

Régularité des solutions asymptotiquement axisymétriques de l'équation de Navier-Stokes en 3D avec forçage analytique

Peter Constantin, Mihaela Ignatova, and Vlad Vicol

ABSTRACT. OpenAI [43] a récemment annoncé une preuve de formation de singularité en temps fini pour les équations de Navier-Stokes en 3D, en présence d'une *force de volume* C^∞ -lisse. La construction de [43] présente quelques caractéristiques clés, parmi lesquelles nous retenons : (i) la moyenne angulaire de la solution satisfait des bornes spécifiques de Type II qui sont anisotropes ; (ii) la solution est exactement axisymétrique dans une région centrale qui se contracte. Dans cet article, nous considérons des solutions des équations de Navier-Stokes en 3D en présence d'une *force de volume réellement analytique*, et supposons que ces solutions satisfont les propriétés (i) et (ii) ci-dessus. Nous prouvons que de telles solutions sont en fait régulières au point singulier putatif. Par conséquent, dans la construction de [43], et dans toute construction ayant les propriétés (i) et (ii) dont la force reste bornée dans C^2 jusqu'au temps singulier, la force *ne peut ni s'annuler* identiquement au voisinage du point singulier, *ni être réellement analytique* en les variables d'espace, localement uniformément en temps. L'idée principale de la preuve s'inspire de notre travail antérieur [13] et de l'article compagnon [14] : en zoomant sur la singularité putative à l'aide des échelles de longueur anisotropes fournies par les bornes a priori, nous arrivons à des limites anciennes dont l'évolution EDP impose une rigidité supplémentaire.

1. Introduction

Dans un manuscrit récent [43], OpenAI a annoncé une preuve de formation de singularité en temps fini pour les équations de Navier-Stokes en 3D en présence d'un forçage C^∞ -lisse. Le théorème principal du manuscrit [43, Théorème 1.1] affirme que pour toute viscosité $\nu > 0$ il existe une force $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty))$ et une solution lisse (u, π) des équations de Navier-Stokes en 3D sur $\mathbb{R}^3 \times [0, 1)$

$$\begin{aligned}\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla \pi &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u(\cdot, 0) &= 0,\end{aligned}$$

qui a un support spatial compact fixe, une énergie cinétique finie $\sup_{0 \leq t < 1} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} < \infty$, et dont la solution explose quand $t \uparrow 1$:

$$\limsup_{t \uparrow 1} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} = \infty.$$

Nous appelons la solution construite dans [43] la *construction d'OpenAI*. Le point singulier est $(x, t) = (0, 1)$, et il est isolé : la vitesse diverge le long de points convergeant vers l'origine [43, équations (10.20)–(10.21)], tandis que toute dérivée spatio-temporelle de la vitesse a une limite unilatérale au temps d'explosion, sur les compacts évitant l'origine ; voir [43, Théorème 3.1(ii), équation (3.5), et la preuve du Lemme 10.2]. La force f , quant à elle, est définie comme le résidu

2020 *Mathematics Subject Classification*. Primaire 35Q30 ; Secondaire 35B44, 35Q31.

Key words and phrases. Équations de Navier-Stokes, régularité locale, symétrie axiale, forçage analytique.

de l'équation de quantité de mouvement, laissé par l'ansatz de la construction, et elle est C^∞ lisse mais non réellement analytique : ni sur $\mathbb{R}^3$, car elle est à support compact, ni au voisinage du point singulier (voir la Section A.6). Dans l'Annexe A nous consignons les propriétés de la construction d'OpenAI qui sont pertinentes pour cet article ; elles sont déduites d'énoncés de [43], que nous citons avec leurs emplacements.

Parmi les nombreuses caractéristiques de la solution construite dans [43], nous retenons les deux qui entrent dans les hypothèses de notre théorème principal :

- (i) Près du point singulier, la moyenne angulaire $v = \mathcal{P}u$ de la vitesse, définie en (1.4) ci-dessous, satisfait des bornes de Type II qui sont anisotropes : sa composante radiale v_r est bornée par $(1-t)^{-1/2}$, tandis que ses composantes axiale et azimutale v_z et v_θ sont bornées par $(1-t)^{-1/2-h}$ pour un certain $0 < h < 1/100$. De plus, chaque dérivée en r coûte un facteur $(1-t)^{-1/2}$, tandis que chaque dérivée en z ne coûte qu'un facteur $(1-t)^{-1/2+h}$.
- (ii) Le champ de vitesse complet u est exactement axisymétrique sur une région centrale qui se contracte $B(c\sqrt{1-t})$, pour un certain $c > 0$ fixé.

Nous ne prétendons pas avoir vérifié l'exactitude de la construction de [43] : l'Annexe A consigne les énoncés de ce manuscrit sur lesquels nous nous appuyons, avec leurs emplacements, et en déduit les propriétés utilisées dans cet article.

1.1. Cadre du problème. La solution construite dans [43] est définie pour $t \in [0, 1)$ et devient singulière quand $t \uparrow 1$. Comme les équations sont invariantes par translation en temps, nous plaçons le temps singulier en $t = 0$, ce qui est plus commode : nous remplaçons le triplet (u, π, f) du manuscrit [43] par les fonctions décalées

$$(u, \pi, f)(x, t) \longmapsto (u, \pi, f)(x, t + 1), \quad -1 \leq t < 0. \quad (1.1)$$

Nous notons à nouveau le triplet décalé par (u, π, f) . Le point singulier est alors $(x, t) = (0, 0)$, et le temps jusqu'à la singularité est $-t$, remplaçant le $1-t$ dans la variable temporelle de [43]. En particulier, le facteur $(1-t)$ du point (i) devient $(-t)$, et le cœur du point (ii) devient $B(c\sqrt{-t})$. Désormais, tout énoncé de cet article est dans la coordonnée temporelle décalée de (1.1).

L'objectif de cet article est d'analyser des solutions des équations de Navier-Stokes en 3D qui sont *supposées a priori* obéir aux propriétés (i) et (ii) ci-dessus. Nous prouvons que si de telles solutions provenaient du problème forcé avec une force de volume qui est *réellement analytique* en les variables d'espace, au sens précisé dans le Théorème 1.1 ci-dessous, alors $(x, t) = (0, 0)$ est un point régulier.¹

Dans tout l'article, nous considérons des solutions faibles convenables, au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [6], des équations de Navier-Stokes en 3D forcées

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \Delta u + \nabla \pi = f, \quad (1.2a)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (1.2b)$$

¹Rappelons qu'un point (x_0, t_0) avec $x_0 \in B(1)$ et $-1 < t_0 \leq 0$ est dit *régulier* si $\operatorname{ess\,sup}_{B(x_0, \rho) \times (t_0 - \rho^2, t_0)} |u| < \infty$ pour un certain $\rho > 0$ avec $B(x_0, \rho) \times (t_0 - \rho^2, t_0) \subset B(0, 1) \times (-1, 0)$, et *singulier* sinon. Ici et dans tout cet article, nous utilisons la notation $B(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y - x| < \rho\}$ et $B(\rho) = B(0, \rho)$.

où $u: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la vitesse, $\pi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ est la pression, et $f: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est la force.² Ici $\mathcal{Q} := B(1) \times (-1, 0)$ est le cylindre parabolique unité,³ dont l'extrémité temporelle supérieure $t = 0$ est le temps d'explosion de la construction.

Sauf mention contraire, nous prenons (u, π) comme une solution faible convenable de (1.2) qui est *lisse sur les compacts* de $\mathcal{Q}$, et donc f y est lisse aussi. Notons que la définition d'une solution faible convenable sur $\mathcal{Q}$ au sens de [6], telle qu'écrite dans [40, 37], inclut l'exigence d'intégrabilité

$$u \in L_t^\infty L_x^2(\mathcal{Q}) \cap L_t^2 H_x^1(\mathcal{Q}), \quad \pi \in L_{x,t}^{3/2}(\mathcal{Q}). \quad (1.3)$$

Nous ne supposons aucune régularité de la solution (u, π) au temps $t = 0$.

1.2. Notation. Les solutions de (1.2) n'ont pas besoin d'être axisymétriques, mais il est commode d'introduire la notation attachée au système de coordonnées cylindriques sur $\mathbb{R}^3$. Pour $\varphi \in [0, 2\pi)$, notons Q_φ la rotation d'angle φ autour de l'axe z . Pour une solution $u: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de (1.2) nous définissons la rotation et les opérateurs de projection⁴

$$(\mathcal{R}_\varphi u)(x, t) = Q_\varphi u(Q_\varphi^{-1} x, t), \quad \mathcal{P}u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}_\varphi u d\varphi, \quad (1.4a)$$

et notons

$$v = \mathcal{P}u, \quad w = u - v, \quad \mathcal{P}w = 0. \quad (1.4b)$$

Nous appelons v la *moyenne angulaire*, ou la *partie axisymétrique*, de u , et nous appelons w la *partie non axisymétrique*. Le champ u est *axisymétrique* si $w = 0$. Avec $x = (x', z)$, $r = |x'|$, et le repère cylindrique usuel (e_r, e_θ, e_z) , un champ axisymétrique a la forme $u = u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z$, où u_r, u_θ, u_z ne dépendent que de (r, z, t) . Pour un champ général u , les coefficients cylindriques u_r, u_θ, u_z dépendent aussi de θ , et les coefficients cylindriques de sa moyenne angulaire $v = \mathcal{P}u$ sont leurs moyennes en θ , c'est-à-dire $v_\circ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\circ d\theta$ pour $\circ \in \{r, \theta, z\}$.

1.3. Résultat principal. Notre résultat principal est le suivant.

THÉORÈME 1.1 (Régularité sous bornes de Type II anisotropes et forçage analytique). *Soit (u, π) une solution faible convenable de (1.2) sur $\mathcal{Q}$, lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$, et soit $0 < h < 1/2$. Supposons que la force est bornée dans C^2 jusqu'au temps d'explosion,*

$$M_f := \sup_{-1 < t < 0} \|f(\cdot, t)\|_{C_x^2(B(1))} < \infty. \quad (1.5)$$

Supposons que la force est réellement analytique en les variables d'espace, localement uniformément sur les cylindres strictement contenus dans $\mathcal{Q}$: pour tout $R < 1$ et tout intervalle compact $J \subset (-1, 0)$ il existe $M_{R,J} < \infty$ et $a_{R,J} > 0$ tels que

$$\sup_{t \in J} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(R))} \leq M_{R,J} a_{R,J}^{-|\alpha|} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}_0^3. \quad (1.6)$$

Supposons que la vitesse possède les deux propriétés suivantes.

²Les résultats de régularité partielle de [6] sont énoncés pour une force à divergence nulle. Nous les appliquons à $(u, \pi - \pi_f)$ avec la force $f - \nabla \pi_f$, où $\Delta \pi_f = \operatorname{div} f$ sur $B(1)$ avec données de Dirichlet nulles. La fonction $\nabla \pi_f$ est bornée sur $B(1)$ uniformément en temps, de sorte que $f - \nabla \pi_f$ est bornée et à divergence nulle, et l'inégalité d'énergie locale est inchangée, puisque $\int u \cdot \nabla(\pi_f \varphi) dx = 0$ pour $\varphi \in C_0^\infty(B(1))$. Comme $\operatorname{curl}(f - \nabla \pi_f) = \operatorname{curl} f$, et comme π_f est axisymétrique dès que f l'est, de sorte que $(f - \nabla \pi_f)_\theta = f_\theta$, les estimations de dérivées, l'équation de circulation et les équations de vorticité des Sections 3-5, qui sont là où la borne C^2 (1.5) sur la force intervient, sont écrites avec f elle-même.

³Les propriétés de la construction de [43] sont fournies sur un cylindre $B(R) \times (-\delta, 0)$ pour certains $R, \delta > 0$; voir l'Annexe A. En diminuant R ou δ nous pouvons prendre $\delta = R^2 \leq 1$, et le changement d'échelle $u \mapsto Ru(R \cdot, R^2 \cdot)$, $\pi \mapsto R^2 \pi(R \cdot, R^2 \cdot)$, $f \mapsto R^3 f(R \cdot, R^2 \cdot)$ transporte les hypothèses du Théorème 1.1 de $B(R) \times (-R^2, 0)$ au cylindre parabolique unité $\mathcal{Q}$, les constantes étant modifiées par des puissances fixes de R .

⁴Comme les rotations autour de l'axe z préservent $B(1)$, l'opérateur de projection sur la moyenne angulaire $\mathcal{P}$ est bien défini sur $\mathcal{Q}$.

- (i) Sa moyenne angulaire $v := \mathcal{P}u$ satisfait, sur la boule euclidienne fixe $B(1)$, pour $-1 < t < 0$, et tous les entiers non négatifs a, b avec $a + b \leq 2$,

$$\|\partial_r^a \partial_z^b v_r(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(1))} \leq C_{\text{axi}}(-t)^{-1/2-a/2-(1/2-h)b}, \quad (1.7a)$$

$$\|\partial_r^a \partial_z^b v_z(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(1))} + \|\partial_r^a \partial_z^b v_\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(1))} \leq C_{\text{axi}}(-t)^{-1/2-h-a/2-(1/2-h)b}, \quad (1.7b)$$

pour une constante $C_{\text{axi}} > 0$ indépendante de t .

- (ii) Pour chaque $t \in (-1, 0)$ il existe un rayon $\rho(t) \in (0, 1)$ tel que la solution $u(\cdot, t)$ est exactement axisymétrique sur la boule de rayon $\rho(t)$; de façon équivalente,

$$w(\cdot, t) = 0 \quad \text{sur } B(\rho(t)). \quad (1.8)$$

Aucune régularité ou borne inférieure quantitative n'est supposée sur ρ ; nous avons seulement besoin que $\rho(t) > 0$ pour tout $t \in (-1, 0)$.

Alors $u = v$ sur $\mathcal{Q}$, et $(0, 0)$ est un point régulier : il existe $r_*, \delta_* > 0$ tels que

$$\sup_{B(r_*) \times (-\delta_*, 0)} |u| < \infty. \quad (1.9)$$

REMARQUE 1.2. Quelques commentaires sur les hypothèses du Théorème 1.1 s'imposent :

- (a) Les hypothèses sur la force (1.5) et (1.6) ont des rôles distincts. L'analyticité spatiale (1.6) est utilisée à chaque temps fixé avant le temps d'explosion, de sorte que le rayon d'analyticité $a_{R,J}$ peut tendre vers zéro quand J approche le temps 0.⁵ L'argument de régularité des Sections 3–5, qui prouve le Théorème 1.3, utilise au contraire la borne spatiale uniforme C^2 (1.5). Une force qui est réellement analytique en (x, t) sur un voisinage de $\overline{B(1)} \times [-1, 0]$ satisfait les deux conditions, et il en va de même de $f = 0$. Aucune symétrie de f n'est supposée, bien que, conjointement à (1.8), l'hypothèse (1.6) rende $\text{curl } f$ invariant par rotation sur tout $\mathcal{Q}$; voir la Remarque 2.5.
- (b) Les bornes (1.7) ne concernent que la moyenne angulaire de la solution. Hormis la régularité $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1(\mathcal{Q})$ implicite dans la définition d'une solution faible convenable, aucune borne sur w ou ses dérivées n'est supposée en dehors du cœur. La construction d'OpenAI satisfait bien les bornes de (1.7) ; voir la Section A.3.
- (c) La construction d'OpenAI satisfait (1.8) avec $\rho(t) = c\sqrt{-t}$, pour $c > 0$ une constante telle que $c < \sqrt{2X_a}$; voir la Section A.2.
- (d) La force utilisée dans [43] ne satisfait pas (1.6). Cela est cohérent avec la construction, dont la force est construite à partir de troncatures à support compact.
- (e) L'axisymétrie exacte sur le cœur (1.8) et l'analyticité de la force (1.6) peuvent être échangées contre une borne supérieure sur la partie non axisymétrique du champ de vitesse. Si $\|w(\cdot, t)\|_{C^3(B(1))}$ est bornée uniformément en $t \in (-1, 0)$, alors $(0, 0)$ est régulier. Cet énoncé ne requiert aucune hypothèse d'analyticité ; voir la Remarque 2.4. La construction d'OpenAI ne satisfait pas une telle borne sur w ; voir la Section A.6.

1.4. Du forçage analytique et du cœur axisymétrique à un problème axisymétrique.

Notre première observation est que l'hypothèse d'analyticité (1.6) sur la force rend $u(\cdot, t)$ réellement analytique sur $B(1)$, pour chaque $t \in (-1, 0)$ fixé. Cela découle du théorème classique d'analyticité intérieure pour le système de Navier-Stokes, dû à Kahane [32, Théorème 1.2 et p. 387] ; nous rappelons ce résultat comme Théorème 2.1, et le Corollaire 2.2 est la forme sous laquelle nous l'appliquons. Combiné à l'hypothèse de cœur axisymétrique (1.8), cela rend u axisymétrique sur tout $\mathcal{Q}$: pour toute rotation Q_φ autour de l'axe z , le champ analytique $u - \mathcal{R}_\varphi u$ s'annule sur le cœur, donc sur tout $B(1)$ par le théorème d'identité ; ces détails sont donnés dans la Section 2.2.

⁵La condition (1.6) est vérifiée si et seulement si, pour tout $R < 1$ et tout compact $J \subset (-1, 0)$, chaque $f(\cdot, t)$ avec $t \in J$ est la restriction d'une fonction holomorphe sur un voisinage complexe fixe de $\overline{B(R)}$, bornée uniformément en $t \in J$.

Ainsi $u = v$, et les bornes sur la moyenne angulaire de (1.7) deviennent des bornes sur le champ de vitesse complet. Une fois u connu comme axisymétrique, nous moyennons (1.2) sur les rotations $\mathcal{R}_\varphi$, ce qui laisse les termes de vitesse inchangés et remplace seulement la pression et la force par leurs moyennes angulaires. Par (1.5), la force moyennée en angle $\mathcal{P}f$ reste bornée dans C^2 .

Cela réduit le Théorème 1.1 à la régularité des solutions axisymétriques des équations de Navier-Stokes en 3D avec forçage C^2 , sous les bornes anisotropes héritées de (1.7). Ce résultat est le Théorème 1.3 ci-dessous, qui présente un intérêt indépendant. Afin de l'énoncer, nous fixons les hypothèses permanentes des Sections 3–5 : (u, π) est une solution faible convenable axisymétrique des équations forcées (1.2) sur $\mathcal{Q}$, qui est lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$,⁶ dans la classe décrite dans la Section 1.1, et dont la force satisfait (1.5). Pour $0 < h < 1/2$ nous définissons les longueurs radiale et axiale comme dans [43] :

$$\ell_r(t) = (-t)^{1/2}, \quad \ell_z(t) = (-t)^{1/2-h}. \quad (1.10)$$

L'intervalle $0 < h < 1/2$ assure que les deux longueurs tendent vers zéro quand $t \uparrow 0$. Les bornes de (1.11) ci-dessous sont imposées sur les coefficients cylindriques scalaires de u et sur leurs dérivées jusqu'à l'ordre total deux, chaque dérivée radiale coûtant un facteur ℓ_r^{-1} , et chaque dérivée axiale coûtant un facteur ℓ_z^{-1} . Le théorème suivant est le pendant anisotrope du résultat principal de [14] :

THÉORÈME 1.3 (Régularité des solutions axisymétriques sous bornes anisotropes). *Soit (u, π) une solution faible convenable axisymétrique de (1.2) dans $\mathcal{Q}$, lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$, avec une force satisfaisant (1.5). Soit $0 < h < 1/2$. Supposons qu'il existe une constante $C_{\text{axi}} > 0$ telle que*

$$|\partial_r^a \partial_z^b u_r(r, z, t)| \leq C_{\text{axi}} (-t)^{-1/2-a/2-(1/2-h)b}, \quad (1.11a)$$

$$|\partial_r^a \partial_z^b u_z(r, z, t)| + |\partial_r^a \partial_z^b u_\theta(r, z, t)| \leq C_{\text{axi}} (-t)^{-1/2-h-a/2-(1/2-h)b}, \quad (1.11b)$$

sur $\mathcal{Q}$, pour tous les entiers non négatifs a, b avec $a + b \leq 2$. Alors, $(0, 0)$ est un point régulier.

REMARQUE 1.4. Nous faisons quelques commentaires sur les hypothèses du Théorème 1.3.

- (a) Les bornes de (1.11) disent que les champs remis à l'échelle $(-t)^{1/2}u_r$, $(-t)^{1/2+h}u_z$, et $(-t)^{1/2+h}u_\theta$, considérés comme fonctions de $(r/\ell_r(t), z/\ell_z(t))$, sont bornés dans C^2 uniformément en t ; voir (4.6) ci-dessous.
- (b) Ni (1.11) ni la borne de Type I $|u| \leq C(-t)^{-1/2}$ n'impliquent l'autre : pour $a = b = 0$ les bornes sur u_z et u_θ dans (1.11) sont plus faibles du facteur $(-t)^{-h}$, tandis que pour tout $b \geq 1$ la borne imposée sur u_r est plus petite du facteur $(-t)^{hb}$ que la borne $(-t)^{-1/2-(a+b)/2}$ que le changement d'échelle parabolique attache à une borne de vitesse de Type I. Le Théorème 1.3 n'est donc pas contenu dans les résultats de Type I de Chen, Strain, Yau et Tsai [7], Chen, Strain, Tsai et Yau [8], Koch, Nadirashvili, Seregin et Šverák [33], Seregin et Šverák [54], ou Zhang [65], et ces résultats n'y sont pas contenus non plus.
- (c) La preuve du Théorème 1.3 peut être achevée en n'utilisant que les bornes sur u_r et u_z de (1.11), les hypothèses sur u_θ étant complètement abandonnées ; voir la Remarque 5.2. Pour des raisons esthétiques, nous énonçons néanmoins (1.11) pour les trois composantes de la même façon, et ne poursuivons pas l'hypothèse minimale.

