait pour centre 0, de sorte que $(x^2 + x + 1) \cdot A = 0$. Pour $\omega = e^{2\pi i/3}$, on a $x^2 + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^{-1})$. Donc, d'après le théorème, $A = B + C$, où B et C sont des triangles réguliers d'orientations opposées, c'est-à-dire $(x - \omega) \cdot B = (x - \omega^{-1}) \cdot C = 0$.

De même, un parallélogramme peut être décomposé en deux carrés, puisque $x^2 + 1 = (x - i) \cdot (x + i)$ (voir section 2.2 (a) et (c)). En général, un polygone est la somme de deux polygones réguliers, car $x^2 - cx + 1 = (x - \omega)(x - \omega^{-1})$ pour $c = 2 \cos(2k/n)$ (voir section 2.2 (c) et (d)).

2.5. Polygones tridimensionnels réguliers affinement

Bien que l'idée d'un polygone tridimensionnel puisse paraître étrange au premier abord, elle présente des applications intéressantes. Par exemple, notre troisième théorème principal se ramène à la question de l'existence et de la nature exacte des n -gones tridimensionnels réguliers et réguliers affinement. En transposant le cas planaire, nous définissons les premiers comme des orbites d'isométries périodiques engendrant l'espace tridimensionnel [7, § 1.5], et les seconds comme des orbites d'affinités périodiques dans l'espace tridimensionnel. De même, les n -gones réguliers affinement sont les images affines non dégénérées des n -gones réguliers.

Théorème. *Tout n -gone proprement tridimensionnel régulier affinement possède un nombre pair de sommets.*

Preuve. (On considère ici la version affine de 1.7.2 dans [7, p. 6]). L'affinité génératrice du polygone donné est finie et possède donc un point fixe (coïncidant avec le centre du polygone). Notre affinité n'est pas équivalente à une rotation, car le polygone serait alors situé dans un plan. Elle est donc équivalente à une réflexion rotatoire, un mouvement composé d'une rotation (éventuellement l'identité) et d'une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à l'axe [5, 7.41 et 7.52]. Ceci fait que les sommets du polygone se trouvent alternativement dans l'un ou l'autre de deux plans parallèles ; par conséquent, le nombre de sommets est pair. \square

EXEMPLE. Soit A un n -gone dont les sommets forment un antiprisme hexagonal ; autrement dit, soit A affinement équivalent à un zigzag dont les sommets se situent alternativement sur deux cercles congruents dans des plans perpendiculaires à l'axe passant par leurs centres. L'affinité qui engendre A est équivalente au produit commutatif d'une rotation de $2\pi/12$ autour de l'axe et d'une réflexion par rapport au plan équidistant des deux centres. Un tel n -gone est appelé antiprismatique dans [7, p. 6] et 12-prismatoïde dans [17, § 4]. D'après le théorème de décomposition de la section 2.4, A peut être considéré comme la somme de B et C , où B est un 12-gone régulier affinement et C un segment répété six fois. On peut imaginer B comme situé dans un plan horizontal, de sorte que les sommets de A se trouvent aux extrémités de segments verticaux attachés au 12-gone alternativement au-dessus et en dessous de B . Il s'ensuit que A satisfait l'équation $(x-1)(x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1) \cdot A = 0$.

Remarque. Plus généralement, si le polygone tridimensionnel A est l'orbite d'une affinité de période n , il satisfait $(x-1)(x+1)(x^2-cx+1) \cdot A = 0$ où $c = 2\cos(2k\pi/n)$. Les nombres k successifs représentent les sommets d'un prisme ou d'un antiprisme $n/2$ -gonal. Un résultat similaire est obtenu pour les orbites d'affinités en dimensions supérieures [17, § 4].

2.6. Résumé

Nous concluons notre discussion théorique par un exemple illustrant explicitement comment obtenir des informations géométriques à partir d'une équation associée à un polygone. Suit un dictionnaire d'équivalences géométriques et algébriques. Considérons un dodécagone A tel que $(x^4-x^2+1) \cdot A = 0$ (Remarquons que $x^4-x^2+1 \mid x^{12}-1$). A est régulier affinement en dimension quatre. Ceci est dû au fait qu'une affinité est définie par les conditions $\alpha(A_j) = A_{j+1}$ sur le simplexe A_0, A_1, \dots, A_4 ; en appliquant la formule récursive $(x^4-x^2+1) \cdot A = 0$, on obtient pour tout j , $\alpha(A_j) = A_{j+1}$.

