

Les Trois Portes

Une approche par opérateur enraciné de la positivité de Weil

Marco Desogus

16 septembre 2026

Abstract

Nous présentons un argument localisé par opérateur enraciné pour la positivité de Weil dans le canal logarithmique réel impair, en conservant le terme polaire de rang un tout au long. La Porte I établit un théorème de signe cellulaire/de coquille strict, avec des bornes rigoureuses en arithmétique d'intervalles sur la plage finie utilisée ci-dessous. La Porte II combine la décomposition en cellules unitaires de Mellin, les carrés de quasi-isométrie des diviseurs, les translations affines, le transport complet de Cauchy–Carleman, la mise en court-circuit cohérente multi-sources, la racine scalaire augmentée, et la géométrie de Schur dans la métrique vraie. La Porte III utilise la compression, la fermeture et le critère de Weil impair restreint.

Un point central de la Porte II est de placer la réponse parente héritée à l'intérieur de la même forme primale après ancien-noyau/coupe commune dans laquelle le désaccord arithmétique et le débit scalaire replié sont facturés. Si $P_{k,m}^{\text{ex}}$ est le pivot hérité survivant et a_m la coordonnée héritée du minimiseur de Schur, alors

$$P_{k,m}^{\text{ex}} a_m = \omega_{k,m}^{\text{ex}},$$

de sorte que la contribution source–couplage héritée est l'énergie métrique négative de cette réponse. En écrivant $a_m = \sqrt{\kappa_{k,m} C_m} c_m^{\text{inh}}$, on obtient

$$-\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m c_m^{\text{inh}}] = -\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m^0 c_m^{\text{inh}}] + |c_m^{\text{inh}}|^2 \Delta \mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}.$$

Ainsi le surplus du comparateur appartient à la même contribution de Schur plutôt que d'être introduit comme un terme positif séparé.

Le forçage aligné est conservé explicitement. Avec

$$W_{k,m} := \frac{1 - \theta_{k,m}}{1 + \theta_{k,m}} \frac{b_m^2}{\Pi_m^{(0)}}, \quad W_k := \sum_m W_{k,m},$$

le bloc parent est borné inférieurement par

$$-\frac{439}{250} \chi_m - \frac{5}{2} W_{k,m}.$$

Un calcul fini arrondi vers l'extérieur, conjointement avec la queue analytique, donne

$$\mathfrak{g}_k^{\text{M}+} := \frac{1}{2} + \log k - \frac{439}{250 \log 2} \sum_m V_{k,m} - \frac{5}{2} W_k > 0 \quad (k \geq 7).$$

Le théorème de coupe commune simultanée garde séparés les budgets de la racine parente et du transverse avant l'infimum commun, tandis que l'identité de repli laisse un reste non négatif. La combinaison de ces ingrédients donne une énergie de Schur positive sur le graphe A_k -harmonique à chaque étape arithmétique. En partant du point terminal rigoureusement certifié $Y = 7$, l'induction de Schur donne la positivité aux points terminaux entiers, et l'extension par zéro donne la non-négativité à tout rayon de support fini. La fermeture et le critère de Weil impair restreint donnent la conclusion énoncée dans le théorème principal.

De courts interludes fantastiques ne fournissent qu'une carte expositive de l'argument. Ils peuvent être omis sans changer aucune définition, lemme, théorème ou preuve.¹

¹Traduction par deepseek de l'article arxiv <https://arxiv.org/pdf/2609.20367> : se reporter systématiquement à l'article original en cas de doute, “le” secrétaire n'ayant pas la possibilité de juger de la conformité de la traduction.

Résultat principal.

Théorème 0.1 (Théorème principal). *Pour tout rayon de support fini $a > 0$, l'opérateur de Weil critique localisé dans le canal logarithmique réel impair satisfait*

$$A_{a,-} \succeq 0.$$

De façon équivalente, la forme quadratique globale de Weil est non négative sur le cœur test logarithmique réel impair à support compact. Par conséquent tout zéro non trivial de ζ a pour partie réelle $1/2$; en particulier, l'hypothèse de Riemann est vraie.

Pour l'orientation, la chaîne de dépendance utilisée dans l'argument est

opérateur localisé exact + cellules unitaires de Mellin + transport complet

⇓

rouutage affine vrai + coupe commune cohérente multi-sources

⇓

court-circuit parent exact + AWGC + absorption mixte 189/250

⇓

placement exact de la réponse héritée (MASTER-P2)

⇓

forçage aligné conservé et payé par W_k

⇓

$$\mathfrak{g}_k^{M+} > 0 \quad (k \geq 7)$$

⇓

$$H_k^* A_{k+1} H_k \succ 0 \quad \text{chaque fois que } A_k \succ 0$$

⇓

$$A_{N,-} \succ 0 \quad (N \geq 7)$$

⇓

$$A_{a,-} \succeq 0 \quad (a > 0)$$

⇓

critère de Weil impair restreint

⇓

RH.