Ensuite, nous esquissons la preuve du Théorème 1.3 ; les estimations et la preuve complète sont reportées aux Sections 3–5. La stratégie est celle de l'article compagnon [14], dont les étapes sont les suivantes. Dans [14] nous considérons des solutions axisymétriques non forcées qui sont bornées dans C^2 après changement d'échelle *isotrope* à une unique échelle de longueur tendant vers zéro $\ell(t)$, pour laquelle $(-t)/\ell(t)^2$ tend vers zéro. À l'aide de cette échelle de longueur nous zoomons,

⁶La lissité en coordonnées cartésiennes donne $u_r = u_\theta = \partial_r u_z = 0$ en $r = 0$, pour tout $t < 0$.

le long de temps et de points auxquels le gradient de la vitesse méridienne n'est pas petit comparé à $(-t)^{-1}$. Comme la pression n'est pas contrôlée après un tel zoom, la limite est prise dans les équations de vorticité plutôt que dans l'équation de quantité de mouvement. La régularité partielle et le principe du maximum bornent la circulation ru_θ sur une boule de rayon fixe, et le changement d'échelle la multiplie par un facteur qui tend vers zéro, de sorte que la source de tourbillon de l'équation de vorticité potentielle disparaît dans la limite. Le scalaire transport   dans la limite est alors soit la vorticité potentielle, soit la vorticité azimutale, selon que l'axe remis à l'échelle reste à distance finie ou s'éloigne à l'infini, et dans les deux cas nous prouvons que le scalaire limite s'annule à l'extrémité supérieure de l'intervalle de temps remis à l'échelle. Le champ méridien limite remis à l'échelle est donc borné, avec vorticité azimutale nulle et divergence nulle ; par conséquent son gradient s'annule, ce qui contredit la sélection des points auxquels nous avons zoom  . L'élimination de la circulation d'abord, et de la vorticité potentielle ensuite, est aussi le mécanisme du théorème de rigidité d'Euler dans [13, Théorème 4.5] ; ce que [14] ajoute, c'est que cet argument survit au passage à une limite ancienne, dans laquelle le champ de transport n'est qu'une limite faible-*

L'*anisotropie* inhérente aux longueurs (1.10) force la preuve de cet article    s'écarter de [14]. Pour le voir, notons qu'après le zoom, le coefficient de diffusion radiale est $(-t)/\ell_r(t)^2 = 1$, le coefficient axial est $(-t)/\ell_z(t)^2 = (-t)^{2h}$, et le changement d'échelle multiplie la circulation par $(-t)/(\ell_r(t)\ell_z(t)) = (-t)^h$. Dans le cas isotrope ces trois quantités sont de taille $(-t)/\ell(t)^2 \rightarrow 0$ quand $t \uparrow 0$, et donc les trois termes s'annulent dans la limite du zoom. Ici les deux derniers s'annulent, mais le premier ne s'annule pas. La première difficulté est donc que la diffusion radiale survit dans la limite, qui n'est plus gouvernée par une équation de transport : l'étape qui élimine la vorticité potentielle dans [13, 14], sa conservation le long des trajectoires méridiennes rétrogrades, n'est pas disponible.    la place d'un argument fondé sur les caractéristiques rétrogrades, nous utilisons le Lemme 3.3, qui est un principe de comparaison pour les solutions distributionnelles bornées d'une équation de dérive-diffusion dont la diffusion agit sur un (strict) sous-ensemble des variables.

Comme dans [14], la limite du zoom n'a pas besoin d'être une solution de (1.2), nous prenons donc d'abord le rotationnel de (1.2), ce qui élimine la pression, et ne transportons dans la limite que les équations de vorticité (3.3) et (3.4). Que l'axe remis à l'échelle reste à distance finie ou s'éloigne, le scalaire limite est borné, résout une équation homogène sur tout l'espace, et tend uniformément vers zéro dans le passé lointain ; le principe de comparaison implique alors qu'il s'annule. L'incompressibilité et la bornitude de la vitesse limite donnent alors la petitesse de $(-t)\partial_r u_r$ et $(-t)\partial_z u_z$, et, quand l'axe remis à l'échelle reste à distance finie, de $(-t)u_r/r$; quand il s'éloigne, ce quotient est petit par (1.11) seul. Enfin, la borne $(-t)|\partial_z u_r| \leq C(-t)^h$ est immédiate de (1.11), et elle donne aussi la petitesse relative de ce terme.

La seconde difficulté est que $\partial_r u_z$ peut être aussi grand que $C(-t)^{-1-h}$, de sorte qu'une borne $o((-t)^{-1})$ sur le gradient complet de la vitesse méridienne $b = u_r e_r + u_z e_z$ n'est disponible à aucune étape de l'argument. Nous ne suivons donc que les quatre quantités

$$G_\rho(t) := \left\| |\partial_r u_r(\cdot, t)| + |u_r(\cdot, t)/r| + |\partial_z u_z(\cdot, t)| + |\partial_z u_r(\cdot, t)| \right\|_{L^\infty(B(\rho))}, \quad (1.12)$$

où u_r/r est prolongé continûment à travers l'axe. La seconde quantité est dominée par la première dans le supremum sur $B(\rho)$, puisque u_r s'annule sur l'axe et que le segment radial vers l'axe reste dans $B(\rho)$; nous la conservons parce que la Section 5 utilise u_r/r comme coefficient de u_θ dans (3.1c) et de ω_θ^2 dans (5.7). Le résultat de petitesse relative, qui remplace [14, Proposition 3.1], est le suivant :

PROPOSITION 1.5 (Petitesse des quantités méridiennes). *Sous les hypothèses du Théorème 1.3, pour tout $0 < \rho < 1$ fixé on a*

$$\lim_{t \uparrow 0} (-t)G_\rho(t) = 0. \quad (1.13)$$

Pour déduire la régularité en $(0,0)$ de (1.13), nous montrons d’abord que pour tout $\eta > 0$ la borne $\|u_\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C_\eta(-t)^{-\eta}$ est valable sur une boule intérieure, à tous les temps suffisamment tardifs ; nous obtenons cette borne en appliquant le principe du maximum dans l’équation du tourbillon à la fonction $(-t)^\eta u_\theta$. Nous considérons ensuite le bilan d’énstrophie local, qui contient le terme non linéaire $(\partial_r u_z) \omega_r \omega_z$, dont le coefficient $\partial_r u_z$ peut être de taille $(-t)^{-1-h}$, trop grand pour être placé dans L^∞ et soumis à l’inégalité de Grönwall. En invoquant plutôt l’identité $\omega_r = -\partial_z u_\theta$, nous intégrons par parties en z , ce qui déplace la dérivée du tourbillon sur le produit $(\partial_r u_z) \omega_z$. En conséquence, le tourbillon n’intervient que par son supremum, et les deux facteurs du produit sont contrôlés par l’énstrophie et la dissipation d’énstrophie au moyen d’estimations locales de type div-curl. L’estimation d’énstrophie qui en résulte se referme et donne une borne de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin jusqu’au temps zéro, comme nous le montrons dans la Section 5.

1.5. Résultats antérieurs sur Navier-Stokes axisymétrique. Sans tourbillon, les solutions axisymétriques de Navier-Stokes en 3D sont globalement régulières ; voir Ladyzhenskaya [36] et aussi Ukhovskii et Yudovich [62]. Avec tourbillon, la question de la régularité globale est ouverte et seuls des résultats conditionnels sont disponibles. Les singularités qui obéissent à une borne ponctuelle invariante par changement d’échelle (dite de Type I) sont exclues : $|u| \leq C(r^2 - t)^{-1/2}$ par Chen, Strain, Yau et Tsai [7] ; $r|u| \leq C$ par Koch, Nadirashvili, Seregin et Šverák [33], et $|u| \leq C(-t)^{-1/2}$ par Chen, Strain, Tsai et Yau [8]. Seregin et Šverák [54] ont prouvé un critère de régularité de Type I local qui impose la borne $\leq C(-t)^{-1/2}$ seulement sur la partie méridienne de la vitesse. Zhang [65] a récemment prouvé la régularité sous l’hypothèse de Type I unilatérale sur une composante : $u_r \geq -C(-t)^{-1/2}$ pour un certain $C > 0$, avec ru_θ borné. Pour un compte rendu détaillé des nombreux autres résultats conditionnels disponibles pour Navier-Stokes axisymétrique, nous renvoyons au livre de Tsai [61, Chapitre 10].

Au-delà du seuil de Type I, les singularités sont contraintes par la croissance des normes critiques : le théorème $L_t^\infty L_x^3$ d’Escauriaza, Seregin et Šverák [24] a été rendu quantitatif par Tao [59], et a été adapté à la classe axisymétrique, avec des améliorations quantitatives, par Palasek [46] et par Ożański et Palasek [45].

Plus proches des hypothèses de cet article, Seregin [49] a montré qu’une singularité axisymétrique doit être de Type II, au sens des quantités intégrales locales invariantes par changement d’échelle. De plus, dans [50, 51, 52, 53] il a réduit le scénario d’explosion de Type II à un problème de Liouville pour des solutions d’Euler anciennes, que l’on peut exclure dans des cas particuliers.

1.6. Contexte de recherche pour la construction d’OpenAI. Le problème de la génération spontanée de singularités dans les fluides incompressibles a une longue histoire et une forte motivation scientifique. La recherche dans ce domaine a produit une vaste littérature qui forme l’environnement fertile entourant la construction d’OpenAI. Nous n’avons pas la place ici de rendre justice aux nombreuses idées et résultats de ce domaine, mais il ne serait pas déplacé de mentionner certains des développements importants qui sont pertinents pour [43].

Pour les équations d’Euler incompressibles en 3D, Elgindi [22] a prouvé la formation de singularité en temps fini pour des solutions axisymétriques sans tourbillon, avec une vitesse de classe $C^{1,\alpha}$ pour $\alpha > 0$ suffisamment petit ; voir aussi la version à énergie finie dans Elgindi, Ghouil et Masmoudi [23]. Plus tôt cette année, des constructions d’explosion dans le cadre axisymétrique sans tourbillon ont été obtenues pour toute la plage admissible $\alpha \in (0, 1/3)$, indépendamment, par Shkoller [57], Chen [10, 11], et Shao, Wei, Zhang et Zhang [56]. Pour des données initiales lisses en présence d’une frontière solide, Chen et Hou [9] ont prouvé l’explosion en temps fini pour Euler 3D en utilisant une analyse auto-similaire modulée et un argument assisté par ordinateur. Plus proche des équations de Navier-Stokes, Tao [58] a construit une explosion en temps fini pour une équation de Navier-Stokes moyennée, dont la non-linéarité modifiée conserve la structure d’échelle et d’énergie de l’EDP originale. Des recherches numériques et guidées par l’apprentissage

automatique pour un profil d'explosion auto-similaire pour Euler 3D et d'autres modèles de fluides incompressibles ont été menées dans [29, 30, 63, 64, 26, 21]. Ces calculs ont façonné les attentes pour une construction rigoureuse : quels scénarios valent la peine d'être poursuivis, et à quelle régularité une singularité doit être recherchée. Tous les résultats mentionnés dans ce paragraphe concernent le problème classique, *non forcé*.⁷

Une autre voie vers l'explosion pour les équations d'Euler en 3D (et des modèles apparentés), *en présence d'une force de volume*, a été ouverte par Córdoba et Martínez-Zoroa. La force injecte, à une suite de temps s'accumulant au temps d'explosion, de petites perturbations à des fréquences de plus en plus élevées, que la non-linéarité amplifie. La question est alors de savoir combien la force peut être rendue lisse et petite. Nous renvoyons à [15] pour le résultat d'Euler 3D, avec une force qui appartient à $C^{1,1/2-\varepsilon} \cap L^2$ uniformément en temps, et à [16] pour le résultat de milieux poreux incompressibles en 2D, avec une source qui est C^∞ lisse en espace, uniformément en temps. Dans cette direction, Alpöge et Buckmaster ont atteint une force qui est C^∞ à la fois en espace et en temps. Très récemment ils ont annoncé l'explosion en temps fini pour les équations d'Euler en 3D [2], pour le système de Boussinesq visqueux en 2D [1], et, avec Coiculescu, pour l'équation des milieux poreux incompressibles en 2D [3]. Chacun de ces trois articles considère une force $C_{x,t}^\infty$ lisse.

Au niveau technique, le manuscrit d'OpenAI nomme deux programmes de recherche supplémentaires dont les idées ont influencé sa construction. Pour l'évolution des vecteurs d'onde et des polarisations de vitesse des impulsions oscillantes le long de l'écoulement de fond, [43] consigne les méthodes de Lifschitz et Hameiri [39] et de Friedlander et Vishik [25], qui détectent l'instabilité d'un écoulement non visqueux sous des perturbations de courte longueur d'onde. Pour la réalisation d'une contrainte prescrite par l'ajout d'oscillations à haute fréquence, [43] consigne l'utilisation d'idées du programme d'intégration convexe pour les équations de fluides incompressibles, introduit par De Lellis et Székelyhidi [18, 19], puis développé dans [17, 31, 5] et bien d'autres.

Nous soulignons que plusieurs décennies de résultats de régularité conditionnelle restreignent la forme qu'une singularité putative de Navier-Stokes en 3D peut prendre ; cela aide énormément si l'on tente de réduire l'espace de recherche d'une solution explosive. Pour une solution faible convenable dont la force est bornée, la théorie de régularité partielle de Caffarelli, Kohn et Nirenberg [6] force l'ensemble singulier à avoir une mesure de Hausdorff parabolique unidimensionnelle nulle. La singularité, de plus, ne peut pas être de la forme auto-similaire rétrograde proposée par Leray, cf. Nečas, Růžička et Šverák [42] pour les profils L^3 , Tsai [60] pour les profils L^p avec $3 < p < \infty$ sous des hypothèses d'énergie locale, et Pineau et Vicol [48] pour les profils auto-similaires tournés qui obéissent à une borne de Type I, à petites ou grandes vitesses de rotation. La direction de la vorticité ne peut pas non plus rester cohérente, par le critère d'alignement de Constantin et Fefferman [12]. Dans la classe axisymétrique, les bornes de Type I rappelées dans la Section 1.5 excluent de même les singularités. Les profils auto-similaires d'Euler avec exposant de similarité inférieur à 1/2, qui est la plage qu'un zoom de Navier-Stokes à une longueur d'Euler requerrait, sont aussi exclus lorsque le profil est lisse et satisfait une propriété sortante [13]. Notons qu'à part la théorie de la régularité partielle, ces résultats considèrent le problème de Navier-Stokes non for c . La liste ci-dessus est loin d'être complète ; nous renvoyons au livre de Lemarié-Rieusset [38] pour un excellent compte rendu récent.

REMARQUE 1.6 (Constructions de singularités forcées pour des modèles de coquilles). Revenant aux constructions forcées, nous établissons une analogie avec les singularités en temps fini construites pour des équations modèles motivées par Navier-Stokes. Palasek [47, Théorème 1.3 et Remarque 1.5] a récemment prouvé l'explosion en temps fini dans la plage supercritique en

⁷Nous notons que récemment OpenAI a aussi affirmé prouver l'explosion en temps fini pour les équations d'Euler en 3D, à partir de données initiales lisses à support compact [44].

énergie pour un modèle de coquilles visqueux de type Obukhov, avec des fréquences séparées super-exponentiellement. Ses données initiales sont lisses, et la force lisse qu'il considère est telle que toutes ses normes tendent vers zéro au temps d'explosion [47, Remarque 1.4]. La force est non nulle à chaque temps avant l'explosion, de sorte qu'elle ne s'annule identiquement sur aucun intervalle de temps se terminant à la singularité. La force est un résidu, comme dans [43] : ici c'est la dissipation de chaque mode, désactivée jusqu'à ce que ce mode soit activé [47, Section 3.3]. Curieusement, Palasek note que la force ne peut pas être supprimée dans la plage de paramètres qu'il associe à trois dimensions [47, Remarque 1.4 et Section 1.3.2] ; cet énoncé est offert sans preuve, et est attribué à un travail à venir de Looi.

1.7. Organisation de l'article. La Section 2 prouve la réduction analytique de symétrie, déduit le Théorème 1.1 du Théorème 1.3, et consigne les conséquences pour la force. Les Sections 3–5 prouvent le Théorème 1.3. L'Annexe A consigne les propriétés revendiquées pour la construction d'OpenAI qui entrent dans les hypothèses de nos résultats, et ce que ceux-ci donnent pour elle.

2. Réduction au problème axisymétrique

Dans cette section nous déduisons le Théorème 1.1 du Théorème 1.3. Dans toute cette section $v = \mathcal{P}u$ et $w = u - v$ sont comme en (1.4), $\mathcal{Q} = B(1) \times (-1, 0)$, et (u, π) est lisse sur les compacts du cylindre sur lequel elle est donnée, de sorte que f y est lisse aussi.

2.1. Analyticité spatiale à un temps fixé avant l'explosion. Que $u(\cdot, t)$ soit réellement analytique en espace à chaque $t < 0$ fixé est classique. Nous rappelons l'énoncé sous la forme dans laquelle il est utilisé ici et dans la Remarque 2.6. Aucune analyticité en temps n'est supposée.

THÉORÈME 2.1 (Analyticité spatiale intérieure [32, Théorème 1.2]). *Soit $R > 0$, $t_1 < t_2$, et soit (u, π) une solution de (1.2) sur le cylindre $B(R) \times (t_1, t_2)$, lisse sur les compacts de ce cylindre. Supposons que la force est réellement analytique en les variables d'espace, localement uniformément sur les cylindres strictement contenus dans $B(R) \times (t_1, t_2)$: pour tout $R' < R$ et tout intervalle compact $J \subset (t_1, t_2)$ il existe $M < \infty$ et $a > 0$ tels que⁸*

$$\sup_{t \in J} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(R'))} \leq M a^{-|\alpha|} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}_0^3. \quad (2.1)$$

Alors, la vitesse obéit à une borne de même forme : pour tout $R' < R$ et tout intervalle compact $J \subset (t_1, t_2)$ il existe $M' < \infty$ et $a' > 0$ tels que

$$\sup_{t \in J} \|\partial_x^\alpha u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(R'))} \leq M' (a')^{-|\alpha|} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}_0^3. \quad (2.2)$$

En particulier, $u(\cdot, t)$ est réellement analytique sur $B(R)$ pour tout $t \in (t_1, t_2)$. Les constantes M' et a' dépendent de R' et J , et elles n'ont pas besoin d'être uniformes jusqu'à la frontière parabolique : a' peut tendre vers zéro quand J approche une extrémité de (t_1, t_2) .

Pour une force conservative c'est le théorème de Kahane [32, Théorème 1.2], prouvé là pour des solutions faibles, sous les hypothèses du théorème de régularité intérieure de Serrin [55, Section 3]. Pour une force non conservative, Kahane énonce p. 387 de [32] que la conclusion de [32, Théorème 1.2] persiste une fois que f obéit à (2.1) sous sa forme $|\alpha|^{|\alpha|}$, l'analyticité étant comprise comme la borne [32, équation (1.5)], qui est (2.2) ci-dessus. Le point n'est pas repris dans cet article, aussi indiquons-nous pourquoi la preuve s'applique. Premièrement, les dérivées spatiales sont estimées dans [32] au moyen des formules de représentation de Serrin [55, équations (18) et (20)]. Avec une force, le potentiel de la chaleur pour la vorticité porte f à l'ordre zéro, dans la fente du terme bil  naire [55, Section 4, équation (23) et l'affichage qui la suit]. Deuxièmement, adjoindre f    l'inconnue (u, ω) du système intégral abstrait de [32, Théorème 1.3] fait de la force

⁸Comme $k! \leq k^k \leq e^k k!$ pour $k \geq 1$, l'hypothèse (2.1) est inchangée si $|\alpha|!$ est remplacé par $|\alpha|^{|\alpha|}$, qui est la forme sous laquelle Kahane l'énonce p. 387 de [32].

une composante supplémentaire de l'hétérogénéité, dans des lignes dont les deux blocs de noyaux s'annulent. Troisièmement, les deux hypothèses de ce théorème tiennent : l'inconnue, désormais le triplet (u, ω, f) , est bornée sur tout cylindre compact, par la lissité ici et par [32, Théorème 1.1] dans [32] ; et l'hétérogénéité obéit à [32, équation (1.5)], ce qui pour f est la borne (2.1). Les estimations inductives de [32, Section 4] s'appliquent alors sans changement.

L'hypothèse (1.6) du Théorème 1.1 est (2.1) sur le cylindre parabolique unité. Dans cet article nous appliquons le Théorème 2.1 sous la forme suivante.

COROLLAIRE 2.2 (Analyticité spatiale à un temps fixé avant l'explosion). *Soit $R, \delta > 0$, et soit (u, π) une solution de (1.2) sur $B(R) \times (-\delta, 0)$, lisse sur les compacts de ce cylindre. Supposons que pour un certain $0 < R' \leq R$, un certain $-\delta < t_1 < t_2 < 0$, et certains $M < \infty$ et $a > 0$,*

$$\sup_{t \in [t_1, t_2]} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(R'))} \leq M a^{-|\alpha|} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}_0^3. \quad (2.3)$$

Alors, pour tout $t \in (t_1, t_2)$, la vitesse $u(\cdot, t)$ est réellement analytique sur $B(R')$.

C'est le Théorème 2.1 sur le cylindre $B(R') \times (t_1, t_2)$, sur lequel (2.3) donne (2.1) avec les mêmes M et a . Comme la force nulle satisfait (2.3) sur tout cylindre, pour les équations non forcées $u(\cdot, t)$ est réellement analytique sur $B(R)$ à tout $t \in (-\delta, 0)$.

Nous notons que l'analyticité en espace et en temps pour les équations de Navier-Stokes a été prouvée par Masuda [41] ; ce résultat a été étendu à l'analyticité uniforme jusqu'à une frontière analytique par Komatsu [34]. Des bornes inférieures quantitatives sur le rayon d'analyticité spatiale sont dues à Grujić et Kukavica [27], en termes de normes L^p de la donnée initiale. Aux points intérieurs, et pour une force à divergence nulle analytique sur une boule, ce résultat est dû à Bradshaw, Grujić et Kukavica [4].

2.2. Axisymétrie sur une boule fixe, et preuve du Théorème 1.1.

PREUVE DU THÉORÈME 1.1. Par le Corollaire 2.2 sur $\mathcal{Q}$, appliqué à chaque cylindre $B(R) \times J$ de (1.6), la vitesse $u(\cdot, t)$ est réellement analytique sur $B(1)$ pour tout $t \in (-1, 0)$. Nous fixons un tel t et un angle $\varphi \in [0, 2\pi)$. Avec la notation de (1.4), nous définissons

$$F_\varphi(x) = u(x, t) - (\mathcal{R}_\varphi u)(x, t) = u(x, t) - Q_\varphi u(Q_\varphi^{-1}x, t). \quad (2.4)$$

Comme Q_φ préserve $B(1)$, le champ F_φ est réellement analytique sur $B(1)$. Comme Q_φ préserve aussi la boule centrale $B(\rho(t))$, sur laquelle $u = v$ par (1.8), et comme $v = \mathcal{P}u$ est invariant sous $\mathcal{R}_\varphi$, nous avons $F_\varphi = v - \mathcal{R}_\varphi v = 0$ sur $B(\rho(t))$. Le théorème d'identité sur l'ensemble connexe $B(1)$ donne alors $F_\varphi \equiv 0$ sur $B(1)$. Cela vaut pour tout $\varphi \in [0, 2\pi)$ et tout $t \in (-1, 0)$. En moyennant l'identité $u = \mathcal{R}_\varphi u$ sur φ , et en rappelant la définition (1.4) de $\mathcal{P}$, nous obtenons $u = \mathcal{P}u$, c'est-à-dire

$$u = v, \quad w = 0 \quad \text{sur } \mathcal{Q}. \quad (2.5)$$

Notons que cet argument est fait à chaque temps fixé, de sorte que le rayon du cœur $\rho(t)$ et les rayons d'analyticité peuvent tendre vers zéro quand $t \uparrow 0$, à des rythmes sans rapport.

Ensuite, nous moyennons l'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes (1.2) par rapport à l'angle azimutal. Comme, par (2.5), u est fixé par tout $\mathcal{R}_\varphi$, et comme $\mathcal{R}_\varphi$ commute avec ∂_t , avec Δ , et avec $u \mapsto (u \cdot \nabla)u$, appliquer $\mathcal{P}$ à (1.2) laisse les trois termes de vitesse inchangés et remplace seulement la pression et la force par leurs moyennes angulaires

$$\bar{\pi}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi(Q_\varphi^{-1}x, t) d\varphi, \quad \bar{f} = \mathcal{P}f.$$

La pression moyennée reste dans $L_{x,t}^{3/2}$ (voir (1.3)), et (1.5) donne $\|\bar{f}\|_{L_t^\infty C_x^2} \leq CM_f$. Le couple $(u, \bar{\pi})$ est convenable avec la force $\bar{f}$: il est lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$ et résout classiquement

l'équation moyennée, de sorte que l'inégalité d'énergie locale est une identité, avec $\bar{\pi} \in L_{x,t}^{3/2}(\mathcal{Q})$ et $\bar{f}$ bornée.