L'hexagone B formé en prenant les sommets de A est une figure plane affine. Ceci est vrai car $A_{j+4} - A_{j+2} + A_j = 0$ implique (par remplacement de j par $2j$) que $B_{j+2} - B_{j+1} + B_j = 0$. Ainsi, B est annulé par $x^2 - x + 1$ et est régulier affinement. (voir section 2.2 (d)). De même, les sommets impairs de A forment un hexagone plan régulier affinement C , et on alterne entre B et C lorsqu'on parcourt A . De plus, $((x^3)^2 + 1) \cdot A = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \cdot A = 0$, donc chacun des trois quadrangles est un parallélogramme (voir section 2.2 (a)). Puisque $A_{j+6} + A_j = 0$, on a $A_{j+7} - A_{j+6} = -(A_{j+1} - A_j)$, et donc les côtés opposés de A sont égaux à son centre.

Nous listons maintenant dans deux colonnes à lire ligne par ligne quelques équivalents algébriques d'énoncés géométriques concernant les n -gones.

Assertion géométrique	Équivalent algébrique
Les sommets de A se répètent après m étapes	$(x^m - 1) \cdot A = 0$
A est un n -gone régulier (à n sommets distincts)	$(x - 1)(x - \omega) \cdot A = 0$ où $\omega = e^{2k\pi i/n}$ (avec k premier à n) (Section 2.2 (c))
A est un n -gone régulier affinement	$(x - 1)(x^2 - cx + 1) \cdot A = 0$ où $c = \omega + \omega^{-1}$ (Section 2.2 (d))
Cas particulier : A est un parallélogramme	Cas particulier : $c = 0$
B est le n -gone de sommets les milieux des côtés de A	$B = \frac{1}{2}(x + 1) \cdot A$ (Section 2.3 (b))
A est centré en 0	$p(x) \cdot A = 0$ implique $x - 1 \nmid p(x)$ pour un certain $p(x)$
B est formé en prenant tous les m -ièmes sommets du n -gone A , où $m n$, et ses sommets se répètent après n/m étapes.	Si $p(x^m) \cdot A = 0$ alors $p(x) \cdot B = 0$ (Section 2.6)
Le nombre n de sommets de A est pair, les côtés opposés de A sont parallèles et égaux, et A est par conséquent symétrique par rapport à son centre.	$(x - 1)(x^{n/2} + 1) \cdot A = 0$ (Section 2.6)

3. Preuves des trois théorèmes

3.1. Preuve du théorème 1 et un théorème de B. H. Neumann

Les hypothèses du théorème 1 impliquent que $\omega \cdot (A_{j+1} - B_j) = A_j - B_j$, où $\omega = e^{2\pi i/n}$ et $j < n$ (voir figure 6). Par conséquent, dans notre notation, $\omega \cdot (x \cdot A - B) = A - B$ et $(x - \omega^{-1}) \cdot A = (1 - \omega^{-1}) \cdot B$. En multipliant les deux membres par $x - \omega$, on obtient $(x - \omega)(x - \omega^{-1}) \cdot A = 0$ si et seulement si $(x - \omega) \cdot B = 0$. Autrement dit, A est régulier affinement (de centre 0) si et seulement si B est régulier affinement (de centre 0) selon la section 2.2 (c) et (d). \square

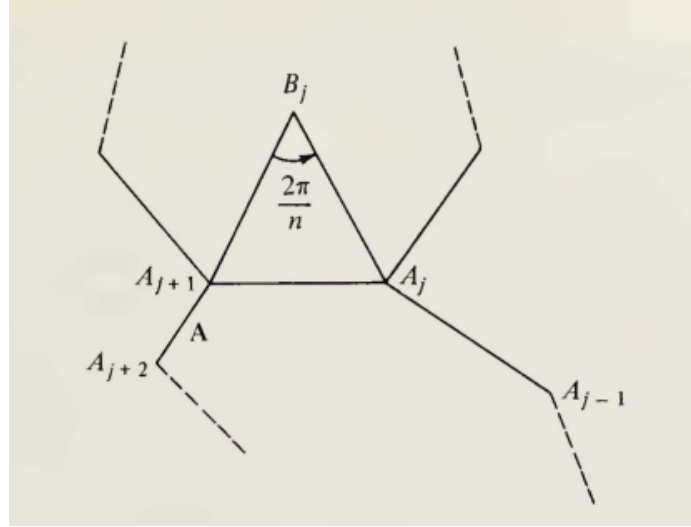


FIGURE 6. B_j est le centre d'un n -gone régulier érigé sur $A_j A_{j+1}$.

