Traduction des deux premières pages de l'article *The Harmonic Analysis of Skew Polygons as a Source of Outdoor Sculptures* de I. J. Schoenberg

1. Introduction

L'article précédent [4] sur les séries de Fourier finies traitait d'applications connues et nouvelles aux problèmes de géométrie élémentaire. Dans ce second article, nous les appliquons à un élégant théorème de Jesse Douglas [3] sur les pentagones non planaires dans l'espace. Nous montrons ici que le théorème de Douglas équivaut à l'analyse harmonique graphique des pentagones non planaires et qu'il est également à l'origine de sculptures extérieures remarquables. Cette dernière opinion est partagée par deux grands experts en art, Allan et Marjorie McNab, que je tiens à remercier pour leurs encouragements.

Le cas du pentagone est traité dans les sections 2 et 3. Toujours dans l'optique de sculptures possibles, nous présentons dans les sections 4 et 5 l'analyse harmonique de l'heptagone non planaire. Le théorème mentionné ci-dessus est le suivant. (Voir figure 1.)

Théorème 1 (J. Douglas). *Soit*

$$\Pi = (z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)(z_{\nu+5} = z_\nu)$$

un pentagone fermé non planaire dans $\mathbb{R}^3$ *vu comme un espace vectoriel. Soit*

$$z'_\nu = \frac{1}{2}(z_{\nu+2} + z_{\nu-2}) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, 4)$$

le milieu du côté $[z_{\nu-2}, z_{\nu+2}]$ *opposé au sommet* z_ν.

Pour chaque ν, *on détermine, sur la droite joignant* z_ν *à* z'_ν, *les points* f^1_ν, f^2_ν *tels que*

$$f^1_\nu - z'_\nu = \frac{1}{\sqrt{5}}(z'_\nu - z_\nu), \qquad f^2_\nu - z'_\nu = -\frac{1}{\sqrt{5}}(z'_\nu - z_\nu)$$

Alors

$$\Pi^1 = (f^1_0, f^1_1, f^1_2, f^1_3, f^1_4)$$

est un pentagone régulier affine et plan, et

$$\Pi^2 = (f^2_0, f^2_1, f^2_2, f^2_3, f^2_4)$$

est un pentagone régulier affine et plan et de forme étoilée.

Par pentagone régulier affine (en forme d'étoile), on entend l'image affine d'un pentagone régulier (en forme d'étoile).

Référence : I. J. Schoenberg, 1981. "The Harmonic Analysis of Skew Polygons as a Source of Outdoor Sculptures", Springer Books, in : Chandler Davis & Branko Grünbaum F. A. Sherk (ed.), The Geometric Vein, pages 165-176, Springer.
Traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

Le théorème 1 était facile à vérifier, mais sa découverte n'a pas été aisée. Dans plusieurs articles [1-3], Douglas explore ces problèmes en profondeur. Il utilise les propriétés classiques des valeurs propres des matrices carrées cycliques (ou circulantes). Le théorème 1 est énoncé comme un exemple de résultats généraux dans [1, p. 125], et est également démontré directement dans [3], avec une brève démonstration ad hoc qui ne semble pas particulièrement transparente. Les contributions de l'auteur s'orientent dans deux directions différentes.

1. Le fondement naturel de la théorie de Douglas semble être la série de Fourier finie. Certes, la série de Fourier finie est essentiellement équivalente aux propriétés des matrices cycliques utilisées par Douglas. Cependant, il est démontré dans la section 2 que si l'on inverse la série de Fourier finie, pour un pentagone, non pas sous sa forme complexe habituelle, mais sous sa forme dite réelle, on est inévitablement conduit au théorème 1 de Douglas. De ce point de vue, l'idée de Douglas se généralise facilement à l'analyse harmonique des heptagones non planaires dans $\mathbb{R}^3$ (théorème 2 de la section 4).

2. L'auteur a construit, à partir de vingt fines baguettes de bois, une maquette tridimensionnelle de plus de soixante centimètres de haut, illustrant le théorème 1. L'apparition des pentagones réguliers affines plans Π^1 et Π^2 était attendue, mais non moins plaisante, d'autant plus qu'ils se situent dans deux plans différents. Pour créer un contraste, les faces des pentagones Π, Π^1, Π^2 ont été peintes de trois couleurs différentes. La forme de l'ensemble de la structure, abstraction faite des transformations rigides, dépend de neuf paramètres réels. Cette diversité et l'absence totale de symétrie permettent des effets artistiques et rendent la présence des pentagones réguliers affines d'autant plus saisissante : l'ordre émerge du chaos. Réalisée en barres de métal et d'une taille plus imposante, elle constituerait une sculpture d'extérieur remarquable. Notre figure 1 illustre le cas où le pentagone Π, dont les sommets sont z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, se trouve dans un plan. Cependant, cela ne donne qu'une vague idée de l'aspect d'une structure tridimensionnelle.