Ainsi $(u, \bar{\pi}, \bar{f})$ est une solution faible convenable axisymétrique de (1.2) sur $\mathcal{Q}$, dans la classe de la Section 1.4, dont la force obéit à (1.5) avec CM_f à la place de M_f . De plus, par (2.5) les bornes (1.7) sur la moyenne angulaire sont les bornes (1.11) sur u elle-même, avec le même exposant h et la même constante C_{axi} . Le Théorème 1.3 rend $(0, 0)$ régulier, ce qui est (1.9). $\square$

2.3. Conséquences pour la force. L'analyticité de la force intervient dans la preuve du Théorème 1.1 à exactement un endroit, le passage de la symétrie sur le cœur qui se contracte (1.8), à la symétrie (2.5) sur la boule fixe ; pour une force simplement lisse nous ne savons pas faire ce passage. En un point singulier, nous pouvons reformuler le Théorème 1.1 comme un énoncé sur la force seule.

COROLLAIRE 2.3 (La force sous un cœur axisymétrique). *Soit (u, π) une solution faible convenable de (1.2) sur $\mathcal{Q}$, lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$, avec une force f satisfaisant (1.5), supposons (1.7) pour un certain $0 < h < 1/2$ et $C_{\text{axi}} < \infty$, et supposons (1.8). Si $(0, 0)$ est un point singulier, alors f viole (1.6), et en particulier $f \not\equiv 0$ là. De plus, f ne s'annule alors identiquement sur aucun cylindre $B(R') \times (-\delta', 0)$ avec $0 < R' \leq 1$ et $0 < \delta' \leq 1$.*

PREUVE DU COROLLAIRE 2.3. La première assertion est la contraposée du Théorème 1.1, et $f = 0$ satisfait (1.6). Pour la seconde, si f s'annulait identiquement sur un tel cylindre, les hypothèses du Théorème 1.1 y seraient vérifiées avec $\rho(t)$ remplacé par $\min\{\rho(t), R'/2\}$, et le changement d'échelle de Navier-Stokes rendrait $(0, 0)$ régulier. $\square$

REMARQUE 2.4 (Bornes supérieures à la place de l'annulation exacte). Nous notons que l'axisymétrie exacte sur le cœur peut être remplacée par une borne sur la partie non axisymétrique w de la vitesse, sur une boule fixe. C'est-à-dire que si dans le Théorème 1.1 nous abandonnons (1.8) et (1.6) et supposons à la place que

$$M_w := \sup_{-1 < t < 0} \|w(\cdot, t)\|_{C_x^3(B(1))} < \infty, \quad (2.6)$$

alors $(0, 0)$ est encore régulier. Aucune petitesse de M_w n'est requise, et l'analyticité ne joue aucun rôle. En effet, moyenner (1.2) sur les rotations tue les termes mixtes $(v \cdot \nabla)w$ et $(w \cdot \nabla)v$, puisque v est invariant et $\mathcal{P}w = 0$, et donne

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \Delta v + \nabla \bar{\pi} = F + \bar{f}, \quad (2.7a)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (2.7b)$$

$$F = -\mathcal{P}((w \cdot \nabla)w), \quad (2.7c)$$

$$\sup_{-1 < t < 0} \|F(\cdot, t)\|_{C_x^2(B(1))} \leq CM_w^2, \quad (2.7d)$$

où C est une constante universelle, et $\bar{f} = \mathcal{P}f$. Le moyennage n'augmente pas les normes de (1.3), et $(v, \bar{\pi})$ est lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$, donc c'est une solution faible convenable de (2.7) avec la force $F + \bar{f}$, dont la norme C^2 est au plus $CM_w^2 + CM_f$. Le Théorème 1.3 rend v borné près de $(0, 0)$, et (2.6) rend $u = v + w$ borné là aussi. Nous soulignons que le théorème d'identité utilise l'annulation exacte dans (1.8), et que nous ne savons pas comment la remplacer par un taux de petitesse algébrique. La Section A.6 montre que (2.6) échoue pour la construction d'OpenAI.

REMARQUE 2.5 (La symétrie du rotationnel de la force). Aucune symétrie de f n'est supposée dans le Théorème 1.1, mais les hypothèses (1.8) et (1.6) ensemble en impliquent une : pour tout $\varphi \in [0, 2\pi)$,

$$\mathcal{R}_\varphi(\operatorname{curl} f) = \operatorname{curl} f, \quad \text{sur } \mathcal{Q}. \quad (2.8)$$

En effet, une fois $\mathcal{R}_\varphi u = u$ connu par la preuve du Théorème 1.1, appliquer $\mathcal{R}_\varphi$ à l'équation de quantité de mouvement donne $f - \mathcal{R}_\varphi f = \nabla(\pi - \pi \circ Q_\varphi^{-1})$, et (2.8) suit en prenant le rotationnel. Il serait intéressant de décider si dans le Théorème 1.1 l'hypothèse (1.6) peut être remplacée par l'invariance par rotation (2.8) de $\text{curl } f$.

REMARQUE 2.6 (Annulation extérieure et analyticité). Un second obstacle à l'analyticité de la force n'utilise ni (1.7) ni (1.8), seulement un ouvert hors de l'axe sur lequel la vitesse méridienne s'annule. Soit (u, π) une solution de (1.2) sur $B(R) \times (-\delta, 0)$, lisse sur les compacts de ce cylindre, et soit $E \subset B(R) \cap \{r > 0\}$ un ouvert non vide tel que

$$u_r = u_z = 0 \quad \text{sur } E \times (-\delta, 0). \quad (2.9)$$

Supposons que $u_z(0, t_0) \neq 0$ pour un certain $t_0 \in (-\delta, 0)$.⁹ Alors, sur toute boule $B(R')$ avec $0 < R' \leq R$ qui rencontre E , et pour tout $t_1 \in (-\delta, t_0)$, il n'existe pas de constantes $M < \infty$ et $a > 0$ telles que

$$\sup_{t \in [t_1, t_0]} \|\partial_x^\alpha f(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(R'))} \leq M a^{-|\alpha|} |\alpha|! \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}_0^3. \quad (2.10)$$

En particulier, f ne s'annule pas identiquement sur $B(R') \times (t_1, t_0)$, puisque la force nulle satisfait (2.10). La preuve est courte. Supposons que (2.10) tienne pour certains M et a . Par le Corollaire 2.2, $u(\cdot, t)$ est alors réellement analytique sur $B(R')$ pour tout $t \in (t_1, t_0)$.   chacun de ces t , le scalaire $u_z(\cdot, t)$ s'annule sur l'ouvert non vide $E \cap B(R')$ par (2.9), donc sur tout $B(R')$ par le théorème d'identité, et en particulier $u_z(0, t) = 0$. En faisant $t \uparrow t_0$ et en utilisant la continuité de $u_z(0, \cdot)$, nous obtenons $u_z(0, t_0) = 0$, une contradiction.

3. Identités axisymétriques et résultats auxiliaires

Nous passons maintenant à la preuve du Théorème 1.3. Dans les Sections 3–5, (u, π) est une solution faible convenable axisymétrique de (1.2) sur $\mathcal{Q}$, dans la classe de la Section 1.4, avec une force satisfaisant (1.5) ; en moyennant sur les rotations comme dans la Section 2.2, nous pouvons (et le faisons) prendre π et f axisymétriques aussi. Cette section consigne quelques-uns des résultats auxiliaires dont la preuve a besoin : les équations en variables cylindriques, un principe du maximum pour les fonctions qui s'annulent sur l'axe (Lemme 3.1), un anneau régulier à circulation bornée (Lemme 3.2), et un principe de comparaison pour les scalaires bornés produits par les limites anciennes de la Section 4 (Lemme 3.3). Hormis la force, les identités et le Lemme 3.2 sont les mêmes que ceux de l'article compaignon [14] ; la force intervient comme $(\text{curl } f)_\theta$ dans (3.3), comme $g = (\text{curl } f)_\theta / r$ dans (3.4), et comme $r f_\theta$ dans (3.5), et (1.5) borne les trois. Nous notons C une constante qui peut dépendre de h , de M_f , de la constante C_{axi} de (1.11), et de rayons intérieurs fixés, mais jamais d'une suite de temps de remise à l'échelle.

3.1. Identités axisymétriques. Dans le repère cylindrique (e_r, e_θ, e_z) , et avec π et f axisymétriques, le système (1.2) s'écrit

$$\partial_t u_r + u_r \partial_r u_r + u_z \partial_z u_r - \frac{u_\theta^2}{r} = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_r - \partial_r \pi + f_r, \quad (3.1a)$$

$$\partial_t u_z + u_r \partial_r u_z + u_z \partial_z u_z = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 \right) u_z - \partial_z \pi + f_z, \quad (3.1b)$$

$$\partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + u_z \partial_z u_\theta + \frac{u_r}{r} u_\theta = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2} \right) u_\theta + f_\theta, \quad (3.1c)$$

⁹Pour la construction d'OpenAI cela vaut à tout temps suffisamment proche du temps d'explosion, où $u_z(0, t) = j_0(-t)^{-1/2-h} \neq 0$ par (A.12). La remarque dit donc qu'un écoulement qui est pur tourbillon sur un ouvert hors de l'axe, et a une vitesse axiale non nulle en un point de l'axe, ne peut pas provenir d'une force spatialement analytique : l'analyticité transporterait l'annulation extérieure de u_z vers l'axe.

$$\partial_r u_r + \frac{u_r}{r} + \partial_z u_z = 0. \quad (3.1d)$$

Nous appelons $b = u_r e_r + u_z e_z$ la vitesse méridienne et $u_\theta e_\theta$ le tourbillon, et nous écrivons les composantes de vorticité, la circulation, et la vorticité potentielle comme

$$\omega_r = -\partial_z u_\theta, \quad \omega_\theta = \partial_z u_r - \partial_r u_z, \quad \omega_z = \partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r}, \quad \Gamma = r u_\theta, \quad \Omega = \frac{\omega_\theta}{r}. \quad (3.2)$$

En appliquant ∂_z à (3.1a) et ∂_r à (3.1b) et en soustrayant, nous éliminons la pression et obtenons

$$\partial_t \omega_\theta + u_r \partial_r \omega_\theta + u_z \partial_z \omega_\theta = \frac{u_r}{r} \omega_\theta + \frac{1}{r} \partial_z (u_\theta^2) + \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2} \right) \omega_\theta + (\text{curl } f)_\theta, \quad (3.3)$$

où $(\text{curl } f)_\theta = \partial_z f_r - \partial_r f_z$. En divisant (3.3) par r , et en utilisant l'identité $r^{-1}(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - r^{-2})(r\Omega) = (\partial_r^2 + 3r^{-1}\partial_r)\Omega$, nous obtenons aussi

$$\partial_t \Omega + u_r \partial_r \Omega + u_z \partial_z \Omega = \left(\partial_r^2 + \frac{3}{r} \partial_r + \partial_z^2 \right) \Omega + \partial_z \left(\frac{u_\theta^2}{r^2} \right) + g, \quad g := \frac{(\text{curl } f)_\theta}{r}. \quad (3.4)$$

Enfin, en multipliant l'équation du tourbillon (3.1c) par r , nous obtenons

$$\partial_t \Gamma + u_r \partial_r \Gamma + u_z \partial_z \Gamma = \left(\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 \right) \Gamma + r f_\theta. \quad (3.5)$$

Près de l'axe, un champ axisymétrique lisse a des composantes $u_r = r a(r^2, z, t)$, $u_\theta = r c(r^2, z, t)$, et $u_z = d(r^2, z, t)$, avec a , c et d lisses ; ainsi Ω , u_θ/r et g sont des fonctions lisses de (r^2, z, t) , et (3.4) tient à travers l'axe une fois que son opérateur radial $\partial_r^2 + 3r^{-1}\partial_r$ est lu comme le laplacien radial de $\mathbb{R}^4$, comme dans [33]. Comme u_r , $\partial_z u_r$, $\partial_r u_z$, $\partial_z f_r$ et $\partial_r f_z$ s'annulent sur l'axe, les quotients u_r/r , $\partial_z u_r/r$, $\partial_r u_z/r$ et g sont bornés, le long du segment radial vers l'axe, par les suprema de $\partial_r u_r$, $\partial_r \partial_z u_r$, $\partial_r^2 u_z$, $\partial_r \partial_z f_r$ et $\partial_r^2 f_z$ sur $B(1)$; en particulier

$$|g| \leq CM_f \quad \text{sur } \mathcal{Q}. \quad (3.6)$$

3.2. Un principe du maximum pour les fonctions qui s'annulent sur l'axe. L'équation du tourbillon (3.1c) et l'équation de circulation (3.5) ont des coefficients singuliers sur l'axe, et, contrairement à (3.4), elles ne sont pas relevées à une dimension supérieure. Les preuves des Lemmes 3.2 et 5.1, et de la Remarque 5.2, leur appliquent le principe du maximum sous la forme suivante.

LEMME 3.1 (Principe du maximum pour les fonctions qui s'annulent sur l'axe). *Soit $R > 0$, $t_1 < s$, $k \in \mathbb{R}$, et $M \geq 0$, et définissons l'ensemble $D = \{(x, t) : x \in B(R), r = |x'| > 0, t_1 < t \leq s\}$. Soit $\phi = \phi(r, z, t)$ continue sur $\overline{B(R)} \times [t_1, s]$, avec $\phi(0, z, t) = 0$ pour $|z| \leq R$ et $t_1 \leq t \leq s$. Supposons que ϕ est de classe C^2 en x et C^1 en t sur D , et satisfait*

$$\partial_t \phi + b_r \partial_r \phi + b_z \partial_z \phi + \gamma \phi = \left(\partial_r^2 + \frac{k}{r} \partial_r + \partial_z^2 \right) \phi + F, \quad (3.7)$$

là. Ici b_r , b_z , γ et F sont des fonctions réelles sur D , avec $\gamma \geq 0$ et $|F| \leq M$; aucune borne n'est supposée sur b_r , b_z ou γ , qui peuvent être non bornés quand $r \rightarrow 0$. Alors

$$|\phi(x, t)| \leq \max_{\Sigma} |\phi| + M(t - t_1) \quad \text{sur } \overline{B(R)} \times [t_1, s], \quad (3.8)$$

où $\Sigma = (\overline{B(R)} \times \{t_1\}) \cup (\partial B(R) \times [t_1, s])$ est la frontière parabolique de $B(R) \times (t_1, s]$.

La preuve de ce lemme est élémentaire ; nous la présentons pour la commodité du lecteur.

PREUVE DU LEMME 3.1. Comme $-\phi$ satisfait les mêmes hypothèses, avec $-F$ à la place de F , il suffit de borner ϕ par au-dessus. Soit $m = \max_{\Sigma} |\phi| \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Définissons $\phi_\varepsilon = \phi - (M + \varepsilon)(t - t_1)$, et soit $(\bar{x}, \bar{t})$ un point de maximum de la fonction continue ϕ_ε sur le compact $K = \overline{B(R)} \times [t_1, s]$. Supposons que $\phi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{t}) > m$. Sur Σ nous avons $\phi_\varepsilon \leq \phi \leq m$, et sur l'axe

nous avons $\phi_\varepsilon \leq \phi = 0 \leq m$. Le point de maximum $(\bar{x}, \bar{t})$ ne se trouve donc ni sur Σ ni sur l'axe, c'est-à-dire $(\bar{x}, \bar{t}) \in D$. Au temps $\bar{t}$ les fonctions ϕ et ϕ_ε diffèrent d'une constante, de sorte que $(r, z) \mapsto \phi(r, z, \bar{t})$ atteint son maximum sur le demi-disque ouvert $\{r > 0, r^2 + z^2 < R^2\}$ en $\bar{x}$. Par conséquent, $\partial_r \phi = \partial_z \phi = 0$, $\partial_r^2 \phi \leq 0$, et $\partial_z^2 \phi \leq 0$ là. De plus, $\gamma \phi \geq 0$ en $(\bar{x}, \bar{t})$ parce que $\phi(\bar{x}, \bar{t}) \geq \phi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{t}) > m \geq 0$, et $\partial_t \phi_\varepsilon \geq 0$ là parce que $\phi_\varepsilon(\bar{x}, t) \leq \phi_\varepsilon(\bar{x}, \bar{t})$ pour $t_1 \leq t < \bar{t}$ borne la dérivée à gauche par en dessous. En $(\bar{x}, \bar{t})$ les coefficients b_r , b_z et k/r sont finis, et ils multiplient des dérivées premières qui s'annulent. Ainsi (3.7) donne $\partial_t \phi_\varepsilon = \partial_t \phi - M - \varepsilon \leq F - M - \varepsilon \leq -\varepsilon$ là, une contradiction. Par conséquent $\phi \leq m + (M + \varepsilon)(t - t_1)$ sur K , et (3.8) suit en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

3.3. L'anneau régulier. Le Lemme 3.2 ci-dessous est utilisé deux fois dans la preuve du Théorème 1.3 : sa borne de circulation (3.9) supprime la source de tourbillon dans le zoom de la Section 4, et ses bornes de dérivées sur l'anneau, qui tiennent jusqu'au temps d'explosion, contrôlent les erreurs de troncature de l'estimation d'entrophie de la Section 5, qui sont supportées dans cet anneau.

LEMME 3.2 (Un anneau régulier et une circulation bornée). *Soit $0 \leq R_1 < R_0 < 1$. Il existe des rayons $R_1 < R_- < R_+ < R_0$ et un temps $t_0 \in (-1, 0)$ ayant la propriété suivante. La vitesse u , ainsi que ∇u et $\nabla^2 u$, est bornée sur l'anneau cylindrique $\{R_- < |x| < R_+\} \times (t_0, 0)$, et, pour chaque $R_* \in (R_-, R_+)$, il existe une constante finie C_Γ telle que*

$$\|\Gamma\|_{L^\infty(B(R_*) \times (t_0, 0))} \leq C_\Gamma. \quad (3.9)$$

PREUVE DU LEMME 3.2. Soit $S_0 \subset \overline{B(R_0)}$ l'ensemble des x pour lesquels $(x, 0)$ est un point singulier. Appliquée au couple avec la force à divergence nulle de la note de bas de page 2, la régularité partielle donne $\mathcal{H}^1(S_0) = 0$. En effet, le critère de ε -régularité de Gustafson, Kang et Tsai [28, Théorème 1.1(ii)], avec $(p, q) = (2, 2)$ et la force dans l'espace de Morrey parabolique $M^{2,2}$ de [28, Équation (6)], s'applique aux points $(x, 0)$ de la frontière supérieure de $\mathcal{Q}$.¹⁰ L'argument de recouvrement de [6] (voir aussi [40, 37, 35]) est inchangé, puisque $\int_{B(1) \times (-\delta, 0)} |\nabla u|^2 \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$ par (1.3). Nous pouvons donc choisir $R \in (R_1, R_0)$ tel que $\partial B(R)$ ne porte aucun point de S_0 , et par compacité il existe $\delta > 0$, avec $R_1 < R - \delta < R + \delta < R_0$, et $t_0 \in (-1, 0)$ tels que u est bornée sur $\{R - \delta < |x| < R + \delta\} \times (t_0, 0)$. Nous fixons des R_- et R_+ quelconques tels que $R - \delta < R_- < R_+ < R + \delta$.

Comme u est bornée sur cet anneau cylindrique et f est bornée dans C_x^2 , les estimations intérieures de Serrin [55, Section 4, avec $m = 1$] bornent ∇u et $\nabla^2 u$ sur les compacts de $\{R - \delta < |x| < R + \delta\} \times (t_0, 0)$, par des constantes qui ne dépendent que du sous-ensemble, de M_f , de $\sup |u|$ sur l'anneau cylindrique, et de $\|\nabla u\|_{L^2(\mathcal{Q})}$. Ces bornes sont uniformes jusqu'à $t = 0$, parce que les formules de représentation de Serrin [55, Équation (18), Équation (20), et l'affichage après l'Équation (23)] sont unilatérales en temps : la vorticité en un point (x, s) est la somme d'un potentiel de la chaleur de $\omega \wedge u$ et de la force, et d'une solution de l'équation de la chaleur, chacune bornée en (x, s) en termes de la solution sur le cylindre rétrograde $B(x, \varrho) \times (s - \varrho^2, s)$, de sorte que l'estimation en (x, s) ne dépend de s que par les normes ci-dessus. En fixant un petit ϱ , avec $\varrho^2 < -t_0$, et en remplaçant t_0 par $t_0 + \varrho^2$, on obtient la première assertion.

Nous fixons $R_* \in (R_-, R_+)$. Pour $s \in (t_0, 0)$, l'ensemble $\overline{B(R_*)} \times [t_0, s]$ est un compact de $\mathcal{Q}$, de sorte que u y est lisse ; la circulation $\Gamma = ru_\theta$ est donc continue sur cet ensemble, lisse hors de l'axe, et, comme $|\Gamma| \leq r|u|$, elle s'annule sur l'axe. L'équation de circulation (3.5) est de la forme (3.7),

¹⁰Dans [28] le critère est énoncé pour des points intérieurs au domaine spatio-temporel, alors qu'ici il est appliqué à des points de la frontière supérieure, au temps d'explosion. Cela est légitime pour deux raisons. Premièrement, la preuve de [28] n'utilise la solution que sur les cylindres rétrogrades $B(x, \varrho) \times (-\varrho^2, 0)$, qui sont contenus dans $\mathcal{Q}$, et seulement à travers les équations et l'inégalité d'énergie locale sur ceux-ci. Deuxièmement, l'inégalité d'énergie locale à un temps $s < 0$ n'implique la fonction test que sur $(-1, s]$, de sorte qu'elle tient pour des fonctions test qui ne s'annulent pas en $t = 0$; pour un couple lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$ c'est en fait une identité à tout $s < 0$.

avec $k = -1$, sans terme d'ordre zéro, et avec une source qui obéit à $|rf_\theta| \leq M_f$. Le Lemme 3.1 borne donc $|\Gamma|$ sur $\overline{B(R_*)} \times [t_0, s]$ par ses valeurs au temps t_0 et sur $\partial B(R_*) \times [t_0, s]$, plus $M_f|t_0|$. Les premières sont bornées puisque u est lisse au temps t_0 , les secondes par R_* fois la borne sur u sur l'anneau cylindrique ; ni les unes ni les autres ne dépendent de s , et en faisant tendre $s \uparrow 0$ on obtient (3.9). $\square$

3.4. Un principe de comparaison avec diffusion en moins de variables. Dans les limites anciennes de la Section 4 la diffusion radiale survit à la procédure de zoom, de sorte que la vorticité potentielle n'est plus conservée le long des trajectoires méridiennes rétrogrades, comme elle l'est dans [13] et [14]. On utilise à la place un principe de comparaison pour faire s'annuler le scalaire limite. Ce scalaire, cependant, est seulement borné, il résout son équation seulement au sens des distributions, et il ne vient avec aucune borne sur ses dérivées ni aucune trace initiale. De plus, la diffusion n'agit que sur un sous-ensemble des variables (elle n'agit pas sur la variable axiale), aussi le Lemme 3.3 est-il énoncé dans la généralité où il est utilisé.