La démonstration du théorème 1 s'applique à toute racine n -ième de l'unité. Par exemple, lorsque $\omega = e^{-2\pi i/n}$, les sommets de B sont les centres de n -gones réguliers construits intérieurement sur les côtés de A . On en arrive ainsi à la notion d'opérateur C , une légère modification d'un concept de B. H. Neumann [15, p. 233 et suiv. Voir également la note (2) en annexe]. Un tel opérateur associe à un n -gone A^0 une suite de n -gones A^0, A^1, A^2, \dots . La définition inductive de A^k à partir de A^{k-1} fait intervenir un n -gone régulier engendré par une rotation d'angle $2k\pi/n$; appelons ce n -gone ω_k -régulier. Pour effectuer la k -ième étape de la construction, on érige sur chaque côté $A_j^{k-1} A_{j+1}^{k-1}$ du n -gone précédent A^{k-1} un n -gone ω_k -régulier et on prend son centre comme étant le sommet A_j^k de A^k (Figure 7).

Théorème (Douglas, Neumann). *Le n -gone A^{n-2} de la séquence A^0, A^1, A^2, \dots obtenu à partir du n -gone A^0 en appliquant l'opérateur C (décrit ci-dessus) est régulier.*

Preuve. Exactement comme dans le théorème 1, $(x - \omega_k^{-1}) \cdot A^{k-1} = (1 - \omega_k^{-1}) \cdot A^k$. Donc $A^{n-2} = c(x - \omega_1^{-1})(x - \omega_2^{-1}) \dots (x - \omega_{n-2}^{-1}) \cdot A^0$, où c est la constante $[(1 - \omega_1^{-1})(1 - \omega_2^{-1}) \dots (1 - \omega_{n-2}^{-1})]^{-1}$. Par conséquent, $(x - 1)(x - \omega_1) \cdot A^{n-2} = (x - 1)(x - \omega_{n-1}^{-1}) \cdot A^{n-2} = c(x^n - 1) \cdot A^0 = 0$.

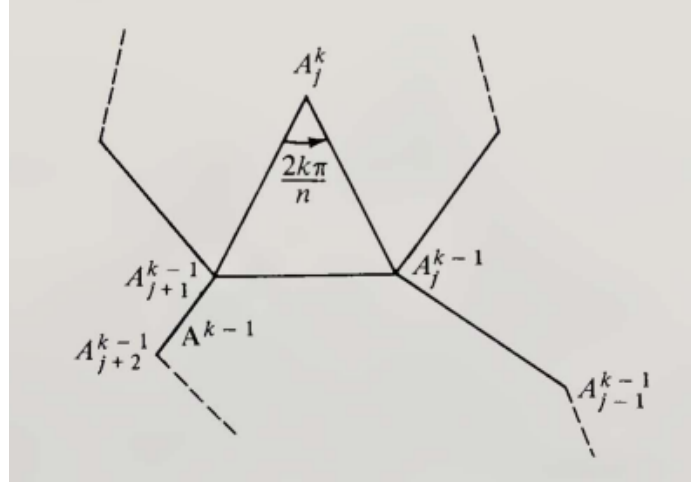


FIGURE 7. A_j^k est le centre d'un n -gone ω -régulier érigé sur $A_j^{k-1}A_{j+1}^{k-1}$.

En réarrangeant les facteurs $x - \omega_k^{-1}$ dans la formule ci-dessus pour A^{n-2} , on obtient une construction différente. Au lieu de construire d'abord des polygones ω_1 -réguliers sur les côtés du polygone donné, puis des polygones ω_2 -réguliers sur les côtés du polygone obtenu, etc., on peut utiliser les racines de l'unité dans n'importe quel ordre. Ce fait peut parfois s'exprimer en termes géométriques plus familiers. Illustrons les différents aspects du théorème dans le cas $n = 4$.

Remarquons d'abord qu'un 4-gone ω_1 -régulier ou ω_3 -régulier est un carré dont les sommets sont pris respectivement dans le sens antihoraire et horaire. Un n -gone ω_2 -régulier est un segment de droite (ou plus précisément, un segment de droite répété deux fois).