Nous avons également réalisé une illustration tridimensionnelle du théorème 2 à partir de 63 fines baguettes de bois. Basée sur un heptagone non planaire Π, elle représente les trois heptagones réguliers affines Π^1, Π^2, Π^3 peints en trois couleurs contrastées. Ce modèle doit encore être présenté aux experts en art afin d'obtenir leur avis sur son potentiel en tant que sculpture extérieure. Notre figure 3 illustre un exemple où l'heptagone $\Pi = (z_0, z_1, ..., z_6)$ est plan *(voir les figures page suivante)*.

Résumé de la traductrice : on part d'une figure non plane irrégulière à 5 ou 7 sommets, on aboutit dans chaque cas à deux figures, planes toutes deux, l'une non étoilée et l'autre étoilée, on a colorié dans les 2 cas les figures étoilées obtenues (c'est bientôt Noël).

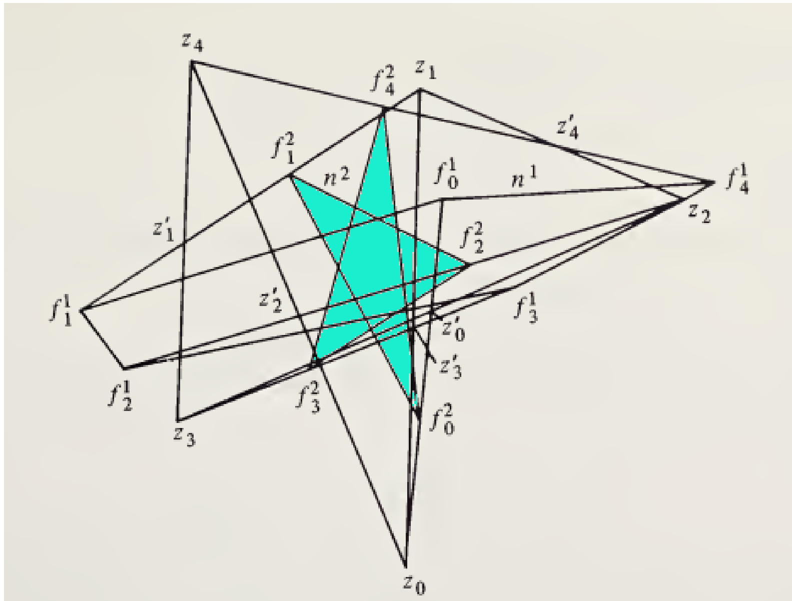

FIG. 1 : pentagones

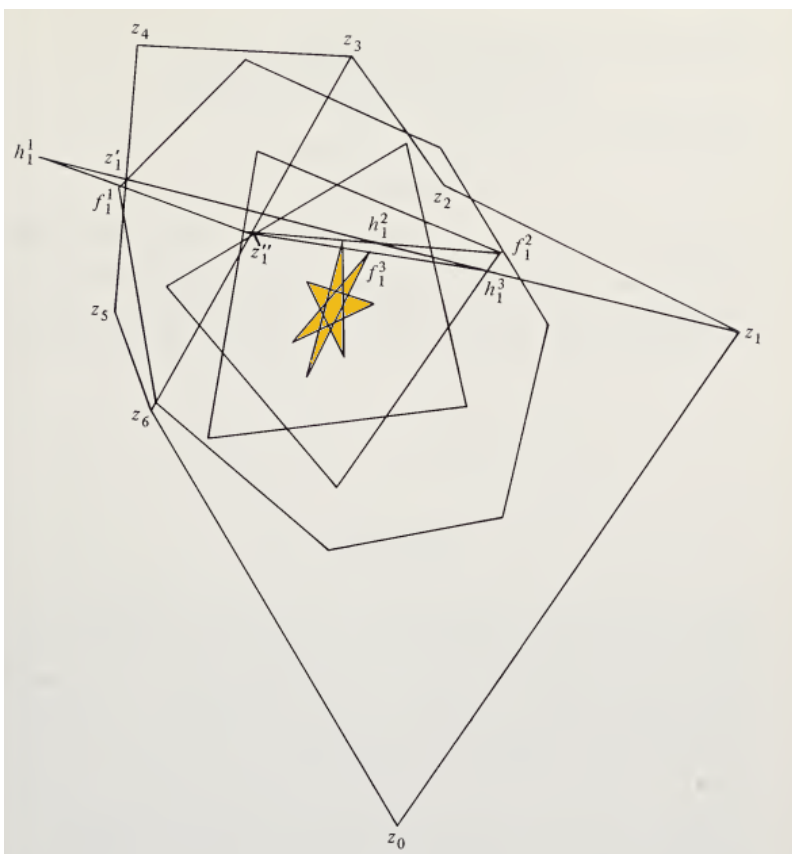

FIG. 2 : heptagones