LEMME 3.3 (Comparaison pour une solution distributionnelle bornée). *Soit $1 \leq d \leq m$, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et notons $x = (X, Z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{m-d}$. Supposons que $B : \mathbb{R}^m \times I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est mesurable, que $B(\cdot, \tau) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ pour presque tout $\tau \in I$, et que*

$$\Lambda_J := \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in J} (\|B(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} + \|\nabla B(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}) < \infty, \quad (3.10)$$

pour tout intervalle compact $J \subset I$. Soit $q \in L^\infty_{\operatorname{loc}}(I; L^\infty(\mathbb{R}^m))$ satisfaisant

$$\partial_\tau q + B \cdot \nabla q = \Delta_X q \quad \text{sur } \mathbb{R}^m \times I, \quad (3.11)$$

*au sens des distributions.*¹¹ *Alors, pour presque tout $\tau_0 \in I$ et presque tout $\tau \in I$ avec $\tau > \tau_0$,*

$$\|q(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \leq \|q(\cdot, \tau_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}. \quad (3.12)$$

Si de plus $I = (-\infty, T)$ et, pour un certain $C < \infty$ et $\kappa > 0$,

$$\|q(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \leq C|\tau|^{-\kappa}, \quad (3.13)$$

pour presque tout $\tau < \min\{-1, T\}$, alors $q = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^m \times I$. Un représentant continu de q sur un ouvert y est identiquement nul, et il en va de même de toute trace continue à l'extrémité supérieure obtenue à partir de ce représentant.

PREUVE DU LEMME 3.3. L'argument est standard : nous r gularisons en espace, contrôlons le commutateur comme dans [20], et comparons avec une barrière qui croît linéairement à l'infini. Nous fixons un intervalle compact $J = [\tau_-, \tau_+] \subset I$, posons $M_\infty = \|q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m \times J)}$, et r gularisons en espace, $q_\varepsilon = \eta_\varepsilon * q$ avec un mollifieur standard $\eta_\varepsilon = \varepsilon^{-m} \eta(\cdot/\varepsilon)$ avec η supporté dans $B(1)$. En convoitant (3.11) avec η_ε , nous obtenons

$$\partial_\tau q_\varepsilon + B \cdot \nabla q_\varepsilon = \Delta_X q_\varepsilon + \mathcal{R}_\varepsilon, \quad \mathcal{R}_\varepsilon = B \cdot \nabla(\eta_\varepsilon * q) - \eta_\varepsilon * (B \cdot \nabla q). \quad (3.14)$$

Ici $\mathcal{R}_\varepsilon$ est le commutateur de DiPerna et Lions, borné de la manière usuelle : $|\mathcal{R}_\varepsilon| \leq C(m, \eta) \Lambda_J M_\infty$ par (3.10). De plus, $\mathcal{R}_\varepsilon(\cdot, \tau) \rightarrow 0$ dans $L^2_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^m)$ pour presque tout $\tau \in J$ par [20, Lemme II.1], donc $\mathcal{R}_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(B(R) \times J)$ pour tout $R > 0$ par convergence dominée. Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, tout terme de (3.14) autre que $\partial_\tau q_\varepsilon$ est borné, donc q_ε a un représentant qui est lipschitzien en temps à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R}^m)$; désormais q_ε désigne ce représentant. Si τ_0 est un point de Lebesgue de $\tau \mapsto q(\cdot, \tau) \in L^1_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^m)$, ce qui est le cas pour presque tout τ_0 , alors $q_\varepsilon(\cdot, \tau_0) = \eta_\varepsilon * q(\cdot, \tau_0)$ pour tout ε . Nous fixons un tel $\tau_0 \in (\tau_-, \tau_+)$ et posons $M = \|q(\cdot, \tau_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)}$, de sorte que $q_\varepsilon(\cdot, \tau_0) \leq M$.

Avec $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$ nous avons $|\nabla \langle x \rangle| \leq 1$ et $\Delta_X \langle x \rangle \leq d$. En définissant $K = \Lambda_J + d$, la fonction

$$\Psi_\sigma(x, \tau) = M + \sigma(\langle x \rangle + K(\tau - \tau_0)), \quad \sigma > 0, \quad (3.15)$$

¹¹Ici $B \cdot \nabla q$ signifie réellement $\operatorname{div}(Bq) - (\operatorname{div} B)q$.

satisfait $\partial_\tau \Psi_\sigma + B \cdot \nabla \Psi_\sigma - \Delta_X \Psi_\sigma \geq \sigma(K - \Lambda_J - d) = 0$ presque partout sur $\mathbb{R}^m \times J$, et $\Psi_\sigma \geq M + \sigma|x|$ pour $\tau \geq \tau_0$. Donc $v_\varepsilon = (q_\varepsilon - \Psi_\sigma)_+$ s'annule en $\tau = \tau_0$; pour $\tau \in [\tau_0, \tau_+]$ elle s'annule aussi sur le complémentaire de $B(R_\sigma)$ pour $R_\sigma = 1 + M_\infty/\sigma$. En soustrayant l'inégalité de sursolution de (3.14), en multipliant par v_ε , et en intégrant sur $\mathbb{R}^m$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int v_\varepsilon^2 + \int |\nabla_X v_\varepsilon|^2 \leq \frac{1}{2} \int (\operatorname{div} B) v_\varepsilon^2 + \int \mathcal{R}_\varepsilon v_\varepsilon. \quad (3.16)$$

En invoquant l'inégalité de Grönwall nous obtenons $\sup_{\tau \in [\tau_0, \tau_+]} \|v_\varepsilon(\cdot, \tau)\|_{L^2}^2 \leq C_J \|\mathcal{R}_\varepsilon\|_{L^2(B(R_\sigma) \times J)}^2 \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \downarrow 0$. Comme $q_\varepsilon \rightarrow q$ dans L_{loc}^2 , en faisant $\varepsilon \downarrow 0$ puis $\sigma \downarrow 0$ on obtient $q \leq M$ presque partout sur $\mathbb{R}^m \times (\tau_0, \tau_+)$. Le même argument pour $-q$, et un épuisement de I par des intervalles compacts, donnent (3.12).

Pour la dernière assertion, nous appliquons (3.12) à des temps $\tau_j \rightarrow -\infty$ auxquels (3.13) tient, et obtenons $\|q(\cdot, \tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)} \leq C|\tau_j|^{-\kappa}$ pour presque tout $\tau > \tau_j$; ainsi $q = 0$ presque partout, et un représentant continu, ainsi que sa trace à l'extrémité supérieure, s'annulent identiquement. $\square$

4. Limites anciennes et petitesse des quantités méridiennes

Le but de cette section est de prouver la Proposition 1.5. Nous raisonnons par contradiction, en zoomant là où (1.13) échoue, à la longueur radiale ℓ_r et à la longueur axiale ℓ_z . Deux cas se présentent alors, selon que l'axe remis à l'échelle reste à distance finie, ou s'éloigne à l'infini. Comme la pression n'est pas contrôlée après le zoom, nous passons à la limite dans les équations de vorticité (3.3) et (3.4), pas dans l'équation de quantité de mouvement. Dans les deux cas le changement d'échelle rend la circulation bornée sous-critique, et cela supprime la source de tourbillon. La diffusion radiale, cependant, survit au changement d'échelle, de sorte que la vorticité limite s'annule par le principe de comparaison du Lemme 3.3, et non par transport le long des caractéristiques. L'incompressibilité et la bornitude de la vitesse méridienne limite font alors s'annuler les quantités sélectionnées dans la limite, ce qui contredit le choix des points auxquels nous avons zoom .

PREUVE DE LA PROPOSITION 1.5. Fixons un $0 < \rho < 1$ arbitraire. Par (1.11) le quatrième terme de (1.12) est borné comme $(-t)|\partial_z u_r| \leq C_{\text{axi}}(-t)^h$, et tend donc vers zéro dans la limite.

Supposons par contradiction que (1.13)  choue. Alors il existe $c_0 > 0$, des temps $t_n \uparrow 0$, et des points $x_n \in B(\rho)$ auxquels les trois autres termes satisfont

$$(-t_n) \left(|\partial_r u_r| + \left| \frac{u_r}{r} \right| + |\partial_z u_z| \right) (x_n, t_n) \geq c_0. \quad (4.1)$$

Par invariance par rotation nous pouvons sans perte de généralité prendre $x_n = (r_n, 0, z_n)$, où $r_n = |x'_n| \geq 0$. Par le Lemme 3.2, appliqué avec $R_1 = \rho$ et un certain $R_0 \in (\rho, 1)$, il existe $\rho < R_* < 1$, $t_* \in (-1, 0)$, et $C_\Gamma < \infty$ tels que

$$|ru_\theta(x, t)| \leq C_\Gamma \quad \text{sur} \quad B(R_*) \times (t_*, 0). \quad (4.2)$$

Dans toute la preuve, C désigne une constante qui peut dépendre de h , M_f , C_{axi} , ρ , R_* , C_Γ , et de l'intervalle de temps compact considéré, mais jamais de n .

 tape 1 : le changement d'échelle. Nous définissons

$$\lambda_n = (-t_n)^{1/2}, \quad \delta_n = (-t_n)^h = \lambda_n^{2h}, \quad \mu_n = \frac{\lambda_n}{\delta_n} = (-t_n)^{1/2-h} = \lambda_n^{1-2h}. \quad (4.3)$$

C'est-à-dire, $\lambda_n = \ell_r(t_n)$ et $\mu_n = \ell_z(t_n)$ sont les longueurs (1.10), et toutes deux tendent vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ puisque $0 < h < 1/2$. Leur rapport est $\delta_n = \lambda_n/\mu_n \rightarrow 0$. En passant à une sous-suite, nous avons que r_n/λ_n soit reste borné, soit tend vers l'infini. Toute sous-suite extraite dans cette preuve raffine les précédentes, et nous ne la renommons pas ; comme (4.1) tient pour

tout n , elle tient le long de toute sous-suite. Nous zoomons d'abord autour du point $(0, z_n)$ sur l'axe, dans les variables

$$R = \frac{r}{\lambda_n}, \quad Z = \frac{z - z_n}{\mu_n}, \quad \tau = \frac{t}{(-t_n)}, \quad (4.4)$$

de sorte que $\tau = -1$ est le temps sélectionné t_n et $\tau \leq -1$ est son passé. Nous définissons ensuite

$$V_n(R, Z, \tau) = \lambda_n u_r(\lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau), \quad (4.5a)$$

$$W_n(R, Z, \tau) = \lambda_n \delta_n u_z(\lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau), \quad (4.5b)$$

$$S_n(R, Z, \tau) = \lambda_n \delta_n u_\theta(\lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau), \quad (4.5c)$$

$$\Omega_n(R, Z, \tau) = \lambda_n^3 \delta_n \Omega(\lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau), \quad (4.5d)$$

où les composantes cylindriques à droite sont écrites comme fonctions de (r, z, t) . Dans ces variables les bornes (1.11) se lisent

$$|\partial_R^a \partial_Z^b V_n| \leq C_{\text{axi}} |\tau|^{-(1+a)/2 - (1/2-h)b}, \quad (4.6a)$$

$$|\partial_R^a \partial_Z^b W_n| + |\partial_R^a \partial_Z^b S_n| \leq C_{\text{axi}} |\tau|^{-1/2 - h - a/2 - (1/2-h)b}, \quad (4.6b)$$

pour tout $a + b \leq 2$.

Ces bornes tiennent en tout (R, Z, τ) pour lequel le point $(\lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau)$ appartient à $\mathcal{Q}$, et nous appelons l'ensemble de tels (R, Z, τ) la préimage de $\mathcal{Q}$ sous le zoom (4.4). La borne de circulation (4.2) tient sur la préimage du plus petit ensemble $B(R_*) \times (t_*, 0)$. Comme les longueurs (4.3) tendent vers zéro et $|z_n| < \rho < R_*$, les deux préimages contiennent tout compact donné de $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ pour tout n assez grand dépendant de ce compact.

En changeant les variables dans l'équation de divergence (3.1d), dans les définitions (3.2), et dans l'équation de vorticité potentielle (3.4), nous obtenons les identités

$$\partial_R V_n + \frac{V_n}{R} + \partial_Z W_n = 0, \quad \Omega_n = \frac{\delta_n^2 \partial_Z V_n - \partial_R W_n}{R}, \quad (4.7a)$$

$$\partial_\tau \Omega_n + V_n \partial_R \Omega_n + W_n \partial_Z \Omega_n = \left(\partial_{RR} + \frac{3}{R} \partial_R + \delta_n^2 \partial_{ZZ} \right) \Omega_n + \partial_Z F_n + G_n, \quad F_n = \frac{S_n^2}{R^2}, \quad (4.7b)$$

en tout point de la préimage de $\mathcal{Q}$, avec $R > 0$. Notons que la diffusion radiale a un coefficient un, tandis que la diffusion axiale porte le facteur $\delta_n^2 \rightarrow 0$.

Nous consignons les deux termes de force à la fois : la force intervient dans (4.7b) par G_n , et dans l'équation de vorticité azimutale (4.19b) de l'Étape 3 par H_n , où

$$G_n(R, Z, \tau) = \lambda_n^5 \delta_n g(\lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau), \quad (4.8a)$$

$$H_n(R, Z, \tau) = \lambda_n^4 \delta_n (\text{curl } f)_\theta(r_n + \lambda_n R, z_n + \mu_n Z, (-t_n)\tau). \quad (4.8b)$$

Les préfacteurs sont les normalisations $\lambda_n^3 \delta_n$ de Ω dans (4.5) et $\lambda_n^2 \delta_n$ de ω_θ dans (4.18), multipliées par le facteur temporel $(-t_n) = \lambda_n^2$. Comme $|g| \leq CM_f$ sur $\mathcal{Q}$ par (3.6) et $|(\text{curl } f)_\theta| \leq CM_f$ par (1.5), les deux termes tendent uniformément vers zéro : G_n sur la préimage de $\mathcal{Q}$ sous (4.4), jusqu'à l'axe, et H_n sur la préimage de $\mathcal{Q}$ sous (4.17).

Comme $\partial_Z V_n$ et $\partial_R W_n$ s'annulent en $R = 0$, tout comme $\partial_z u_r$ et $\partial_r u_z$ sur l'axe (Section 3.1), les quotients $\partial_Z V_n/R$ et $\partial_R W_n/R$ sont bornés par les suprema de $\partial_{RZ} V_n$ et $\partial_{RR} W_n$ sur le segment radial qui joint $(0, Z, \tau)$ à (R, Z, τ) ; ce segment est encore dans la préimage de $\mathcal{Q}$, puisque $B(1)$ est convexe. Ainsi (4.7a) et (4.6) donnent, sur la préimage de $\mathcal{Q}$ avec $R > 0$,

$$|\Omega_n| \leq C_{\text{axi}} \left(\delta_n^2 |\tau|^{-3/2+h} + |\tau|^{-3/2-h} \right). \quad (4.9)$$

La borne tient aussi en $R = 0$, puisque Ω_n est continue à travers l'axe. Notons que la constante C_{axi} de (4.9) est celle de (4.6), qui ne dépend ni de n ni d'un intervalle de temps ; c'est ce que l'hypothèse de décroissance (3.13) du Lemme 3.3 requiert à l'Étape 2.

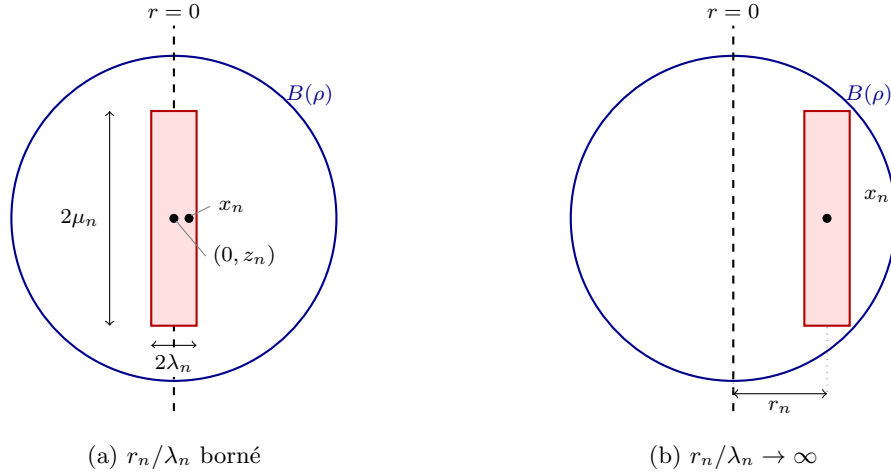
Ensuite, nous passons au tourbillon, qui intervient dans (4.7b) par la source $F_n = S_n^2/R^2$. Comme $RS_n = \delta_n ru_\theta$, la borne de circulation (4.2) donne

$$|RS_n| \leq C_\Gamma \delta_n, \quad (4.10a)$$

partout où le point (4.4) appartient à $B(R_*) \times (t_*, 0)$. Comme S_n s'annule en $R = 0$, tout comme u_θ , $|S_n|/R$ est borné par le supremum de $|\partial_R S_n|$ le long du segment radial vers l'axe, et à son tour (4.6) borne $|\partial_R S_n|$ par $C_{\text{axi}}|\tau|^{-1-h} \leq C_{\text{axi}}$ pour $\tau \leq -1$. Nous arrivons ainsi à

$$|S_n/R| \leq C, \quad (4.10b)$$

en tout point de la préimage de $\mathcal{Q}$ avec $\tau \leq -1$. Comme le passage à la limite de l'Étape 2 est effectué au sens des distributions, ce qui est requis de la source de tourbillon $\partial_Z F_n$ dans (4.7b) est que $F_n \rightarrow 0$ dans L^1_{loc} sur $\{\tau \leq -1\}$, jusqu'à l'axe. Hors de l'axe nous écrivons $F_n = (RS_n)^2/R^4$, et (4.10a) donne $F_n \leq C_\Gamma^2 \delta_n^2 \varepsilon^{-4} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, uniformément sur les compacts de $\{R \geq \varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon > 0$. Près de l'axe nous écrivons $F_n = (S_n/R)^2$, et (4.10b) donne $F_n \leq C^2$ pour $\tau \leq -1$, jusqu'à $R = 0$. Comme $\{R < \varepsilon\}$ est de petite mesure dans tout compact, et ε est arbitraire, les deux bornes ensemble donnent cette convergence, et la source de tourbillon $\partial_Z F_n$ disparaît dans la limite distributionnelle.



□ la boîte de zoom : demi-largeur radiale $\lambda_n = (-t_n)^{1/2}$, demi-largeur axiale $\mu_n = (-t_n)^{1/2-h} \gg \lambda_n$

FIGURE 1. Le zoom anisotrope de l'Étape 1, dessiné dans le plan passant par l'axe. La boîte est longue le long de l'axe et courte en travers, puisque $h > 0$. En (a) la boîte est centrée au point de l'axe $(0, z_n)$, le point sélectionné x_n se trouve à distance remise à l'échelle bornée de l'axe, et la limite est une équation pour la vorticité potentielle, avec le laplacien de $\mathbb{R}^4$ agissant sur les fonctions radiales ; en (b) la boîte est centrée en x_n , comme dans les variables (4.17) de l'Étape 3, l'axe s'éloigne, et la limite est une équation pour la vorticité azimutale sur $\mathbb{R}^2$, avec diffusion dans la seule variable radiale.

Étape 2 : le cas de l'axe à distance finie. Supposons que $r_n/\lambda_n \leq A$ pour un certain A fixé, comme sur la Figure 1(a). Dans cette étape nous prouvons que $\partial_R V_n$, $\partial_Z W_n$ et V_n/R tendent vers zéro en $\tau = -1$, uniformément sur les compacts, et nous en déduisons une contradiction avec (4.1).

L'opérateur radial $\partial_{RR} + 3R^{-1}\partial_R$ dans (4.7b) est le laplacien de $\mathbb{R}^4$ agissant sur les fonctions radiales. Comme dans [33], nous considérons donc Ω_n comme une fonction de $X \in \mathbb{R}^4$ avec $|X| = R$, de sorte que (4.7b) tient à travers l'axe. Ces variables relevées ne sont utilisées que là où l'axe doit être traversé, dans la forme distributionnelle de l'équation et dans les limites faible-* ; l'argument

de compacité pour Ω_n a lieu dans le demi-plan (R, Z) . Nous définissons la dérive

$$\mathcal{B}_n(X, Z, \tau) = \left(\frac{X}{R} V_n(R, Z, \tau), W_n(R, Z, \tau) \right). \quad (4.11)$$

Par les développements radiaux consignés dans la Section 3.1, $\Omega_n, F_n, V_n/R$ et W_n sont des fonctions lisses de (R^2, Z, τ) , de sorte que $\mathcal{B}_n$ est lisse en (X, Z) à travers $X = 0$. Nous consignons l'identité

$$\nabla_X \left(V_n \frac{X}{R} \right) = \frac{V_n}{R} \left(\text{Id} - \frac{X \otimes X}{R^2} \right) + \partial_R V_n \frac{X \otimes X}{R^2},$$

et notons que sa trace est égale à $\partial_R V_n + 3V_n/R$. Comme V_n s'annule en $R = 0$, nous avons $|V_n/R| \leq \sup |\partial_R V_n|$; combinée à (4.6), cette estimation montre que les dérivées $\mathcal{B}_n$ sont uniformément bornées et uniformément lipschitziennes en espace sur les intervalles de temps compacts,¹² comme le Lemme 3.3 l'exige de la dérive limite. Conjointement à l'identité de divergence de (4.7a), la trace donne

$$\text{div}_{X,Z} \mathcal{B}_n = \frac{2}{R} V_n.$$

Comme $\{X = 0\}$ est de mesure nulle, et comme tout terme de (4.7b) qui porte une dérivée est lisse à travers cet ensemble, l'équation

$$\partial_\tau \Omega_n + \text{div}_{X,Z}(\mathcal{B}_n \Omega_n) = \Delta_X \Omega_n + \delta_n^2 \partial_{ZZ} \Omega_n + 2 \frac{V_n}{R} \Omega_n + \partial_Z F_n + G_n \quad (4.12)$$

tient presque partout dans les variables relevées, sur la préimage de $\mathcal{Q}$ sous (4.4), donc aussi au sens des distributions là. Notons que le terme de force $G_n = G_n(|X|, Z, \tau)$ dans (4.12) n'intervient que par son supremum, et satisfait $|G_n| \leq CM_f \lambda_n^5 \delta_n \rightarrow 0$ sur cet ensemble, comme consigné après (4.8).