(a) On construit d'abord des quadrilatères réguliers ω_2 , puis des quadrilatères réguliers ω_1 (ou ω_3). Puisque $A^1 = \frac{1}{2}(x+1)A^0$ est un parallélogramme (section (b)), le théorème de Napoléon-Barlotti implique le théorème de Douglas-Neumann dans ce cas; c'est-à-dire que $(1-i)^{-1}(x-i)A^1$ (ou $(1+i)^{-1}(x+i)A^1$) est un carré (voir figure 1). Autrement dit, un carré est formé par les centres de carrés dont les bases rejoignent les milieux de côtés consécutifs d'un quadrilatère.

(b) On commence par ω_1 (ou ω_3) et on continue avec ω_2 . Le même carré est égal au produit des polynômes appliqués à A^0 dans l'ordre inverse. Par conséquent, les sommets de triangles rectangles isocèles tous construits extérieurement (ou intérieurement) sur les côtés d'un quadrilatère forment un polygone dont le milieu est un carré.

(c) Neumann [15, 3.5] montre que le théorème de Finsler et Hadwiger (section 2.3 (d)) découle immédiatement du précédent. Pour le démontrer, appliquons (b) au quadrilatère dégénéré $ACAC'$ de la figure 5.

(d) On utilise d'abord ω_1 , puis ω_3 . On interprète géométriquement l'équation $(x^2-1)(x+i)(x-i) \cdot A^0 = (x^4-1) \cdot A^0 = 0$. Les premier et troisième points du quadrilatère $(1+i)^{-1}(x+i)(1-i)^{-1}(x-i) \cdot A^0$ sont égaux car ce quadrilatère est annulé par x^2-1 . Par conséquent, lorsque des triangles rectangles isocèles de sommets B, D, B', D' sont construits sur les côtés d'un quadrilatère $A_0^0 A_1^0 A_2^0 A_3^0$ (tous extérieurs ou tous intérieurs), les segments BD et $B'D'$ forment les diagonales de carrés ayant un sommet commun (figure 8).

Pour d'autres généralisations intéressantes du théorème de Napoléon, voir [11, p. 40].

3.2. Preuve du théorème 2 et une version affine de ce théorème

Les milieux mentionnés dans le théorème 2 seront notés C_j , D_j et E_j . Ainsi, $C_j = \frac{1}{2}(A_j + B_j)$, $D_j = \frac{1}{2}(B_j + 1 + B_j + 2)$, $E_j = \frac{1}{2}(A_j + B_j + 3)$, et les carrés formés satisfont les équations $C = \frac{1}{2}(A + B)$, $D = \frac{1}{2}(x + x^2) \cdot B$ et $E = \frac{1}{2}(A + x^3 \cdot B)$.

Il nous faut démontrer que $F := C_0D_0E_0C_1D_1E_1C_2D_2E_2C_3D_3E_3$ est un dodécagone régulier. Ceci peut s'exprimer par les équations $D = \omega \cdot C$, $E = \omega \cdot D$ et $x \cdot C = \omega \cdot E$, où $\omega = e^{2\pi/12} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$. Un calcul simple montre que $A = (1 + \sqrt{3})D$ (voir figure 2) ; donc $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(x + x^2) \cdot B$. Maintenant, $E - \omega \cdot D = \frac{1}{2} \cdot [(A + x^3 \cdot B) - \omega(x + x^2) \cdot B] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} \cdot (1 + \sqrt{3})(x + x^2) + x^3 - \omega(x + x^2)] \cdot B =: p(x) \cdot B$.

Nous devons démontrer que $p(x) \cdot B = 0$. Pour ce faire, il suffit de montrer que $p(x)$ contient le facteur $x - i$ (puisque B est un carré).

C'est effectivement le cas, car $p(i) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(i - 1) - i - \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)(i - 1)] = 0$. De ce résultat et de la symétrie dans la construction de C et E , il découle que $D = \omega \cdot C$. Ainsi, une rotation de 30° transforme le carré C en le carré D et le carré D en le carré E . (En bref, puisque 0 est le centre commun ($x - 1 \nmid p(x)$), nous avons montré que $D_j0E_j = 30^\circ$ et, par symétrie, $C_j0D_j = 30^\circ$. De plus, puisque $D_j0D_{j+1} = 90^\circ$, il s'ensuit que $E_j0C_{j+1} = 30^\circ$ également ; voir la figure 2). Par conséquent, F doit être un dodécagone régulier. \square

Version affine. On prend l'équation $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})(x + x^2) \cdot B$ comme point de départ de la version affine de ce théorème. Étant donné le parallélogramme B , on obtient A à partir du milieu de B (en fait $x \cdot B$) par homothétie de facteur $1 + \sqrt{3}$. On construit le 12-gone F comme dans le théorème 2. Alors F est régulier affinement et, en fait, $(x^2 - \sqrt{3}x + 1) \cdot F = 0$. Ceci est vrai car, d'après le théorème 2, A , B et F sont tous des images, par affinité α , de polygones réguliers.

Remarque. Un calcul direct, suivant le même raisonnement que dans le théorème 2, démontre que si A et B sont deux parallélogrammes quelconques de même centre, alors F , tel que défini ci-dessus, vérifie $(x^4 - x^2 + 1) \cdot F = 0$. Ainsi, F est le 12-gone de l'exemple 2.6.

3.3. Démonstration du théorème 3 et généralisation

Les hypothèses sur le pentagone A impliquent que les côtés $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_4A_0$ sont congruents, de même que les diagonales $A_0A_2, A_1A_3, \dots, A_4A_1$. Ainsi, A est congruent à $x \cdot A$, de sorte qu'il existe une isométrie reliant A_j à A_{j+1} . Puisque A est l'orbite d'une isométrie en trois dimensions, elle est bidimensionnelle (voir le théorème de la section 2.5).

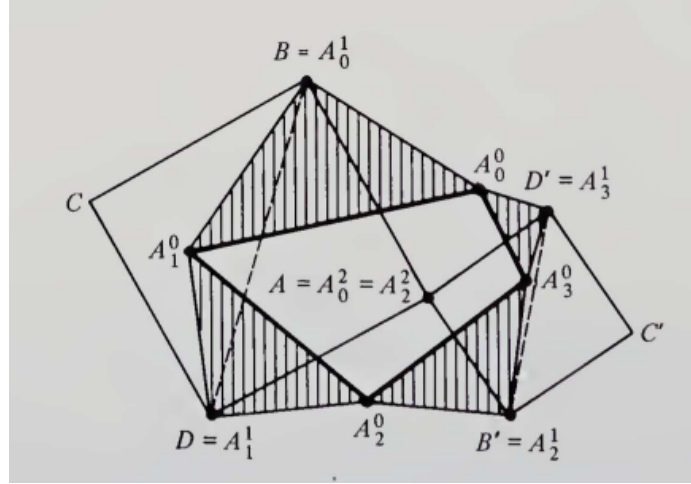


FIGURE 8. Le théorème de Douglas-Neumann (Section 3.1 (d)).

Généralisation. La démonstration de la section 3.3 apporte en réalité davantage de résultats que ceux annoncés précédemment [13, 14]. Selon la terminologie de Branko Grünbaum, un n -gone A en trois dimensions est dit 3-équilatéral (avec les paramètres $c_r, r = 1, 2, 3$) si, pour chaque sommet $A_j, A_j A_{j+r} = c_r$. Il s'avère que si A est 3-équilatéral et si n est impair, alors A est planaire ; si n est pair, alors $A_1 A_3 \dots A_{n-1}$ et $A_0 A_2 \dots A_{n-2}$ sont tous deux des $n/2$ -gones plans réguliers. Des résultats similaires sont obtenus pour l'espace euclidien de dimension impaire ([14] ; voir également [17, théorème 7]).

Annexe

Depuis mai 1979, date de la présentation de cet article, plusieurs exemples et références ont été portés à notre attention.

(1) Le théorème (d) de la section 2.3, attribué à Finsler et Hadwiger, découle directement de résultats établis depuis longtemps. Murray S. Klamkin nous a aimablement fourni une liste de références qu'il a compilée avec Leon Bankoff : Amer. Math. Monthly, 1932, p. 46, 291, 535, 559 ; 1933, p. 36, 157 ; 1934, p. 330, 370 ; 1937, p. 525 ; 1943, p. 64 ; 1969, p. 698 ; Math. Mag., 1966, p. 166. Voir la solution du problème 464 dans [Crux Mathematicorum 6 (1980), 185-187] pour une discussion plus complète.

(2) Le théorème de la section 3.1 a été découvert indépendamment en 1940 par B. H. Neumann [15] et Jesse Douglas [Geometry of polygons in the complex plane. J. Math. Physics M.I.T. 19 (1940), 93-130]. Voir également J. London Math. Soc. 17 (1942), 162-166 pour d'autres présentations de ces résultats.

(3) Voici deux autres résultats de la théorie des n -gones que nous avons découverts récemment. Tous deux découlent plus ou moins naturellement de notre théorie.