Soit $K \subset \{R > 0\}$ un rectangle fermé dans le demi-plan. La seconde identité de (4.7a) et les bornes de (4.6) peuvent être utilisées pour estimer les dérivées spatiales premières de Ω_n dans $L^\infty(K)$, uniformément en n sur les intervalles de temps compacts dans $(-\infty, -1]$. En utilisant (4.7b), nous pouvons borner $\partial_\tau \Omega_n$ dans $W^{-2,p}(\text{int } K)$, uniformément sur les intervalles de temps compacts, pour tout $p \in [1, \infty)$, puisque tout terme de (4.7b) autre que $\partial_\tau \Omega_n$ est au plus deux dérivées d'une fonction bornée sur K uniformément en n .¹³ Un argument de compacité standard donne alors, pour tout $\eta > 0$, une constante C_η (qui dépend aussi de K et p) telle que

$$\|F\|_{C^0(K)} \leq \eta \|F\|_{C^{0,1}(K)} + C_\eta \|F\|_{W^{-2,p}(\text{int } K)},$$

pour tout $F \in C^{0,1}(K)$. En appliquant cette inégalité à $\Omega_n(\tau) - \Omega_n(\tau')$, nous en déduisons que les applications $\tau \mapsto \Omega_n(\tau)$ sont équicontinues à valeurs dans $C^0(K)$. Par Arzelà-Ascoli et une extraction diagonale, nous arrivons à

$$\Omega_n \rightarrow \Omega_\infty \quad \text{localement uniformément sur } \{R > 0, \tau \leq -1\}. \quad (4.13)$$

L'extrémité $\tau = -1$ est incluse parce que toutes les estimations ci-dessus tiennent sur chaque intervalle fermé $[-T, -1]$.

Ensuite, nous prolongeons Ω_∞ par zéro sur l'ensemble de mesure nulle $\{X = 0\}$, et affirmons que la convergence tient aussi à travers l'axe, en ce sens que

$$\Omega_n \rightarrow \Omega_\infty \quad \text{dans } L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times (-\infty, -1]) \quad \text{pour tout } 1 \leq p < \infty. \quad (4.14)$$

En effet, pour $\tau \leq -1$ la borne (4.9) donne $|\Omega_n| \leq C$ uniformément en n , jusqu'à l'axe, et donc $|\Omega_\infty| \leq C$ aussi par (4.13), de sorte que le tube $\{|X| < \varepsilon\}$, dont la mesure est de l'ordre de ε^4 (à Z et τ fixés), contribue peu à la norme L^p de $\Omega_n - \Omega_\infty$ sur tout compact, uniformément en n

¹²La borne que nous obtenons est $|\mathcal{B}_n| + |\nabla \mathcal{B}_n| \leq C|\tau|^{-1/2}$ pour $\tau \leq -1$.

¹³Ici nous utilisons les bornes (4.6), (4.9), les bornes de dérivées premières sur Ω_n qui viennent d'être établies, l'estimation (4.10a), et l'annulation uniforme de G_n .

; hors du tube, la convergence (4.13) est uniforme sur les compacts. Nous avons utilisé le même raisonnement à l'Étape 1, pour la convergence $F_n \rightarrow 0$ dans L_{loc}^1 .

Nous passons ensuite à la limite dans (4.12), et montrons que Ω_∞ résout (4.15) ci-dessous au sens faible. À cette fin, les bornes (4.6) nous permettent d'extraire des limites faible-* V et W de V_n et W_n , sur les compacts du domaine spatio-temporel relevé. Comme X/R est une fonction bornée indépendante de n , les dérivées $\mathcal{B}_n$ définies en (4.11) convergent faible-* vers $\mathcal{B} = (VX/R, W)$. Ces dérivées sont uniformément lipschitziennes en espace sur les intervalles de temps compacts, de sorte que nous extrayons simultanément la limite faible-* des gradients $\nabla \mathcal{B}_n$, qui est le gradient distributionnel de $\mathcal{B}$. Les constantes de (4.6) ne dépendent pas de l'ensemble spatial compact, de sorte que $|\mathcal{B}| + |\nabla \mathcal{B}| \leq C_J$ presque partout sur $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times J$, pour tout compact $J \subset (-\infty, -1)$. Par Fubini, $\mathcal{B}(\cdot, \tau) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R})$ pour presque tout τ , avec la même borne, de sorte que (3.10) tient avec $\Lambda_J \leq C_J$. De plus, comme $|X|^{-1}$ est localement intégrable en dimension quatre, φ/R est intégrable pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times (-\infty, -1))$, de sorte que la convergence faible-* de V_n donne $V_n/R \rightarrow V/R$ dans les distributions. En passant à la limite dans $\text{div}_{X,Z} \mathcal{B}_n = 2V_n/R$ on obtient $\text{div}_{X,Z} \mathcal{B} = 2V/R$. La convergence faible-* de $\mathcal{B}_n$ contre la convergence forte (4.14) de Ω_n , conjointement à la borne uniforme $|V_n/R| \leq \sup |\partial_R V_n|$, nous permet de passer à la limite dans les produits de (4.12), tandis que $\delta_n \rightarrow 0$, $G_n \rightarrow 0$ uniformément, et $F_n \rightarrow 0$ dans L_{loc}^1 suppriment les termes restants. Au vu de $\text{div}_{X,Z} \mathcal{B} = 2V/R$, la limite est l'équation du Lemme 3.3, sous la forme

$$\partial_\tau \Omega_\infty + \mathcal{B} \cdot \nabla \Omega_\infty = \Delta_X \Omega_\infty \quad \text{sur } \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times (-\infty, -1). \quad (4.15)$$

Comme $\delta_n^2 |\tau|^{-3/2+h} \leq \delta_n^2$ pour $\tau \leq -1$, la borne (4.9) implique

$$|\Omega_\infty(X, Z, \tau)| \leq C_{\text{axi}} |\tau|^{-3/2-h}.$$

Ainsi Ω_∞ est borné sur $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times J$ pour tout compact $J \subset (-\infty, -1)$, résout (4.15) dans les distributions avec une dérivée satisfaisant (3.10), et obéit à (3.13) avec $\kappa = 3/2 + h$. La dernière assertion du Lemme 3.3, avec $(m, d) = (5, 4)$, donne

$$\Omega_\infty = 0.$$

Par (4.13), Ω_∞ est continu sur $\{R > 0, \tau \leq -1\}$, de sorte qu'il s'annule en tout point de cet ensemble, l'extrémité $\tau = -1$ étant incluse.

En $\tau = -1$, les bornes (4.6) rendent $V_n(\cdot, -1)$ et $W_n(\cdot, -1)$ bornés dans C^2 sur tout compact du demi-plan fermé, avec une constante qui ne dépend pas du compact. En passant à une sous-suite ultérieure, nous obtenons $V_n(\cdot, -1) \rightarrow V^0$ et $W_n(\cdot, -1) \rightarrow W^0$ dans C^1 sur les compacts, avec V^0 et W^0 bornés sur tout le demi-plan. En passant à la limite dans la première identité de (4.7a), nous obtenons

$$\partial_R V^0 + \frac{V^0}{R} + \partial_Z W^0 = 0,$$

sur $\{R > 0\}$. Comme $\Omega_n(\cdot, -1) \rightarrow 0$ hors de l'axe, par (4.13) et $\Omega_\infty = 0$, et comme $\delta_n \rightarrow 0$ tandis que $\partial_Z V_n(\cdot, -1)$ est borné, la seconde identité de (4.7a) donne

$$\partial_R W^0 = 0,$$

sur $\{R > 0\}$. Contrairement à [14], l'identité de vorticité ne donne que $\partial_R W^0 = 0$, pas une limite sans rotationnel ; à la place, la bornitude de V^0 remplace le théorème de Liouville. Comme W^0 ne dépend pas de R , nous pouvons r  crire l'équation de divergence pour (V^0, W^0) comme $\partial_R(RV^0) = -R\partial_Z W^0(Z)$. En l'intégrant depuis l'axe, où RV^0 s'annule parce que V^0 est borné, nous obtenons

$$V^0(R, Z) = -\frac{R}{2} \partial_Z W^0(Z).$$

La bornitude de V^0 pour tout $R \geq 0$ force $\partial_Z W^0 = 0$, et alors aussi $V^0 = 0$, sur $\{R > 0\}$, donc sur le demi-plan fermé par continuité. Comme la convergence vers V^0 et W^0 tient dans C^1 sur les compacts du demi-plan fermé, nous concluons que, uniformément sur tout un tel compact,

$$\partial_R V_n(\cdot, -1) \rightarrow 0, \quad \partial_Z W_n(\cdot, -1) \rightarrow 0, \quad V_n(\cdot, -1)/R \rightarrow 0. \quad (4.16)$$

Les convergences tiennent jusqu'à l'axe ; pour la dernière, c'est parce que $V_n(R, Z, -1)/R = \int_0^1 \partial_R V_n(\sigma R, Z, -1) d\sigma$ pour $R > 0$, le membre de droite étant continu en $R = 0$.

Avec (4.16) en main, nous revenons aux points x_n sélectionnés dans (4.1). Dans les variables (4.4), le point (x_n, t_n) a pour coordonnées $(R, Z, \tau) = (r_n/\lambda_n, 0, -1)$, et $(r_n/\lambda_n, 0)$ appartient au compact $[0, A] \times \{0\}$ pour tout n . Comme $\partial_R = \lambda_n \partial_r$, $\partial_Z = \mu_n \partial_z$, $R = r/\lambda_n$, et $\lambda_n^2 = \lambda_n \delta_n \mu_n = (-t_n)$, les définitions (4.5) et la règle de chaîne montrent que le membre de gauche de (4.1) vaut

$$(-t_n) \left(|\partial_r u_r| + \left| \frac{u_r}{r} \right| + |\partial_z u_z| \right) (x_n, t_n) = \left(|\partial_R V_n| + \left| \frac{V_n}{R} \right| + |\partial_Z W_n| \right) \left(\frac{r_n}{\lambda_n}, 0, -1 \right),$$

les deux quotients étant prolongés continûment à l'axe. Comme la convergence (4.16) est uniforme sur $[0, A] \times \{0\}$, le membre de droite du dernier affichage tend vers zéro le long de la sous-suite, tandis que son membre de gauche est borné inférieurement par $c_0 > 0$. L'ansatz de contradiction (4.1) échoue donc dans le cas de l'axe à distance finie.

Étape 3 : le cas de l'axe qui s'éloigne. Nous passons maintenant à l'autre alternative de l'Étape 1 : supposons que $A_n = r_n/\lambda_n \rightarrow \infty$, comme sur la Figure 1(b). Dans cette étape nous prouvons que $\partial_R V_n$ et $\partial_Z W_n$, pris maintenant dans les variables recentrées (4.17), tendent vers zéro au point sélectionné, et que le terme restant $(-t_n)u_r/r$ y est petit par (1.11) seul ; nous en déduisons une contradiction avec (4.1).

L'argument suit l'Étape 2, avec la vorticité azimutale à la place de la vorticité potentielle et sans axe à traverser. Nous zoomons maintenant autour du point sélectionné x_n lui-même, dans les variables (R, Z, τ) définies par

$$r = r_n + \lambda_n R = \lambda_n (A_n + R), \quad z = z_n + \mu_n Z, \quad t = (-t_n) \tau. \quad (4.17)$$

Nous définissons V_n, W_n, S_n comme en (4.5), avec les mêmes préfacteurs et avec le point de (4.17) comme argument. La vorticité azimutale remise à l'échelle est

$$\Theta_n(R, Z, \tau) = \lambda_n^2 \delta_n \omega_\theta(r, z, t) = \delta_n^2 \partial_Z V_n(R, Z, \tau) - \partial_R W_n(R, Z, \tau), \quad (4.18)$$

où (r, z, t) est le point (4.17). Comme $\lambda_n, \mu_n \rightarrow 0$ par (4.3), $A_n \rightarrow \infty$ par hypothèse, et $|x_n| < \rho < R_*$, la préimage de $\mathcal{Q}$ sous (4.17), dont l'axe se trouve en $R = -A_n$, contient tout compact donné de $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -1]$ pour tout n assez grand dépendant de ce compact ; il en va de même de la préimage de $B(R_*) \times (t_*, 0)$, sur laquelle (4.2) tient. Les bornes (4.6) sont inchangées, puisque $\partial_R = \lambda_n \partial_r$ et $\partial_Z = \mu_n \partial_z$ comme en (4.4), et puisque (1.11) tient en tout point de $\mathcal{Q}$. L'équation de divergence (3.1d) et l'équation de vorticité azimutale (3.3) deviennent

$$\partial_R V_n + \frac{V_n}{A_n + R} + \partial_Z W_n = 0, \quad (4.19a)$$

et

$$\begin{aligned} & \partial_\tau \Theta_n + V_n \partial_R \Theta_n + W_n \partial_Z \Theta_n - \frac{V_n}{A_n + R} \Theta_n \\ &= \left(\partial_{RR} + \frac{1}{A_n + R} \partial_R + \delta_n^2 \partial_{ZZ} - \frac{1}{(A_n + R)^2} \right) \Theta_n + \frac{1}{A_n + R} \partial_Z (S_n^2) + H_n, \end{aligned} \quad (4.19b)$$

en tout point de la préimage de $\mathcal{Q}$ sous (4.17) avec $A_n + R > 0$, et avec H_n donné par (4.8b). Par (4.18) et (4.6), sur la préimage de $\mathcal{Q}$ sous (4.17),

$$|\Theta_n| \leq C_{\text{axi}} \left(\delta_n^2 |\tau|^{-1+h} + |\tau|^{-1-h} \right). \quad (4.20)$$

Ceci joue le rôle de (4.9) à l'Étape 2.

Comme $(A_n + R)S_n = \delta_n ru_\theta$ (voir (4.5c) et (4.17)), la borne de circulation (4.2) donne

$$|S_n| \leq C \Gamma \frac{\delta_n}{A_n + R}$$

partout où le point défini en (4.17) appartient à $B(R_*) \times (t_*, 0)$, et $A_n + R > 0$.¹⁴

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un rectangle fermé. L'identité (4.18) et les bornes de (4.6) peuvent être utilisées pour estimer les dérivées spatiales premières de Θ_n dans $L^\infty(K)$, uniformément en n sur les intervalles de temps compacts dans $(-\infty, -1]$. En utilisant (4.19b), nous pouvons borner $\partial_\tau \Theta_n$ dans $W^{-2,p}(\text{int } K)$, uniformément sur les intervalles de temps compacts, pour tout $p \in [1, \infty)$, puisque tout terme de (4.19b) autre que $\partial_\tau \Theta_n$ est au plus deux dérivées d'une fonction bornée sur K uniformément en n .¹⁵ L'argument de compacité de l'Étape 2, sans axe à traverser, donne alors

$$\Theta_n \rightarrow \Theta \quad \text{localement uniformément sur } \mathbb{R}^2 \times (-\infty, -1].$$

Notre objectif suivant est de passer à la limite $n \rightarrow \infty$ dans (4.19) et (4.20), et de montrer que Θ résout l'équation limite (4.21a) ci-dessous. À cette fin, comme par (4.6) les champs V_n et W_n sont uniformément bornés et uniformément lipschitziens en espace sur les intervalles de temps compacts, nous extrayons des limites faible-* V, W de V_n, W_n sur les compacts de $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -1]$, ainsi que les limites faible-* de leurs gradients spatiaux, qui sont les gradients distributionnels de V et W . Trois termes de (4.19b) disparaissent dans la limite parce que l'axe s'éloigne. Sur un ensemble spatial compact les facteurs $(A_n + R)^{-1}$ et $(A_n + R)^{-2}$ tendent uniformément vers zéro quand $A_n \rightarrow \infty$, tandis que Θ_n et $\partial_R \Theta_n$ y sont bornés, uniformément en n sur les intervalles de temps compacts ; donc les termes visqueux $(A_n + R)^{-1} \partial_R \Theta_n$ et $(A_n + R)^{-2} \Theta_n$ tendent uniformément vers zéro. La source de tourbillon, écrite comme $\partial_Z(S_n^2/(A_n + R))$, tend vers zéro dans les distributions, puisque $S_n^2/(A_n + R) \leq C_F^2 \delta_n^2/(A_n + R)^3$ par la borne sur S_n ci-dessus, et le membre de droite s'annule uniformément quand $n \rightarrow \infty$. Le terme $\delta_n^2 \partial_{ZZ} \Theta_n$ tend de même vers zéro dans les distributions parce que $\delta_n \rightarrow 0$. Rappelons, d'après la discussion qui suit (4.8), que le terme de force $H_n \rightarrow 0$ uniformément. Le terme d'étirement $-(A_n + R)^{-1} V_n \Theta_n$ au membre de gauche de (4.19b) n'est pas écarté dans la limite. Par (4.19a) il vaut $\Theta_n \text{div}_{R,Z}(V_n, W_n)$, de sorte qu'au membre de gauche de (4.19b) nous avons une divergence parfaite

$$V_n \partial_R \Theta_n + W_n \partial_Z \Theta_n - \frac{V_n}{A_n + R} \Theta_n = \text{div}_{R,Z}((V_n, W_n) \Theta_n).$$

En passant à la limite, en utilisant la convergence faible-* de (V_n, W_n) conjointement à la convergence forte de Θ_n , et avec V_n borné et $A_n \rightarrow \infty$ dans (4.19a), nous obtenons

$$\partial_\tau \Theta + V \partial_R \Theta + W \partial_Z \Theta = \partial_{RR} \Theta, \quad (4.21a)$$

$$\partial_R V + \partial_Z W = 0, \quad (4.21b)$$

sur $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -1)$. Pour $\tau \leq -1$, la borne

$$|\Theta(R, Z, \tau)| \leq C_{\text{axi}} |\tau|^{-1-h} \quad (4.21c)$$

est héritée de (4.20), puisque $\delta_n^2 |\tau|^{-1+h} \leq \delta_n^2$ dans cette plage. Les termes autres que $\partial_\tau \Theta_n$ au membre de gauche de (4.19b) convergent dans les distributions vers $\text{div}_{R,Z}((V, W) \Theta)$, et la dérive limite est à divergence nulle, de sorte que le terme de transport dans (4.21a) est celui de la note de bas de page du Lemme 3.3.

¹⁴Nous invoquons ici la borne de circulation plutôt que l'estimation de S_n dans (4.6), afin que les bornes sur u_θ n'interviennent dans cette section qu'en un seul endroit ; voir la Remarque 5.2.

¹⁵Ici nous utilisons les bornes (4.6) et (4.20), les bornes de dérivées premières sur Θ_n qui viennent d'être établies, l'annulation uniforme de H_n , et la borne sur S_n qui vient d'être obtenue, appliquée à la source de tourbillon écrite comme $\partial_Z(S_n^2/(A_n + R))$, ce qui est possible puisque $A_n + R$ ne dépend pas de Z .

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le Lemme 3.3. Le champ limite Θ est continu sur $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -1]$, étant une limite localement uniforme, et est borné sur $\mathbb{R}^2 \times J$ pour tout compact $J \subset (-\infty, -1)$. Comme les bornes de (4.6) ne dépendent pas de l'ensemble spatial compact, la dérivée limite (V, W) appartient, comme à l'Étape 2, à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ pour presque tout τ , et satisfait (3.10) sur tout intervalle de temps compact. La dernière assertion du Lemme 3.3, appliquée à (4.21) avec $(m, d) = (2, 1)$ et $\kappa = 1 + h$, donne donc

$$\Theta = 0$$

sur $\mathbb{R}^2 \times (-\infty, -1]$, par continuité. En particulier, $\Theta(\cdot, -1) = 0$.

En $\tau = -1$, les bornes (4.6) rendent $V_n(\cdot, -1)$ et $W_n(\cdot, -1)$ bornés dans C^2 sur tout compact de $\mathbb{R}^2$. En passant à une sous-suite ultérieure, nous obtenons $V_n(\cdot, -1) \rightarrow V^0$ et $W_n(\cdot, -1) \rightarrow W^0$ dans C^1 sur les compacts. Les limites V^0 et W^0 sont bornées sur $\mathbb{R}^2$ par la constante C_{axi} de (4.6), qui ne dépend pas du compact. En passant à la limite dans l'identité de divergence (4.19a), dans laquelle $V_n/(A_n + R) \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts puisque V_n est borné et $A_n \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\partial_R V^0 + \partial_Z W^0 = 0.$$

Comme $\Theta_n(\cdot, -1) \rightarrow \Theta(\cdot, -1) = 0$ localement uniformément, et comme $\delta_n \rightarrow 0$ tandis que $\partial_Z V_n$ est borné, l'identité (4.18) donne

$$\partial_R W^0 = 0,$$

de sorte que $W^0 = W^0(Z)$. En intégrant l'identité de divergence $\partial_R V^0 + \partial_Z W^0 = 0$ en R , nous obtenons

$$V^0(R, Z) = -R \partial_Z W^0(Z) + V^0(0, Z).$$

Comme à l'Étape 2, la bornitude de V^0 pour tout $R \in \mathbb{R}$ force $\partial_Z W^0 = \partial_R V^0 = 0$. Comme la convergence en $\tau = -1$ tient dans C^1 sur les compacts, nous obtenons

$$\partial_R V_n(0, 0, -1) \rightarrow 0, \quad \partial_Z W_n(0, 0, -1) \rightarrow 0. \quad (4.22)$$

Pour conclure, nous comparons (4.22) à la sélection (4.1). Dans les variables de (4.17) le point (x_n, t_n) est $(0, 0, -1)$, et la règle de chaîne donne

$$(-t_n) \partial_r u_r(x_n, t_n) = \partial_R V_n(0, 0, -1), \quad (-t_n) \partial_z u_z(x_n, t_n) = \partial_Z W_n(0, 0, -1).$$

Ainsi, les premier et troisième termes du membre de gauche de (4.1) tendent vers zéro par (4.22). Pour le second terme aucun argument de limite n'est nécessaire : comme $A_n \rightarrow \infty$, nous avons $r_n > 0$ pour tout n assez grand, et (1.11) donne

$$(-t_n) \left| \frac{u_r(x_n, t_n)}{r_n} \right| \leq C \frac{\lambda_n}{r_n} = \frac{C}{A_n} \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

Le membre de gauche de (4.1) tend donc vers zéro le long de la sous-suite, ce qui contredit la borne inférieure $c_0 > 0$ dans le cas de l'axe qui s'éloigne également, concluant ainsi la preuve de (1.13). $\square$

5. Le critère de régularité locale

Dans cette section nous montrons que la petitesse relative fournie par la Proposition 1.5, conjointement à l'anneau régulier du Lemme 3.2, rend $(0, 0)$ régulier, ce qui prouve le Théorème 1.3.

LEMME 5.1 (La petitesse des quantités méridiennes implique la régularité). *Soit (u, π) une solution faible convenable axisymétrique de (1.2) sur $\mathcal{Q}$, lisse sur les compacts de $\mathcal{Q}$, avec une force axisymétrique satisfaisant (1.5) ; les bornes (1.11) ne sont pas supposées. Supposons que*

$$\lim_{t \uparrow 0} (-t) G_{\rho_0}(t) = 0 \quad (5.1)$$

tienne pour un certain $\rho_0 \in (0, 1)$, avec G_{ρ_0} défini comme en (1.12). Alors $(0, 0)$ est un point régulier.

PREUVE DU LEMME 5.1. Nous fixons un anneau régulier pour u à l'intérieur de $B(\rho_0)$, comme dans le Lemme 3.2 appliqué avec $R_1 = 0$ et $R_0 = \rho_0$: sur l'anneau cylindrique $\{R_- < |x| < R_+\} \times (t_0, 0)$ la vitesse u , ainsi que ∇u et $\nabla^2 u$, est bornée. Nous fixons ensuite des rayons $R_- < \rho < R_* < R_+$ et une troncature radiale lisse χ supportée dans $B(R_*)$, égale à un sur $B(\rho)$, dont les dérivées sont supportées dans l'anneau cylindrique. Dans toute la preuve, C désigne une constante qui ne dépend que de χ , de M_f , des bornes sur u sur l'anneau cylindrique, mais jamais du paramètre η choisi à la fin de la preuve. En particulier, tout terme dans lequel une dérivée tombe sur χ est borné par une telle constante, puisque son support est dans l'anneau cylindrique. Enfin, les normes sans domaine spécifié sont prises sur $\mathbb{R}^3$, les champs localisés étant prolongés par zéro.

Nous écrivons $G(t) = G_{\rho_0}(t)$, et pour chaque $\eta > 0$ nous fixons $t_\eta \in (t_0, 0)$ assez proche de zéro pour que

$$G(t) \leq \frac{\eta}{(-t)} \quad \text{sur } (t_\eta, 0). \quad (5.2)$$

Comme $B(R_*) \subset B(\rho_0)$, les quatre quantités de (1.12) sont bornées par G sur $B(R_*)$; en particulier $|u_r/r| \leq G$ là. La vitesse azimutale u_θ , de plus, s'annule sur l'axe, et est bornée sur $\partial B(R_*) \times (t_0, 0)$ et aussi sur la tranche temporelle initiale $B(R_*) \times \{t_\eta\}$. Par l'équation du tourbillon (3.1c), la fonction $\psi = (-t)^\eta u_\theta$ satisfait

$$\partial_t \psi + b \cdot \nabla \psi - \Delta \psi + \left(r^{-2} + \frac{u_r}{r} + \frac{\eta}{(-t)} \right) \psi = (-t)^\eta f_\theta,$$

où $b = u_r e_r + u_z e_z$ est la vitesse méridienne. Par (5.2), le coefficient d'ordre zéro est donc au moins $r^{-2} \geq 0$ sur $B(R_*) \times (t_\eta, 0)$, et la source est bornée par M_f . Comme $\Delta = \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r + \partial_z^2$ sur les scalaires axisymétriques, cette équation est de la forme (3.7) avec $k = 1$. Le coefficient r^{-2} est singulier sur l'axe, mais ψ s'y annule, et pour tout $s \in (t_\eta, 0)$ elle est continue sur $\overline{B(R_*)} \times [t_\eta, s]$ et lisse hors de l'axe. Comme dans la preuve du Lemme 3.2, en invoquant le Lemme 3.1 nous obtenons une borne pour $|\psi|$, uniformément en s , par ses valeurs au temps t_η et sur $\partial B(R_*) \times [t_\eta, 0)$, plus $M_f |t_\eta|$. C'est-à-dire qu'il existe une constante $C_\eta > 0$ telle que $|\psi| \leq C_\eta$ sur $B(R_*) \times (t_\eta, 0)$, et

$$W(t) := \|u_\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty(B(R_*))} \leq C_\eta (-t)^{-\eta}, \quad t_\eta < t < 0. \quad (5.3)$$

Nous posons

$$Y(t) = \|\chi \omega(\cdot, t)\|_{L^2}^2, \quad M(t) = \|\chi \nabla \omega(\cdot, t)\|_{L^2}^2,$$

où $\omega = \text{curl } u$. En prenant le rotationnel de (1.2), nous obtenons

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \Delta \omega = \omega \cdot \nabla u + \text{curl } f,$$

et nous testons cette équation contre $\chi^2 \omega$. Les termes de transport et de diffusion produisent alors $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Y$ et M , à des erreurs de troncature près qui sont bornées par C . Le terme de force, quant à lui, est borné par $C \|\text{curl } f\|_{L^\infty} Y^{1/2} \leq C(Y + 1)$, et nous arrivons à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Y + M \leq \int \chi^2 (\omega \cdot \nabla u) \cdot \omega \, dx + C(Y + 1). \quad (5.4)$$

Borner le terme d'étirement requiert deux bornes elliptiques, que nous consignons ensuite. Comme $\text{div } b = 0$ et $\text{curl } b = \omega_\theta e_\theta$, les identités $\|\nabla v\|_{L^2}^2 = \|\text{curl } v\|_{L^2}^2 + \|\text{div } v\|_{L^2}^2$ et $\|\nabla^2 v\|_{L^2}^2 = \|\nabla \text{curl } v\|_{L^2}^2 + \|\nabla \text{div } v\|_{L^2}^2$, valables pour v lisse à support compact, appliquées à χu et à χb , donnent

$$\|\nabla(\chi u)\|_{L^2} + \|\chi \nabla b\|_{L^2} \leq C(Y + 1)^{1/2}, \quad (5.5a)$$

$$\|\chi \nabla^2 b\|_{L^2} \leq C(M + 1)^{1/2}. \quad (5.5b)$$

La seconde inégalité utilise aussi $|\nabla(\omega_\theta e_\theta)| \leq |\nabla\omega|$, qui découle de l'identité du gradient cartésien pour un champ vectoriel axisymétrique,

$$|\nabla\omega|^2 = \sum_{o \in \{r, \theta, z\}} (|\partial_r \omega_o|^2 + |\partial_z \omega_o|^2) + \frac{\omega_r^2 + \omega_\theta^2}{r^2}. \quad (5.6)$$

En particulier, nous notons que les termes d'axe ω_r^2/r^2 et ω_θ^2/r^2 font partie de la dissipation.

Dans le repère cylindrique, avec $\omega_r = -\partial_z u_\theta$ et $\omega_z = \partial_r u_\theta + u_\theta/r$, le terme d'étirement s'écrit

$$(\omega \cdot \nabla u) \cdot \omega = (\partial_r u_r) \omega_r^2 + \frac{u_r}{r} \omega_\theta^2 + (\partial_z u_z) \omega_z^2 + (\partial_z u_r + \partial_r u_z) \omega_r \omega_z - 2 \frac{u_\theta}{r} \omega_r \omega_\theta. \quad (5.7)$$

Après multiplication par χ^2 et intégration, les trois premiers termes du membre de droite de (5.7), et le terme contenant $\partial_z u_r$, sont tous bornés par $C G Y$, leurs coefficients étant les quatre quantités de la définition en (1.12). Pour le terme contenant $\partial_r u_z$ nous intégrons par parties en z en utilisant que $\omega_r = -\partial_z u_\theta$, et arrivons à

$$I := \int \chi^2 (\partial_r u_z) \omega_r \omega_z dx = - \int \chi^2 (\partial_r u_z) (\partial_z u_\theta) \omega_z dx = \int u_\theta \partial_z (\chi^2 (\partial_r u_z) \omega_z) dx. \quad (5.8)$$

La borne (5.3) nous permet d'estimer le tourbillon dans L^∞ . Le terme contenant $\partial_z \chi$ est borné par C , comme noté au début de la preuve, tandis que pour les deux autres termes, (5.5) conjointement à $|\partial_z \partial_r u_z| \leq |\nabla^2 b|$ et $|\partial_r u_z| \leq |\nabla b|$ donne

$$\begin{aligned} |I| &\leq C + W \|\chi \partial_z \partial_r u_z\|_{L^2} \|\chi \omega_z\|_{L^2} + W \|\chi \partial_r u_z\|_{L^2} \|\chi \partial_z \omega_z\|_{L^2} \\ &\leq C + C W (M + 1)^{1/2} Y^{1/2} + C W (Y + 1)^{1/2} M^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{4} M + C (W^2 + 1) (Y + 1). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Revenant à (5.7), il reste donc à borner le dernier terme, qui contient ω_r/r . En utilisant (5.6) nous obtenons

$$2 \left| \int \chi^2 \frac{u_\theta}{r} \omega_r \omega_\theta dx \right| \leq 2W \|\chi \omega_r/r\|_{L^2} \|\chi \omega_\theta\|_{L^2} \leq 2W M^{1/2} Y^{1/2} \leq \frac{1}{4} M + 4W^2 Y. \quad (5.10)$$

En insérant (5.9) et (5.10) dans (5.4), en absorbant $\frac{1}{2} M$ dans le membre de gauche, nous avons donc montré qu'il existe $C_* \geq 1$, qui ne dépend que de χ , de M_f , et des bornes sur u sur l'anneau cylindrique, tel que

$$\frac{d}{dt} Y + M \leq C_* (G + W^2 + 1) (Y + 1). \quad (5.11)$$

À ce stade nous fixons $\eta = 1/(16C_*) \leq 1/16$; ce choix est permis parce que C_* a été fixé avant que η ne soit choisi. En combinant (5.11) aux bornes (5.2) et (5.3), l'inégalité de Grönwall donne

$$Y(t) + 1 \leq (Y(t_\eta) + 1) \exp \left(\int_{t_\eta}^t \left(\frac{C_* \eta}{(-s)} + \frac{C_* C_\eta^2}{(-s)^{2\eta}} + C_* \right) ds \right) \leq C'_\eta (-t)^{-C_* \eta}$$

pour tout $t \in (t_\eta, 0)$, pour une constante convenable $C'_\eta > 0$. Notons que $Y(t_\eta)$ est finie puisque u est lisse au temps t_η . La première inégalité de (5.5) et l'inégalité de Sobolev donnent alors

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^6(B(\rho))} \leq \|\chi u(\cdot, t)\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla(\chi u)(\cdot, t)\|_{L^2} \leq C''_\eta (-t)^{-C_* \eta/2}$$

pour tout $t \in (t_\eta, 0)$. Comme $2C_* \eta = 1/8 < 1$, cette borne implique la condition locale de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin

$$u \in L^4(t_\eta, 0; L^6(B(\rho))),$$

au couple d'exposants frontière $3/6 + 2/4 = 1$. Par conséquent $\|u\|_{L^4(-r^2, 0; L^6(B(r)))}$ tend vers zéro quand $r \downarrow 0$, pour $r \leq \min\{\rho, (-t_\eta)^{1/2}\}$. Le critère intérieur de Gustafson, Kang et Tsai [28, Théorème 1.1(i), avec $p_* = 6$ et $q = 4$], appliqué, comme dans la preuve du Lemme 3.2, au point

central supérieur $(0,0)$ au couple de la note de bas de page 2, dont la force bornée appartient à l'espace de Morrey parabolique $M^{2,2}$ de [28, Équation (6)], borne donc u sur un cylindre rétrograde à l'origine : $(0,0)$ est un point régulier. $\square$

PREUVE DU THÉORÈME 1.3. La Proposition 1.5 avec $\rho = 1/2$ donne (5.1) avec $\rho_0 = 1/2$, et le Lemme 5.1 rend $(0,0)$ régulier. $\square$

Enfin, nous précisons un commentaire que nous avons évoqué dans la Remarque 1.4(c).

REMARQUE 5.2 (**Les bornes méridiennes suffisent**). Le Théorème 1.3 reste valable si (1.11) est imposée sur u_r et u_z seulement, sans borne sur u_θ ni sur ses dérivées. En effet, le Lemme 5.1 n'utilise pas (1.11), et la Section 4 n'utilise les bornes sur u_θ qu'en un seul endroit, l'estimation (4.10b), dont le rôle est de borner la source de tourbillon $F_n = S_n^2/R^2$ près de l'axe ; le summand S_n de (4.6) n'est utilisé nulle part ailleurs. Nous le remplaçons comme suit. Comme u_r s'annule sur l'axe, la borne sur $\partial_r u_r$ de (1.11) donne $|u_r/r| \leq C_{\text{axi}}(-t)^{-1}$ sur $B(1)$, de sorte que pour un $N \geq C_{\text{axi}}$ fixé la fonction $(-t)^N u_\theta$ résout l'équation affichée dans la preuve du Lemme 5.1, avec N à la place de η , dans laquelle le coefficient d'ordre zéro $r^{-2} + u_r/r + N(-t)^{-1}$ est au moins r^{-2} , et la source est bornée par M_f . De plus, u est bornée sur $\partial B(R_*) \times (t_*, 0)$, puisque le rayon R_* et le temps t_* de la Section 4 sont ceux du Lemme 3.2. Alors, le Lemme 3.1, appliqué comme dans la preuve du Lemme 5.1 avec t_* à la place de t_η , donne $|u_\theta| \leq C_N(-t)^{-N}$ sur $B(R_*) \times (t_*, 0)$, avec R_* et t_* comme dans la Section 4. Dans les variables de l'Étape 1 cela se lit $|S_n| \leq K_n := C_N(-t_n)^{1/2+h-N}$ sur les compacts de la tranche $-T \leq \tau \leq -1$, pour n grand, et conjointement à (4.10a), $|RS_n| \leq D_n := C_\Gamma \delta_n$, cela donne, pour tout $L > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^L F_n R^3 dR &\leq \int_0^L \min\{K_n^2 R, D_n^2/R\} dR \leq D_n^2 \left(\frac{1}{2} + \log_+ \frac{LK_n}{D_n} \right) \\ &\leq C_{L,N}(-t_n)^{2h} (1 + |\log(-t_n)|) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

où $\log_+ a = \max\{0, \log a\}$ et $C_{L,N}$ dépend aussi de C_Γ . Ainsi $F_n \rightarrow 0$ dans L_{loc}^1 des variables relevées de (4.12), ce qui est tout ce que requiert le passage à la limite dans $\partial_Z F_n$, tandis que l'argument de compacité pour Ω_n à l'Étape 2 est mené hors de l'axe, où $F_n \leq D_n^2/R^4$ est borné. Le reste de la preuve est inchangé.

Appendix A. Propriétés de la construction d'OpenAI

Le manuscrit d'OpenAI [43] construit une solution des équations de Navier-Stokes forcées qu'il affirme être singulière en $(x, t) = (0, 1)$ dans sa propre variable temporelle ; c'est-à-dire en $(0, 0)$ après le décalage temporel de cet article (1.1). Nous ne vérifions pas la construction de [43]. À la place, cette annexe déduit, d'énoncés imprimés dans le manuscrit d'OpenAI, trois propriétés du champ de vitesse de la construction d'OpenAI. L'Affirmation A.1 est l'axisymétrie exacte de la vitesse sur un cœur qui se contracte, qui est l'hypothèse (1.8) du Théorème 1.1. L'Affirmation A.2 est l'ensemble des bornes anisotropes sur la moyenne angulaire, qui est l'hypothèse (1.7). L'Affirmation A.3 est l'annulation exacte de la vitesse méridienne sur un ouvert fixe conjointement aux valeurs sur l'axe, les deux propriétés que la Remarque 2.6 demande à une solution. Aucune de ces affirmations n'est imprimée dans le manuscrit d'OpenAI sous la forme sous laquelle nous l'énonçons : chacune est déduite de définitions et d'énoncés qui y sont imprimés, et la justification qui suit chaque affirmation donne cette déduction, en citant chaque ingrédient utilisé. Nous écrivons que le manuscrit *énonce* un fait seulement lorsqu'il est imprimé à l'endroit cité, et qu'un fait *s'ensuit* lorsque nous le déduisons.

A.1. Coordonnées, notation, et décomposition de la vitesse. *Temps, les exposants, et les coordonnées de similarité.* Le manuscrit d'OpenAI écrit $\tau = 1 - t$ pour le temps jusqu'à la singularité dans sa propre variable temporelle. Après le décalage (1.1) le temps jusqu'à la singularité est $-t$, et avec x écrit dans les coordonnées cylindriques de la Section 1.2 nous posons

$$\begin{aligned} \tau &:= -t, & x &= (r \cos \theta, r \sin \theta, z), \\ A &:= \frac{1}{2} + h, & D &:= \frac{1}{2} - h, & A + D &= 1, & 0 < h < \frac{1}{100}. \end{aligned} \quad (\text{A.1a})$$

Toute formule écrite en τ ci-dessous se lit donc de la même façon dans la variable temporelle de l'article et dans celle du manuscrit, tandis que les énoncés cités du manuscrit sont dans sa propre variable temporelle. L'exposant h est fixé par la construction, et A , D , et la borne sur h sont la notation de [43, p. 7, Théorème 3.1, p. 15, et Théorème 4.6, p. 32]. Le manuscrit travaille dans les coordonnées de similarité

$$q - z^2 q^{2h} = \tau, \quad \eta = \frac{z}{q^D}, \quad X = \frac{r^2}{2q}, \quad q > 0, \quad -1 < \eta < 1, \quad (\text{A.1b})$$

qui satisfont, avec une constante C_0 ne dépendant que des paramètres de la construction,

$$\tau \leq q \leq C_0(\tau + |z|^{1/D}), \quad q \asymp \tau + |z|^{1/D}. \quad (\text{A.1c})$$

Le manuscrit énonce $\tau = q(1 - \eta^2)$, $z = q^D \eta$, et $X = r^2/(2q)$ en [43, équation (4.1), p. 24], avec les plages $q > 0$ et $-1 < \eta < 1$ en [43, équation (3.2), p. 7] ; il énonce en [43, p. 7] que $q - z^2 q^{2h} = \tau$, que cette équation détermine $q = q(z, \tau)$ de façon unique, et que $q \asymp \tau + |z|^{1/D}$; et il énonce la borne supérieure de (A.1c) avec la constante C_0 en [43, équation (10.3), p. 118]. Comme $|\eta| < 1$, la relation $\tau = q(1 - \eta^2)$ donne $q \geq \tau$; cette inégalité est imprimée en [43, p. 114, Étape 1]. Notons que q et η ne dépendent pas de r . Nous notons $\mathcal{C}_\tau$ la région que le manuscrit appelle son cœur, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les coordonnées de similarité au temps $-\tau$ satisfont $0 \leq X \leq X_c$ et $|\eta| \leq \eta_c$, avec les constantes $X_c > 0$ et $0 < \eta_c < 1$ fixées en [43, p. 8].

Le champ local et le champ final. Le manuscrit d'OpenAI construit d'abord une vitesse locale u_{loc} et une pression locale π_{loc} sur le domaine Ω_* , sous la forme

$$\Omega_* := \{(x, t) : \tau > 0, \ q < q_*\}, \quad u_{\text{loc}} = \text{curl } \mathbf{A} + \mathbf{B}e_\theta \quad \text{sur } \Omega_*, \quad (\text{A.2})$$

où $q_* > 0$ est une constante de la construction, $\mathbf{A}$ est un potentiel vectoriel, et $\mathbf{B}$ est un scalaire indépendant de θ [43, Théorème 3.1 et sa partie (i) avec l'équation (3.3), p. 15, et l'équation (9.21), p. 115]. Le manuscrit écrit ces deux champs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et la seconde de ces lettres est la dérivée de la Section 4 dans l'article. La vitesse et la pression finales sont

$$u = \text{curl}(\chi_x \chi_t \mathbf{A}) + \chi_x \chi_t \mathbf{B}e_\theta = \chi_x \chi_t u_{\text{loc}} + \nabla(\chi_x \chi_t) \times \mathbf{A}, \quad \pi = \chi_x \chi_t \pi_{\text{loc}}, \quad (\text{A.3})$$

où χ_x est une troncature axisymétrique en espace et χ_t une troncature en temps, toutes deux égales à un près de $(0, 1)$ [43, équation (10.4) et l'affichage qui la suit, p. 118, et Section 3.5, p. 16]. En conséquence, nous fixons une fois pour toutes $R_0 > 0$ et $\tau_0 > 0$ tels que

$$\chi_x = 1 \quad \text{sur } B(R_0), \quad \chi_t = 1 \quad \text{pour } 0 < \tau < \tau_0, \quad C_0(\tau_0 + R_0^{1/D}) < \frac{q_*}{2}. \quad (\text{A.4})$$

Comme $\chi_x \chi_t$ est alors identiquement un sur $B(R_0) \times (-\tau_0, 0)$, son gradient y est nul, de sorte que les champs finaux coïncident avec les champs locaux par (A.3) : $(u, \pi) = (u_{\text{loc}}, \pi_{\text{loc}})$ sur $B(R_0) \times (-\tau_0, 0)$. Par (A.1c) ce cylindre est contenu dans $\{q < q_*/2\}$, donc dans Ω_* . Un tel choix est possible : le manuscrit énonce en [43, p. 118] que $\chi_x = 1$ pour $r \leq r_0/2$ et $|z| \leq z_0/2$, que $\chi_t = 1$ pour $0 \leq 1 - t \leq \tau_*/2$, et que $C_0(\tau_* + z_0^{1/D}) < q_*/2$, où r_0 , z_0 et τ_* sont les constantes positives choisies à cette page, le manuscrit écrivant τ_0 pour celle que nous appelons τ_* ; tout $R_0 \leq \min\{r_0, z_0\}/2$ et tout $\tau_0 \leq \tau_*/2$ feront alors l'affaire, puisque $1/D > 0$. Toutes les normes ci-dessous sont des normes spatiales L^∞ sur $B(R_0)$ des champs finaux au temps $-\tau$, avec $0 < \tau < \tau_0$, et les constantes peuvent dépendre de R_0 et τ_0 .

Les trois régions radiales. Les seuils radiaux de la construction d'OpenAI sont

$$0 < X_a < X_b, \quad 0 < X_a < X_{\text{ext}} < \infty, \quad (\text{A.5})$$

la première paire étant produite en [43, Théorème 4.6, pp. 32–33], dont la partie (ii) énonce que le profil de contrainte T_0 s'annule pour $X \leq X_a$ et pour $X \geq X_b$ et est non nul pour tout $X_a < X < X_b$, et la seconde paire en [43, Théorème 3.1, p. 15], avec X_{ext} fixé au-delà des supports de toutes les corrections en [43, p. 116, Étape 4]. Nous appelons *région extérieure* l'ensemble $\{X \geq X_{\text{ext}}\}$. Le manuscrit énonce que dans la région extérieure le résidu de quantité de mouvement du couple local $(u_{\text{loc}}, \pi_{\text{loc}})$ s'annule identiquement et que

$$\mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{B} = K(r, \tau), \quad K(r, \tau) = r^{-1-2h} H_{\text{ext}}(\tau/r^2), \quad (\text{A.6})$$

où K résout l'équation de la chaleur radiale du tourbillon et H_{ext} est lisse sur $[0, \infty)$ avec toute dérivée fixée bornée [43, équation (3.5), p. 15] ; les mêmes deux identités sont énoncées en [43, p. 116, Étape 4]. Comme $\mathbf{A}$ s'annule sur l'ouvert $\{X > X_{\text{ext}}\}$, il s'ensuit de (A.2) que $u_{\text{loc}} = K(r, \tau)e_\theta$ là ; le manuscrit l'énonce en mots en [43, p. 119].

La décomposition de la vitesse. Nous notons $\mathcal{P}$ la moyenne angulaire de (1.4), qui moyenne les coefficients cylindriques en θ ; c'est l'opérateur $\langle \cdot \rangle_\theta$ du manuscrit d'OpenAI [43, équation (3.7), p. 17], qui commute avec l'évaluation de la variable auxiliaire parce que cette évaluation ne dépend que de (r, t) [43, équation (6.3), p. 63, et p. 117]. Notons u_B la vitesse de fond de la construction d'OpenAI, que le manuscrit énonce faire partie d'un couple de champs axisymétriques lisses (u_B, p_B) avec $\text{div } u_B = 0$ [43, Proposition 5.5, p. 60], et soit

$$v := \mathcal{P}u, \quad w := u - v, \quad m := v - u_B, \quad \text{de sorte que} \quad u = u_B + m + w, \quad \mathcal{P}w = 0. \quad (\text{A.7})$$

Ainsi v et w sont la moyenne angulaire et la partie non axisymétrique de la Section 1.2, et m est la correction qui sépare la moyenne angulaire du fond. Comme u_B est axisymétrique, $\mathcal{P}u_B = u_B$ et $\mathcal{P}m = m$. Le manuscrit construit u_{loc} à partir de u_B et de corrections de deux sortes, et nous utilisons ses noms pour elles : les corrections moyennes, dont les coefficients cylindriques sont indépendants de θ [43, Définition 6.4, p. 69], et les corrections d'onde, qui portent les phases oscillatoires [43, équation (6.27) et Définition 6.5, p. 70] et dont la moyenne angulaire s'annule [43, équation (9.7), p. 106]. Toutes deux sont supportées dans l'anneau fermé $X_a \leq X \leq X_b$ de (A.5), et le manuscrit les appelle annulaires [43, pp. 115 et 117].