Théorème A (Jesse Douglas). *Soit A un pentagone quelconque en trois dimensions, et $B_j = \frac{1}{2}(A_{j+2} + A_{j-2})$ le milieu du côté opposé à A_j . Si $C_j = B_j + (1/\sqrt{5})(B_j - A_j)$ et $D_j = B_j - (1/\sqrt{5})(B_j - A_j)$, alors C et D sont des pentagones plans et réguliers affinement,*

C est convexe et D a la forme d'une étoile.

Théorème B. Définissons une suite $A^1 A^2 A^3 \dots$ de n -gones comme suit : A^1 est un n -gone quelconque, et A^{k+1} est la figure du milieu de A^k agrandie par un facteur d'échelle approprié. Alors, lorsque $k \rightarrow \infty$, A^{2k} tend vers un n -gone planaire régulier affinement.

Pour une démonstration élégante du théorème A utilisant les séries de Fourier finies et une discussion de ses conséquences (avec des références complémentaires), voir l'article d'I. J. Schoenberg dans ce volume.

La plus ancienne mention du théorème B que nous ayons trouvée se trouve dans [15, p. 233], bien que Neumann nous ait signalé une référence allemande datant de la fin des années 1920. Le théorème, ainsi que ses nombreuses variantes et développements, ont été redécouverts à maintes reprises depuis. Pour des références complémentaires, voir Math. Reviews 15-55, 31, n° 3925, 40, n° 7940, 40, no 7941, 42, ° 6716, 43, n° 1037, 48, n° 12291, 49, n° 3683, 53, n° 9037; Elem. Math. 16 (1961), 73-78; Math. Mag. 52 (1979), 102-105; Amer. Math. Monthly 88 (1981), 145-146.

(4) Le théorème 1 a été redécouvert [Leon Gerber, Amer. Math. Monthly 87 (1980), 644-648]. Cet article contient une bibliographie de références connexes sur les n -gones.

Références

- [1] Bachmann, Friedrich, n -gons. *Ed. Studies in Math.* 3 (1971), 288-309.
- [2] Bachmann, Friedrich, Schmidt, E., n -gons. Math. Expositions No. 18, University of Toronto Press 1975. (This is a translation by Cyril W. L. Garner of n -Ecke. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.)
- [3] Barlotti, Adriano, Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -agono regolare. *Boll. Un. Mat. Ital.* (3) 10 (1955), 96-98.
- [4] Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes* (2nde éd.). Collier-Macmillan, New York 1963.
- [5] Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry* (2nde éd.). Wiley, New York, 1969.
- [6] Coxeter, H. S. M., Affinely regular polygons. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 34 (1969), 38-58.
- [7] Coxeter, H. S. M., *Regular Complex Polytopes*. Cambridge Univ. Press 1974.
- [8] Davis, Philip J., Cyclic transformations of polygons and the generalized inverse. *Canad. J. Math.* 29 (1977), 756-770.
- [9] Dunitz, J. D., Waser, J., The planarity of the equilateral, isogonal pentagon. *Elem. Math.* 27 (1972), 25-32.
- [10] Finsler, P., Hadwiger, H., Einige Relationen im Dreieck. *Comment. Math. Helv.* 10 (1937), 316-326.
- [11] Forder, H. G., *The Calculus of Extension*. Chelsea, New York 1960.

- [12] Greitzer, Samuel L., *International Mathematical Olympiads 1959-1977*. Math. Assoc. Amer. (New Math. Library 27), Washington, D.C. 1978.
- [13] Korchmaros, Gabriele, Poligoni regolari. *Riv. Mat. Univ. Parma* (4) 1 (1975), 45-50.
- [14] Lawrence, Jim, k -equilateral $(2k + 1)$ -gons span only even dimensional spaces. In *The Geometry of Metric and Linear Spaces* (Proc. Conf. Michigan State U., East Lansing, Mich., 1974), Lecture Notes in Math., Vol. 490, Springer, Berlin, 1975.
- [15] Neumann, B. H., Some remarks on polygons. *J. London Math. Soc.* 16 (1941), 230-245.
- [16] Schoenberg, I. J., The finite Fourier series and elementary geometry. *Amer. Math. Monthly* 57 (1950), 390-404.
- [17] Ruoff, D., Shilleto, J., Recursive polygons. *Boll. Un. Mat. Ital.* (5) 15-B (1978), 968-981.
- [18] van der Waerden, B. L., Ein Satz über räumliche Fünfecke. *Elem. Math.* 25 (1970), 73-78 ; Nachtrag. *Elem. Math.* 27 (1972), 63.