A.2. Axisymétrie exacte sur un cœur qui se contracte. La première affirmation est l'hypothèse (1.8) du Théorème 1.1, avec $\rho(t) = c\sqrt{-t}$; voir le point (c) de la Remarque 1.2.

AFFIRMATION A.1 (Axisymétrie exacte sur un cœur qui se contracte). Soient R_0, τ_0 comme en (A.4), soit X_a comme en (A.5), et soit

$$0 < c < \sqrt{2X_a}, \quad \tau_0(c) := \min\{\tau_0, R_0^2/c^2\}. \quad (\text{A.8})$$

Alors la vitesse u de la construction d'OpenAI, sa moyenne angulaire v , et la vitesse de fond u_B de (A.7) satisfont

$$u = v = u_B \quad \text{sur } B(c\sqrt{\tau}) \times \{-\tau\}, \quad 0 < \tau < \tau_0(c). \quad (\text{A.9})$$

De plus $w(\cdot, t) = 0$ sur $B(c\sqrt{-t})$ pour tout $t \in (-1, 0)$, ce qui est (1.8) avec $\rho(t) = c\sqrt{-t}$.

JUSTIFICATION DE L'AFFIRMATION A.1. Les ingrédients sont les énoncés suivants du manuscrit d'OpenAI : les coefficients moyens sont indépendants de θ et sont supportés dans $X_a \leq X \leq X_b$ [43, Définition 6.4 et équation (6.24), p. 69] ; les amplitudes d'onde sont indépendantes de θ et sont supportées dans la même coquille [43, équations (6.28)–(6.29) et Définition 6.5, p. 70] ; les incréments de vitesse d'onde sont des rotationnels de potentiels supportés dans cette coquille, et la correction de vitesse moyenne est la somme d'un rotationnel d'un potentiel azimuthal, construit au moyen de

la primitive radiale à support compact I_c de [43, équation (8.4) avec le Lemme 8.2, p. 90], qui s'annule pour $X \leq X_a$ et pour $X \geq X_b$, et d'un champ azimutal direct dont le coefficient est supporté dans la même coquille [43, Définition 9.4 et équation (9.9), p. 106], de sorte que tous les représentants annulaires s'annulent dans un voisinage de l'axe à chaque $t < 1$ [43, p. 115] ; et le fond (u_B, p_B) est un couple de champs axisymétriques lisses [43, Proposition 5.5, p. 60].

Soit $0 < \tau < \tau_0(c)$ et $|x| < c\sqrt{\tau}$. Comme $\tau < R_0^2/c^2$ nous avons $c\sqrt{\tau} < R_0$, de sorte que $x \in B(R_0)$ et $u = u_{\text{loc}}$ en $(x, -\tau)$ par (A.4). De plus $r \leq |x| < c\sqrt{\tau}$, et $q \geq \tau$ par (A.1c), de sorte que

$$X = \frac{r^2}{2q} < \frac{c^2\tau}{2q} \leq \frac{c^2}{2} < X_a,$$

la dernière inégalité par (A.8). En de tels points toute correction moyenne et toute correction d'onde s'annulent, donc $m = w = 0$ dans (A.7) et la vitesse est le fond u_B , qui est axisymétrique. Cela prouve (A.9).

La restriction $\tau < \tau_0(c)$ n'intervient que par l'égalité $u = u_{\text{loc}}$, et l'annulation de w n'en a pas besoin. Soit $t \in (-1, 0)$ et $\tau = -t$. Le calcul ci-dessus donne $X < X_a$ sur $B(c\sqrt{\tau})$ pour un tel τ , de sorte qu'aux points de cette boule qui appartiennent à Ω_* les potentiels $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont ceux du fond et sont indépendants de θ . Par (A.3) la vitesse finale sur cette boule est le rotationnel de $\chi_x \chi_t \mathbf{A}$ plus $\chi_x \chi_t \mathbf{B} e_\theta$, où χ_x est axisymétrique, étant une fonction lisse de r^2 et z [43, p. 118], χ_t est une fonction de t , et le support de $\chi_x \chi_t$ est contenu dans Ω_* [43, p. 118] ; un rotationnel d'un champ axisymétrique est axisymétrique, et la vitesse finale s'annule hors du support de $\chi_x \chi_t$. Donc $w(\cdot, t) = 0$ sur $B(c\sqrt{-t})$ à tout $t \in (-1, 0)$.

Le manuscrit d'OpenAI énonce toutes les corrections annulaires s'annulent près de l'axe pour chaque $t < 1$ fixé [43, p. 117], les corrections annulaires s'annulent dans la région de similarité intérieure fixée [43, p. 124], et, à un rayon fixé $X_{\text{in}} \in (0, X_a)$, toutes les corrections annulaires s'y annulent [43, p. 116, Étape 5]. L'annulation sur tout l'ensemble $\{X < X_a\}$, et avec elle l'axisymétrie de la vitesse finale sur le cœur, est ce que nous déduisons ci-dessus. $\square$

A.3. Les bornes anisotropes sur la moyenne angulaire. La seconde affirmation est l'hypothèse (1.7) du Théorème 1.1, avec l'exposant h de la construction d'OpenAI ; voir le point (b) de la Remarque 1.2. Le Théorème 1.1 permet $0 < h < 1/2$, de sorte que la plage $0 < h < 1/100$ de (A.1a) est admissible dans le Théorème 1.1.

AFFIRMATION A.2 (Bornes anisotropes sur la moyenne angulaire). *Soient A, D, h comme en (A.1a), soient R_0, τ_0 comme en (A.4), et soit $\beta_r = \frac{1}{2}$ et $\beta_\theta = \beta_z = A$. Il existe une constante $C > 0$, dépendant de R_0 , de τ_0 , et des paramètres de la construction d'OpenAI (mais pas de τ), telle que les composantes cylindriques v_j de la moyenne angulaire $v = \mathcal{P}u$ de la vitesse construite dans [43] satisfont*

$$\left\| \partial_r^a \partial_z^b v_j(\cdot, -\tau) \right\|_{L^\infty(B(R_0))} \leq C \tau^{-\beta_j - a/2 - bD}, \quad j \in \{r, \theta, z\}, \quad a + b \leq 2, \quad 0 < \tau < \tau_0. \quad (\text{A.10})$$

Comme $D = \frac{1}{2} - h$, ce sont les bornes (1.7) sur le cylindre $B(R_0) \times (-\tau_0, 0)$ (et donc sur $\mathcal{Q}$ après le changement d'échelle de la Section A.6), avec les longueurs $\ell_r = \tau^{1/2}$ et $\ell_z = \tau^{1/2-h}$ de (1.10).

JUSTIFICATION DE L'AFFIRMATION A.2. Le manuscrit d'OpenAI énonce ses bornes séparément pour le fond et pour les corrections de chaque étape, et nous assemblons à partir d'elles une borne sur la moyenne angulaire de la vitesse finale. Par (A.4) nous avons $u = u_{\text{loc}}$ sur $B(R_0) \times (-\tau_0, 0)$, et par (A.7) nous avons $v = u_B + m$ là ; nous bornons u_B et m tour à tour. Deux réductions servent les deux étapes.

Premièrement, là où les dérivées cartésiennes d'un champ sont bornées uniformément en τ , les dérivées cylindriques de (A.10) le sont aussi. Le repère (e_r, e_θ, e_z) ne dépend que de θ , donc est

constant le long des rayons radiaux, de sorte que $(e_r \cdot \nabla)e_j = 0$ et

$$\partial_r^a \partial_z^b g_j = ((e_r \cdot \nabla)^a \partial_z^b g) \cdot e_j \quad \text{en tout point avec } r > 0$$

pour tout champ vectoriel lisse g et tout $j \in \{r, \theta, z\}$. Le membre de droite est une combinaison, avec pour coefficients les composantes du vecteur unitaire e_r , des dérivées cartésiennes de g d'ordre $a + b$; comme l'axe est de mesure nulle, cela donne $\|\partial_r^a \partial_z^b g_j\|_{L^\infty(S)} \lesssim \|g\|_{C^{a+b}(S)}$, axe inclus, sur tout ensemble $S \subset B(R_0)$ invariant par rotations autour de l'axe. La même borne vaut pour $\partial_r^a \partial_z^b (\mathcal{P}g)_j$, puisque $(\mathcal{P}g)_j$ est la moyenne de g_j en θ (voir la Section 1.2), et que cette moyenne commute avec ∂_r et ∂_z . Comme q est une fonction de (z, τ) seule, les ensembles $B(R_0) \cap \{q < c\}$ et $B(R_0) \cap \{q \geq c\}$, $c > 0$, auxquels nous appliquons cela ci-dessous, sont de ce type. Comme la norme de C^{a+b} ne distingue pas ∂_r de ∂_z , et comme une composante cartésienne mélange g_r avec g_θ , dont les exposants β_r et β_θ diffèrent, les taux de (A.10) ne passent pas par cette réduction : nous ne l'utilisons que pour les champs dont les dérivées cartésiennes d'ordre au plus deux sont bornées uniformément en τ , et nous obtenons les bornes avec taux aux Étapes 1 et 2 directement pour les composantes cylindriques de u_B et de m .

Deuxièmement, les bornes citées ci-dessous sont énoncées dans le manuscrit d'OpenAI quand $q \downarrow 0$, et nous devons couvrir tout le cylindre. Par (A.4) nous avons $q < q_*/2$ sur $B(R_0) \times (-\tau_0, 0)$, et pour tout $q_1 \in (0, q_*/2)$ le manuscrit énonce que toute dérivée spatio-temporelle cartésienne de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}e_\theta$ et π_{loc} est bornée jusqu'au temps d'explosion sur les compacts spatiaux avec $q_1 \leq q \leq q_*/2$ [43, Théorème 3.1(ii), p. 15], donc toute telle dérivée de u l'est par (A.2) et (A.4), et par conséquent, par la première réduction, tout $\partial_r^a \partial_z^b v_j$ l'est aussi. Comme $\tau^{-\beta_j - a/2 - bD} \geq \tau_0^{-\beta_j - a/2 - bD}$ pour $0 < \tau < \tau_0$, une quantité bornée obéit à (A.10), de sorte que (A.10) tient là où $q \geq q_1$. Seule la région $q < q_1$ reste, et l'Étape 2 fixe la valeur de q_1 .

Étape 1 : le fond. Le manuscrit d'OpenAI énonce les taux de son champ dominant $u^{(0)}$ sur la région $\mathcal{C}_\tau$, $\|u_\theta^{(0)}\| \asymp \|u_z^{(0)}\| \asymp \tau^{-A}$ et $\|u_r^{(0)}\| = O(\tau^{-1/2})$ [43, p. 8], et, sur un élargissement radial fixe de l'anneau fermé $X_a \leq X \leq X_b$ et quand $q \downarrow 0$, que les composantes cylindriques $u_{r,B}, u_{\theta,B}, u_{z,B}$ de u_B sont telles que $q^A u_{\theta,B}, q^A u_{z,B}$ et $q^{1/2} u_{r,B}$ diffèrent de leurs profils dominants de $O(q^{2h})$ en toute composition fixée des dérivées $q\partial_q, \partial_X, \partial_\eta$ [43, équation (5.42), p. 60], ces profils étant bornés sur cet élargissement avec toute dérivée fixée en (X, η) [43, Théorème 4.6(i), p. 33]. Pour la composante radiale nous n'utilisons que la dernière ligne de [43, équation (5.42), p. 60], $q^A u_{r,B} = O(q^h)$ au même sens, ce qui donne $\beta_r = \frac{1}{2}$ puisque $A - h = \frac{1}{2}$. Par (A.1b), sur les fonctions de (q, X, η) nous avons $\partial_r = (2X/q)^{1/2} \partial_X$ et $\partial_z = q^{-D} L^{-1} (2\eta q \partial_q - 2\eta X \partial_X + (1 - \eta^2) \partial_\eta)$, où $L = 1 - 2h\eta^2 \geq 1 - 2h$, de sorte que la conversion en dérivées physiques d'une composante cylindrique coûte $q^{-1/2}$ par ∂_r et q^{-D} par ∂_z [43, équation (5.26), p. 55]. Entre l'axe et l'anneau élargi les mêmes bornes suivent, en utilisant $r^2 = 2Xq$, du développement [43, équation (5.1), p. 46], dans lequel le terme d'ordre n a chacun de $q^{A-2nh} u_{z,n}, q^{A+1/2-2nh} u_{\theta,n}/r$ et $q^{1-2nh} u_{r,n}/r$ qui est un profil lisse en (X, η) jusqu'à $X = 0$ [43, Théorème 4.6(i), p. 33, et équation (5.17), p. 52], et du reste [43, équations (5.34)–(5.35), pp. 57–58], qui au-delà d'un ordre assez grand est borné en toute dérivée cartésienne d'ordre au plus deux et est couvert par la première réduction. Dans la région extérieure $X \geq X_{\text{ext}}$ les corrections s'annulent, puisque X_{ext} est au-delà de leurs supports, de sorte que $u_B = u_{\text{loc}} = K(r, \tau)e_\theta$ par (A.6), et les bornes suivent de [43, équation (3.5), p. 15] avec [43, équations (10.7)–(10.8), p. 119], les dérivées radiales de K venant de (10.7), $\partial_z K$ étant nul, et $r^2 \geq 2X_{\text{ext}}q$ là. Dans [43, Proposition 5.5, p. 60] l'extrémité extérieure de l'élargissement est arbitraire, les constantes y dépendant, et nous la fixons au-delà de X_{ext} ; les trois régions couvrent alors tout point de $B(R_0)$. Toute puissance de q ainsi produite a un exposant au moins $-\beta_j - a/2 - bD < 0$. Comme $\tau \leq q < q_1 \leq 1$ par (A.1c), chaque telle puissance est au plus $\tau^{-\beta_j - a/2 - bD}$, et ces énoncés ensemble donnent (A.10) pour u_B sur $\{q < q_1\}$.

Étape 2 : la correction. Le manuscrit d'OpenAI construit son champ local par une induction dont les étapes sont appelées stages, et il énonce qu'à chaque étape finie la vitesse normalisée est la somme du fond de [43, Proposition 5.5, p. 60], maintenu fixe tout au long de la construction [43, p. 62], d'une correction moyenne dont les coefficients sont indépendants de θ , et d'une onde dont la moyenne angulaire s'annule [43, équation (9.7) et Définition 9.4, p. 106, avec la Définition 6.4, p. 69]. Les étapes sont sommées en [43, Lemme 5.4 et équations (5.34)–(5.35), pp. 57–58], tel qu'appliqué en [43, Proposition 9.9, p. 114]. Les coupures de sommation sont de la forme $\chi(a_j q)$, fonctions de $q(z, \tau)$ seule, avec χ égale à un sur $[0, 1/2]$ et $a_{j+1} \geq 2a_j$ [43, équation (9.21), p. 115, et Lemme 5.4, p. 57], de sorte que pour chaque étape J il existe $q_J > 0$ avec $\chi(a_j q) = 1$ pour tout $j \leq J$ et tout $0 < q < q_J$; la coupure unique appliquée aux champs avec lesquels la sommation commence vaut de même un près de $q = 0$ [43, p. 114, Étape 1, et p. 115]. L'estimation du reste [43, équation (5.35), p. 58] donne alors, en tout ordre fixé de dérivées cartésiennes, que sur $\{q < q_J\}$ le champ sommé diffère du champ de l'étape J de $O(q^{N_J})$, avec $N_J \rightarrow \infty$ quand $J \rightarrow \infty$. Nous fixons maintenant J assez grand pour que $N_J \geq 0$ pour tout ordre de dérivée au plus deux, et nous posons $q_1 = q_J$, diminué si nécessaire pour que $q_1 < \min\{1, q_*/2\}$, pour que la coupure unique ci-dessus vaille un sur $\{q < q_1\}$, et pour que les énoncés cités à l'Étape 1, qui tiennent pour q petit, tiennent sur $\{q < q_1\}$. En appliquant $\mathcal{P}$ au champ de l'étape J , et en utilisant $\mathcal{P}u_B = u_B$ de (A.7), nous obtenons que sur $\{q < q_1\}$ la correction m est la correction moyenne de cette étape, à la moyenne angulaire près d'une erreur dont les dérivées cartésiennes d'ordre au plus deux sont $O(q^{N_J})$, donc bornées ; par la première réduction, ce terme obéit à (A.10).

Il reste à borner la correction moyenne d'une étape fixée. Le manuscrit d'OpenAI travaille sur des régions dyadiques indexées par un entier ℓ , avec

$$Q = 2^{-\ell}, \quad \varepsilon = Q^h, \quad S_* = \ell^2, \quad \kappa_s = 10^{-5},$$

sur chacune desquelles une vitesse physique est Q^{-A} fois son représentant dans les coordonnées remises à l'échelle de [43, équation (6.1), p. 62, et le texte qui la suit et l'équation (6.2), p. 63], et $q \asymp Q$ sur les supports des corrections [43, pp. 62 et 113]. Le manuscrit énonce que la composante radiale de la correction moyenne porte un facteur $\varepsilon^{1.9}$ et ses composantes azimutale et axiale un facteur $\varepsilon^{0.9}$, en toute dérivée de coefficient, fois une puissance de S_* et un poids qui est borné sur l'anneau $X_a < X < X_b$ [43, équation (9.9), p. 106, avec la Définition 6.4 et les équations (6.23)–(6.24), p. 69], et qu'une dérivée physique radiale perd un facteur $Q^{-1/2-h\kappa_s}$ et une dérivée axiale un facteur Q^{-D} [43, équation (9.19), p. 113]. Avec l'erreur bornée du paragraphe précédent, il s'ensuit que sur $\{q < q_1\}$, sur l'anneau et trivialement hors de lui puisque les coefficients moyens y sont nuls,

$$\left| \partial_r^a \partial_z^b m_j \right| \leq C q^{-A-a/2-bD+(\alpha_j-a\kappa_s)h} (1 + |\log q|)^P, \quad \alpha_r = 1.9, \quad \alpha_\theta = \alpha_z = 0.9, \quad a + b \leq 2, \quad (\text{A.11})$$

où P dépend de $a + b$ et de l'étape J fixée ci-dessus. La ligne radiale de (A.11) porte $\beta_r = \frac{1}{2}$ parce que $-A + (1.9 - a\kappa_s)h = -\frac{1}{2} + (0.9 - a\kappa_s)h$. En toute ligne l'exposant de q dans (A.11) est négatif, et il dépasse $-\beta_j - a/2 - bD$ de $(0.9 - a\kappa_s)h > 0$; comme $\tau \leq q < q_*/2$, les puissances de q deviennent des puissances de τ et le logarithme est absorbé. Ainsi m satisfait (A.10) sur $\{q < q_1\}$, et avec l'Étape 1 il en va de même de $v = u_B + m$. Conjointement à la seconde réduction ci-dessus, qui couvre $\{q \geq q_1\}$, cela prouve (A.10) sur $B(R_0) \times (-\tau_0, 0)$. $\square$

A.4. Annulation exacte de la vitesse méridienne, et valeurs sur l'axe. La Remarque 2.6 demande deux choses d'une solution : l'annulation exacte (2.9) des composantes méridiennes u_r et u_z sur un ouvert hors de l'axe qui ne dépend pas du temps, et un temps auquel u_z ne s'annule pas à l'origine. La troisième affirmation fournit les deux.

AFFIRMATION A.3 (Annulation de la vitesse méridienne sur un ouvert fixe, et valeurs sur l'axe). Soient R_0, τ_0 comme en (A.4), et soit u la vitesse de la construction d'OpenAI.

(a) Soit $0 < r_- < r_+ < R_0$. Il existe $z_* > 0$ et $0 < \delta_* \leq \tau_0$ tels que l'ouvert

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 : r_- < r < r_+, |z| < z_*\}$$

est contenu dans $B(R_0) \cap \{r > 0\}$, et tel que

$$u = K(r, \tau)e_\theta, \quad \text{et en particulier} \quad u_r = u_z = 0, \quad \text{sur } E \times (-\delta_*, 0),$$

où K est la fonction de (A.6). C'est (2.9) avec $R = R_0$ et $\delta = \delta_*$.

(b) Il existe une constante j_0 avec $0 < j_0 \leq \frac{1}{20}$ telle que

$$u_z(0, -\tau) = j_0 \tau^{-A}, \quad \partial_z u_z(0, -\tau) = \frac{4}{\tau}, \quad 0 < \tau < \tau_0. \quad (\text{A.12})$$

En particulier $u_z(0, t) \neq 0$ pour tout $t \in (-\tau_0, 0)$.

JUSTIFICATION DE L'AFFIRMATION A.3. Partie (a). Par (A.6) et (A.2) nous avons $u_{\text{loc}} = K(r, \tau)e_\theta$, et en particulier $u_{\text{loc}, r} = u_{\text{loc}, z} = 0$, sur l'ouvert $\{X > X_{\text{ext}}\}$. Étant donné $0 < r_- < r_+ < R_0$, nous choisissons $z_* > 0$ et $0 < \delta_* \leq \tau_0$ assez petits pour que

$$E \subset B(R_0), \quad C_0(\delta_* + z_*^{1/D}) < \frac{r_-^2}{2X_{\text{ext}}},$$

ce qui est possible puisque $r_+ < R_0$ et $1/D > 0$. Par la borne supérieure de (A.1c), tout point de $E \times (-\delta_*, 0)$ a $q < r_-^2/(2X_{\text{ext}})$, et donc $X = r^2/(2q) > r_-^2/(2q) > X_{\text{ext}}$. Comme $\delta_* \leq \tau_0$ et $E \subset B(R_0)$, nous avons $u = u_{\text{loc}}$ là par (A.4), et la partie (a) suit.

Partie (b). Le manuscrit d'OpenAI énonce $u_\theta^{(0)} = 0$ sur l'axe et $\|u_z^{(0)}\|_{L^\infty} \asymp \tau^{-A}$ sur $\mathcal{C}_\tau$, la borne inférieure étant attribuée dans le manuscrit à la donnée axiale non nulle [43, pp. 7–8] ; le manuscrit n'énonce pas la valeur axiale ponctuelle ni sa dérivée axiale sur l'axe. Il choisit la donnée axiale $U_* = 4\eta + j_0$, avec $0 < j_0 \leq .05$, comme la valeur à l'axe du profil axial U [43, Section B.1 et équation (B.1), p. 144], celle-ci étant l'un des paramètres d'axe de [43, Proposition 4.10, pp. 36–37], et il énonce que le profil analytique réalisant cette donnée a $U - U_*$ qui s'annule à l'axe [43, Proposition B.2 et équation (B.12), pp. 146–147] ; que les coefficients axiaux du développement sont $u_{z,n} = q^{-A+2nh}U_n$ [43, équation (5.1), p. 46], qu'ils entrent dans le fond avec les coupures de [43, équation (5.45), p. 61] comme $q^{-A+2nh}\chi(c_n q)U_n$, le coefficient axial ne portant aucune dérivée de sa coupure parce que q ne dépend pas de r [43, équation (10.1), p. 117], et que $U_n(0, \eta) = 0$ pour tout $n \geq 1$ [43, Lemme 5.1, p. 47] ; et que $q = \tau$ et $\eta = 0$ en $z = 0$ [43, p. 116, Étape 5]. Tout terme avec $n \geq 1$ dans la somme des coefficients axiaux s'annule donc en $X = 0$, de sorte que

$$u_{z,B} = q^{-A}U(0, \eta) = q^{-A}(4\eta + j_0) \quad \text{sur l'axe}.$$

Comme $X = 0 < X_a$ sur l'axe, $m = w = 0$ là comme dans la justification de l'Affirmation A.1, et $u = u_{\text{loc}}$ par (A.4) ; donc $u_z = q^{-A}(4\eta + j_0)$ sur le segment $\{r = 0, |z| < R_0\}$ de l'axe, pour $0 < \tau < \tau_0$. En évaluant en $z = 0$, où $q = \tau$ et $\eta = 0$, on obtient la première identité de (A.12). Pour la seconde, en dérivant en z et en utilisant $\eta = zq^{-D}$ conjointement à l'identité $\partial_z q = 2\eta q^{1-D}/L$, où $L = 1 - 2h\eta^2$ [43, équation (4.1), p. 24, et la preuve du Lemme 4.1, p. 25], de sorte que $\partial_z q = 0$ en $\eta = 0$, nous obtenons $\partial_z u_z(0, -\tau) = 4\tau^{-A}\tau^{-D}$, qui vaut $4/\tau$ par (A.1a). $\square$

A.5. L'explosion et la partie non axisymétrique. *L'explosion.* Le manuscrit d'OpenAI affirme que, le long des points

$$x_\tau = (\sqrt{2X_{\text{in}}\tau}, 0, 0), \quad u_\theta(x_\tau, -\tau) = \tau^{-A}(e_0 + O(\tau^{2h})) \longrightarrow +\infty, \quad (\text{A.13})$$

où $z = 0$, $q = \tau$, et les deux coupures valent un pour tout $\tau > 0$ suffisamment petit [43, équations (10.20)–(10.21), p. 124], avec $X_{\text{in}} \in (0, X_a)$ et $e_0 > 0$ produits en [43, Théorème 3.1(iv) et équation (3.6), p. 16]. Comme $|x_\tau| \rightarrow 0$, le point $(0, 0)$ est alors singulier pour la construction.

La partie non axisymétrique. Dans les variables de carte les amplitudes des corrections d'onde portent un facteur $\varepsilon^{1/2}$ relativement au fond [43, équation (9.9), p. 106, avec la Définition 6.5 et l'équation (6.29), p. 70]. Nous ne convertissons pas cela en une borne pour w en variables physiques : le Théorème 1.1 n'utilise que l'axisymétrie exacte sur le cœur de l'Affirmation A.1 et les bornes sur la moyenne angulaire de l'Affirmation A.2. C'est en ce sens, l'axisymétrie exacte sur un cœur qui se contracte au taux parabolique quand $t \uparrow 0$, que nous appelons de telles solutions asymptotiquement axisymétriques.

A.6. Ce que les résultats de l'article donnent pour la construction d'OpenAI. Le manuscrit d'OpenAI énonce que sa vitesse et sa pression sont lisses sur $\mathbb{R}^3 \times [0, 1)$, à divergence nulle, toutes deux de support spatial compact fixe [43, Proposition 10.1, p. 117], que sa force, le résidu de quantité de mouvement [43, équation (10.5), p. 118], appartient à $C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty); \mathbb{R}^3)$ [43, Lemme 10.3, p. 120], ce qui donne (1.5), et que son énergie cinétique est bornée sur $[0, 1)$ et sa dissipation totale sur $[0, 1)$ est finie [43, Lemme 10.4 et équation (10.13), p. 121], la partie vitesse de (1.3). Comme u et π sont à support compact, π est la solution décroissante de l'équation de pression $-\Delta\pi = \partial_i \partial_j (u_i u_j) - \operatorname{div} f$ de [43, p. 118], de sorte que $\|\pi(\cdot, t)\|_{L^{3/2}(B(1))} \lesssim \|u(\cdot, t)\|_{L^3}^2 + 1$ par l'inégalité de Calderon-Zygmund et la bornitude de f ; l'interpolation place u dans $L_{x,t}^3$, et la partie pression de (1.3) suit. La lissité sur $\mathbb{R}^3 \times [-1, 0)$ rend l'inégalité d'énergie locale une égalité, en testant (1.2) contre $2u\varphi$, chaque terme étant fini par (1.3) ; la construction est donc une solution faible convenable sur le cylindre $B(R_0) \times (-\tau_0(c), 0)$ de l'Affirmation A.1, transporté sur $\mathcal{Q}$ par le changement d'échelle de la note de bas de page de la Section 1.1. Les Affirmations A.2 et A.1 fournissent (1.7) et (1.8), de sorte que le Corollaire 2.3 s'applique : conditionnellement à l'explosion (A.13), la force viole (1.6) et ne s'annule identiquement sur aucun cylindre autour de $(0, 0)$. L'Affirmation A.3 donne le même échec par la Remarque 2.6, sur toute boule $B(R')$ avec $0 < R' \leq R_0$ qui rencontre son ensemble E , sans utiliser ni (1.7) ni (1.8) ni l'explosion. Si (2.6) devait tenir sur un cylindre $B(R') \times (-\delta', 0)$ avec $0 < R' \leq R_0$ et $0 < \delta' \leq \tau_0(c)$, la Remarque 2.4 rendrait $(0, 0)$ régulier, ce qui contredirait (A.13) ; donc la partie non axisymétrique de la vitesse n'est pas bornée dans C^3 uniformément en temps sur un tel cylindre.

Remerciements

Le travail de P.C. a été partiellement soutenu par la bourse NSF DMS-2606072. Le travail de M.I. a été partiellement soutenu par la bourse NSF DMS-2204614. Le travail de V.V. a été partiellement soutenu par la bourse collaborative NSF DMS-2307681 et par un Simons Investigator Award.

Nous sommes reconnaissants à Scott Armstrong et Tuomo Kuusi d'avoir comparé les propriétés de la construction d'OpenAI consignées dans l'Annexe A au code Lean publié par OpenAI.

Avertissement sur l'utilisation de systèmes d'IA

Des versions publiquement disponibles de Claude (Opus 5 et Fable 5.1, dans Claude Code) et de ChatGPT (Sol et Astra, dans Codex) ont été utilisées dans la préparation de ce manuscrit. De loin l'utilisation la plus lourde de ces systèmes d'IA a été le déchiffrement des énoncés de l'article d'OpenAI [43]. Claude et ChatGPT ont été utilisés pour analyser ce manuscrit, et au cours de plusieurs sessions interactives les principales propriétés des solutions de la construction d'OpenAI ont été extraites ; voir l'Annexe A. Ces propriétés ont ensuite été recoupées avec la version PDF publiquement disponible de [43] et le code Lean publié par OpenAI. Les systèmes d'IA ont eu accès à notre article [13] et à une version presque achevée de l'article [14], dont l'idée centrale de cette preuve est tirée. Les systèmes d'IA ont aussi reçu une première ébauche de ce manuscrit, entièrement écrite par les auteurs, qui contenait toute la preuve du Théorème 1.3 sous la forme d'une esquisse de six pages, et une explication d'une demi-page de la façon dont la réduction par

analyticité au cas axisymétrique devait fonctionner. Claude et ChatGPT ont été utilisés pour transformer cette première ébauche en un manuscrit contenant des preuves complètes de tous les énoncés. Les systèmes d'IA ont aussi produit la figure et cherché la bibliographie pertinente. Au cours de quelques sessions interactives de Claude Code, le manuscrit a ensuite été réécrit sous la direction et la supervision étroites des auteurs ; cela a inclus non seulement le polissage de l'exposition, mais aussi la vérification de tous les calculs mathématiques. Chaque suggestion, calcul et référence produits par les systèmes d'IA ont été indépendamment vérifiés et, le cas échéant, corrigés ou reformulés par les auteurs, qui assument l'entière responsabilité du manuscrit tel qu'il est actuellement écrit.

References

- [1] L. Alpöge and T. Buckmaster, Blowup for the Boussinesq equations with smooth forcing, *Preprint* (2026), <https://cims.nyu.edu/~tristanb/boussinesq.pdf>.
- [2] L. Alpöge and T. Buckmaster, Blowup for the Euler equations with smooth forcing, *Preprint* (2026), <https://cims.nyu.edu/~tristanb/euler.pdf>.
- [3] L. Alpöge, T. Buckmaster, and M. P. Coiculescu, Extending the Córdoba-Martínez-Zoroa IPM blow-up to uniformly space-time smooth forcing, [arXiv:2609.16470](https://arxiv.org/abs/2609.16470) (2026).
- [4] Z. Bradshaw, Z. Grujić, and I. Kukavica, Local analyticity radii of solutions to the 3D Navier-Stokes equations with locally analytic forcing, *J. Differential Equations* **259** (2015), no. 8, 3955–3975. doi:10.1016/j.jde.2015.05.009.
- [5] T. Buckmaster and V. Vicol, Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation, *Ann. of Math. (2)* **189** (2019), no. 1, 101–144. doi:10.4007/annals.2019.189.1.3.
- [6] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **35** (1982), no. 6, 771–831. doi:10.1002/cpa.3160350604.
- [7] C.-C. Chen, R. M. Strain, H.-T. Yau, and T.-P. Tsai, Lower bound on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2008), no. 9, Art. ID rnn016, 31 pp. doi:10.1093/imrn/rnn016.
- [8] C.-C. Chen, R. M. Strain, T.-P. Tsai, and H.-T. Yau, Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations II, *Comm. Partial Differential Equations* **34** (2009), no. 3, 203–232. doi:10.1080/03605300902793956.
- [9] J. Chen and T. Y. Hou, Singularity formation in 3D Euler equations with smooth initial data and boundary, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **122** (2025), no. 27, Paper No. e2500940122. doi:10.1073/pnas.2500940122.
- [10] J. Chen, Asymptotically self-similar blowup for 3D incompressible Euler with $C^{1,1/3-}$ velocity I: C^∞ 1D limiting profiles, [arXiv:2605.15149](https://arxiv.org/abs/2605.15149) (2026).
- [11] J. Chen, Asymptotically self-similar blowup for 3D incompressible Euler with $C^{1,1/3-}$ velocity II: 3D profiles, blowup, and limiting behavior, [arXiv:2605.15130](https://arxiv.org/abs/2605.15130) (2026).
- [12] P. Constantin and C. Fefferman, Direction of vorticity and the problem of global regularity for the Navier-Stokes equations, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1993), no. 3, 775–789. doi:10.1512/iumj.1993.42.42034.
- [13] P. Constantin, M. Ignatova, and V. Vicol, On putative self-similarity for incompressible 3D Euler, *Courant Journal of Pure and Applied Mathematics*, Accepted, 2026. [arXiv:2602.17570v3](https://arxiv.org/abs/2602.17570v3).
- [14] P. Constantin, M. Ignatova, and V. Vicol, Regularity for axisymmetric Navier-Stokes with an Euler length, [arXiv:2609.20762](https://arxiv.org/abs/2609.20762) (2026).
- [15] D. Córdoba and L. Martínez-Zoroa, Blow-up for the incompressible 3D-Euler equations with uniform $C^{1,\frac{1}{2}-\varepsilon} \cap L^2$ force, [arXiv:2309.08495](https://arxiv.org/abs/2309.08495) (2023).
- [16] D. Córdoba and L. Martínez-Zoroa, Finite time singularities of smooth solutions for the 2D incompressible porous media (IPM) equation with a smooth source, [arXiv:2410.22920](https://arxiv.org/abs/2410.22920) (2024).
- [17] S. Daneri and L. Székelyhidi, Jr., Non-uniqueness and h-principle for Hölder-continuous weak solutions of the Euler equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **224** (2017), no. 2, 471–514. doi:10.1007/s00205-017-1081-8.
- [18] C. De Lellis and L. Székelyhidi, Jr., The Euler equations as a differential inclusion, *Ann. of Math. (2)* **170** (2009), no. 3, 1417–1436. doi:10.4007/annals.2009.170.1417.
- [19] C. De Lellis and L. Székelyhidi, Jr., Dissipative continuous Euler flows, *Invent. Math.* **193** (2013), no. 2, 377–407. doi:10.1007/s00222-012-0429-9.
- [20] R. J. DiPerna and P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98** (1989), no. 3, 511–547. doi:10.1007/BF01393835.
- [21] V. Duruisseaux, A. Ganeshram, R. J. George, and A. Anandkumar, Stability framework for the singularity of the Euler equations on $\mathbb{R}^3$, [arXiv:2609.10860](https://arxiv.org/abs/2609.10860) (2026).

- [22] T. M. Elgindi, Finite-time singularity formation for $C^{1,\alpha}$ solutions to the incompressible Euler equations on $\mathbb{R}^3$, *Ann. of Math. (2)* **194** (2021), no. 3, 647–727. doi:10.4007/annals.2021.194.3.2.
- [23] T. M. Elgindi, T.-E. Ghoul, and N. Masmoudi, On the stability of self-similar blow-up for $C^{1,\alpha}$ solutions to the incompressible Euler equations on $\mathbb{R}^3$, *Camb. J. Math.* **9** (2021), no. 4, 1035–1075. doi:10.4310/cjm.2021.v9.n4.a4.
- [24] L. Escauriaza, G. A. Seregin, and V. Šverák, $L_{3,\infty}$ -solutions of the Navier-Stokes equations and backward uniqueness, *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2003), no. 2, 3–44; English transl. in *Russian Math. Surveys* **58** (2003), no. 2, 211–250. doi:10.1070/RM2003v058n02ABEH000609.
- [25] S. Friedlander and M. M. Vishik, Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991), no. 17, 2204–2206. doi:10.1103/PhysRevLett.66.2204.
- [26] A. Ganesram, V. Duruisseaux, and A. Anandkumar, Stable singularity of the Euler equations on $\mathbb{R}^3$, [arXiv:2609.10867](https://arxiv.org/abs/2609.10867) (2026).
- [27] Z. Grujić and I. Kukavica, Space analyticity for the Navier-Stokes and related equations with initial data in L^p , *J. Funct. Anal.* **152** (1998), no. 2, 447–466. doi:10.1006/jfan.1997.3167.
- [28] S. Gustafson, K. Kang, and T.-P. Tsai, Interior regularity criteria for suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Math. Phys.* **273** (2007), no. 1, 161–176. doi:10.1007/s00220-007-0214-6.
- [29] T. Y. Hou and D. Huang, A potential two-scale traveling wave singularity for 3D incompressible Euler equations, *Phys. D* **435** (2022), Paper No. 133257. doi:10.1016/j.physd.2022.133257.
- [30] T. Y. Hou, Potential singularity of the 3D Euler equations in the interior domain, *Found. Comput. Math.* **23** (2023), no. 6, 2203–2249. doi:10.1007/s10208-022-09585-5.
- [31] P. Isett, A proof of Onsager’s conjecture, *Ann. of Math. (2)* **188** (2018), no. 3, 871–963. doi:10.4007/annals.2018.188.3.4.
- [32] C. Kahane, On the spatial analyticity of solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **33** (1969), no. 5, 386–405. doi:10.1007/BF00247697.
- [33] G. Koch, N. Nadirashvili, G. A. Seregin, and V. Šverák, Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications, *Acta Math.* **203** (2009), no. 1, 83–105. doi:10.1007/s11511-009-0039-6.
- [34] G. Komatsu, Global analyticity up to the boundary of solutions of the Navier-Stokes equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), no. 4, 545–566. doi:10.1002/cpa.3160330405.
- [35] I. Kukavica, On partial regularity for the Navier-Stokes equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **21** (2008), no. 3, 717–728. doi:10.3934/dcds.2008.21.717.
- [36] O. A. Ladyzhenskaya, On unique solvability “in the large” of three-dimensional Cauchy problem for Navier-Stokes equations with axial symmetry, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI* **7** (1968), 155–177 (Russian); English transl. in *Sem. Math. V. A. Steklov Math. Inst. Leningrad* **7** (1970), 70–79. [Math-Net.Ru: zns12240](https://math-net.ru/zns12240).
- [37] O. A. Ladyzhenskaya and G. A. Seregin, On partial regularity of suitable weak solutions to the three-dimensional Navier-Stokes equations, *J. Math. Fluid Mech.* **1** (1999), no. 4, 356–387. doi:10.1007/s000210050015.
- [38] P. G. Lemarié-Rieusset, *The Navier-Stokes problem in the 21st century*, CRC Press, Boca Raton, FL, 2016. doi:10.1201/b19556.
- [39] A. Lifschitz and E. Hameiri, Local stability conditions in fluid dynamics, *Phys. Fluids A* **3** (1991), no. 11, 2644–2651. doi:10.1063/1.858153.
- [40] F.-H. Lin, A new proof of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg theorem, *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (1998), no. 3, 241–257. [Publisher’s version](https://www.jstor.org/stable/2374000).
- [41] K. Masuda, On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier-Stokes equation, *Proc. Japan Acad.* **43** (1967), no. 9, 827–832. doi:10.3792/pja/1195521421.
- [42] J. Nečas, M. Růžička, and V. Šverák, On Leray’s self-similar solutions of the Navier-Stokes equations, *Acta Math.* **176** (1996), no. 2, 283–294. doi:10.1007/BF02551584.
- [43] OpenAI, *Finite time blowup for Navier-Stokes*, manuscript, 166 pp., posted September 8, 2026, <https://openai.com/index/navier-stokes-solution/>.
- [44] OpenAI, *Finite time blowup for the Euler equation*, manuscript, 57 pp., posted September 8, 2026, <https://cdn.openai.com/pdf/315b36cd-ec98-4023-8342-93345194ece1/euler.pdf>.
- [45] W. S. Ożański and S. Palasek, Quantitative control of solutions to the axisymmetric Navier-Stokes equations in terms of the weak L^3 norm, *Ann. PDE* **9** (2023), no. 2, Paper No. 15. doi:10.1007/s40818-023-00156-7.
- [46] S. Palasek, Improved quantitative regularity for the Navier-Stokes equations in a scale of critical spaces, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **242** (2021), no. 3, 1479–1531. doi:10.1007/s00205-021-01709-5.
- [47] S. Palasek, Finite-time blow-up in an elementary model of the 3D Navier-Stokes equations, [arXiv:2605.13827](https://arxiv.org/abs/2605.13827) (2026).
- [48] B. Pineau and V. Vicol, On rotated backwards self-similar solutions of the incompressible 3D Navier-Stokes equations, [arXiv:2607.09619](https://arxiv.org/abs/2607.09619) (2026).
- [49] G. Seregin, Local regularity of axisymmetric solutions to the Navier-Stokes equations, *Anal. Math. Phys.* **10** (2020), no. 4, Paper No. 46. doi:10.1007/s13324-020-00392-1.

- [50] G. Seregin, Remarks on Type II blowups of solutions to the Navier-Stokes equations, *Commun. Pure Appl. Anal.* **23** (2024), no. 10, 1389–1406. [doi:10.3934/cpaa.2023108](https://doi.org/10.3934/cpaa.2023108).
- [51] G. Seregin, A note on potential Type II blowups of axisymmetric solutions to the Navier-Stokes equations, [arXiv:2402.13229](https://arxiv.org/abs/2402.13229) (2024).
- [52] G. Seregin, A note on certain scenarios of Type II blowups of suitable weak solutions to the Navier-Stokes equations, [arXiv:2507.08733](https://arxiv.org/abs/2507.08733) (2025).
- [53] G. Seregin, On potential Type II blowups for the Navier-Stokes equations, [arXiv:2606.29468](https://arxiv.org/abs/2606.29468) (2026).
- [54] G. Seregin and V. Šverák, On Type I singularities of the local axisymmetric solutions of the Navier-Stokes equations, *Comm. Partial Differential Equations* **34** (2009), no. 2, 171–201. [doi:10.1080/03605300802683687](https://doi.org/10.1080/03605300802683687).
- [55] J. Serrin, On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **9** (1962), 187–195. [doi:10.1007/BF00253344](https://doi.org/10.1007/BF00253344).
- [56] F. Shao, D. Wei, P. Zhang, and Z. Zhang, Self-similar blow-up solutions of d -dimensional incompressible Euler equations with $C^{1,(1-2/d)-}$ velocity, [arXiv:2605.19716](https://arxiv.org/abs/2605.19716) (2026).
- [57] S. Shkoller, Incompressible Euler blowup at the $C^{1,\frac{1}{3}}$ threshold, [arXiv:2603.10945](https://arxiv.org/abs/2603.10945) (2026).
- [58] T. Tao, Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation, *J. Amer. Math. Soc.* **29** (2016), no. 3, 601–674. [doi:10.1090/jams/838](https://doi.org/10.1090/jams/838).
- [59] T. Tao, Quantitative bounds for critically bounded solutions to the Navier-Stokes equations, in *Nine mathematical challenges*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 104, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2021, pp. 149–193. [doi:10.1090/pspum/104/01874](https://doi.org/10.1090/pspum/104/01874).
- [60] T.-P. Tsai, On Leray’s self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **143** (1998), no. 1, 29–51. [doi:10.1007/s002050050099](https://doi.org/10.1007/s002050050099).
- [61] T.-P. Tsai, *Lectures on Navier-Stokes equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 192, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, xii+224 pp. [doi:10.1090/gsm/192](https://doi.org/10.1090/gsm/192).
- [62] M. R. Ukhovskii and V. I. Yudovich, Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space, *J. Appl. Math. Mech.* **32** (1968), no. 1, 52–62. [doi:10.1016/0021-8928\(68\)90147-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(68)90147-0).
- [63] Y. Wang, C.-Y. Lai, J. Gómez-Serrano, and T. Buckmaster, Asymptotic self-similar blow-up profile for three-dimensional axisymmetric Euler equations using neural networks, *Phys. Rev. Lett.* **130** (2023), no. 24, Paper No. 244002. [doi:10.1103/PhysRevLett.130.244002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.244002).
- [64] Y. Wang, M. Bennani, J. Martens, et al., Discovery of unstable singularities, [arXiv:2509.14185](https://arxiv.org/abs/2509.14185) (2025).
- [65] Q.S. Zhang, On partial type I solutions to the Axially symmetric Navier-Stokes equations, [arXiv:2604.07785](https://arxiv.org/abs/2604.07785) (2026).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, PRINCETON UNIVERSITY, PRINCETON, NJ 08540

Email address: const@math.princeton.edu

URL: <https://web.math.princeton.edu/~const/>

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TEMPLE UNIVERSITY, PHILADELPHIA, PA 19122

Email address: ignatova@temple.edu

URL: <https://sites.temple.edu/ignatova/>

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, COURANT INSTITUTE, NEW YORK UNIVERSITY, NEW YORK, NY, 10012

Email address: vicol@cims.nyu.edu

URL: <https://cims.nyu.edu/~vicol/>