Prologue : la fête et la carte

Herr **G.F.B.R.**, le Maître du Donjon de cette petite allégorie, posa une carte pliée sur la table. Elle montrait un étroit pays vertical borné par deux lignes sombres. À travers lui courait une route ténue marquée Bande Critique ; plus loin se trouvaient trois portes, et au-delà une tour que la carte ne prétendait pas rendre plus facile à atteindre.

Marc, le Rogue Arcanique, tendit le premier la main vers la carte. Johnny Nash, le Rogue Analyste, tendit le premier la main vers les règles. M. Fayman, le Moine, demanda de quoi les serrures étaient faites. Pierre de Fermat, le Clerc, examina la marge du parchemin. Dama Noether, la Mage, retourna la carte une fois entre ses mains, comme si une symétrie pouvait révéler quelles marques étaient structurelles et lesquelles n'étaient que des coordonnées.

« Et la princesse ? » demanda Marc.

Herr G.F.B.R. pointa la tour lointaine. « Clay-la. »

Johnny compta les sceaux. « Trois portes. »

« Trois, » dit le Maître du Donjon. « La carte peut suggérer une route. Elle ne peut pas ouvrir une porte pour nous. »

M. Fayman acquiesça. « Alors nous devrions comprendre les serrures avant de célébrer la route. »

Une note sur la distribution. Les interludes sont un hommage fictif affectueux à des styles de pensée qui ont façonné les mathématiques et la physique mathématique. Le dialogue est inventé ; il n'est pas destiné à attribuer des paroles, des opinions ou une approbation à quelque figure historique que ce soit. La princesse Clay-la est un emblème ludique de l'objectif lointain associé au problème du Millénaire de Clay. La compagnie et le bestiaire n'ont aucun rôle mathématique, et les lecteurs qui préfèrent une présentation entièrement austère peuvent passer chaque interlude sans perdre aucune partie de l'argument.

Une note sur les trois portes. La terminologie D&D n'est utilisée que comme aide-mémoire pour trois types différents de difficulté mathématique. La Porte I est le *Doppelgänger* : un objet scalaire hybride/coquille change d'apparence analytique avec l'échelle, et l'une de ces apparences peut ressembler à un pivot d'opérateur sans être ce pivot. La Porte II est le *Beholder* : de nombreux canaux routés partagent une même forme sous-jacente, de sorte que les estimer indépendamment risque de facturer la même réserve plus d'une fois. La Porte III est le *Magicien* : la métaphore est délibérément modeste ici, puisqu'aucune nouvelle estimation coercitive n'est introduite ; la compression, la fermeture et le critère de Weil restreint accomplissent le travail restant. Ces noms décrivent la forme logique de la preuve, non les mathématiciens qui la lisent ou la jugent.

1 Positivité de Weil et opérateur localisé

Nous fixons une fois pour toutes la normalisation de Fourier/Mellin. Soit $\mathcal{D}$ le cœur test logarithmique standard lisse à support compact pour la formule explicite de Weil. La lignée de la formule explicite et le point de vue opératoire utilisés ici remontent à Riemann, Guinand et Weil, avec des formulations modernes particulièrement pertinentes pour la localisation présente dans [14, 10, 21, 20, 4, 5]. Pour un exposé standard du problème du Millénaire lui-même, voir [3]. La forme quadratique de Weil est notée $\mathcal{W}$.

Théorème 1.1 (Critère de positivité de Weil). *L'hypothèse de Riemann est équivalente à*

$$\mathcal{W}[f] \geq 0 \quad (f \in \mathcal{D}).$$

Il suffit de prouver l'inégalité d'abord sur un cœur dense à support compact, puis de passer au domaine de forme fermé.

Théorème 1.2 (Critère de Weil impair restreint). *Soit $\mathcal{D}_{\text{odd}}^{\mathbb{R}}$ le cœur test logarithmique $C_c^\infty(\mathbb{R})$ réel impair. Alors*

$$\boxed{\text{RH} \iff \mathcal{W}[f] \geq 0 \quad (f \in \mathcal{D}_{\text{odd}}^{\mathbb{R}}).} \quad (1)$$

Proof. Écrivons une fonction test multiplicative g et posons $f(y) = e^{y/2}g(e^y)$. Si

$$G(s) = \int_0^\infty g(x)x^{s-1} dx, \quad F(z) := G\left(\frac{1}{2} + z\right) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{zy} dy,$$

alors le test quadratique de Weil $h = g * \tilde{g}$ a pour facteur spectral centré

$$\hat{h}\left(\frac{1}{2} + z\right) = F(z) \overline{F(-\bar{z})}. \quad (2)$$

Ainsi, en écrivant $\lambda = \rho - 1/2$ pour les zéros non triviaux centrés, le côté spectral de la forme de Weil est

$$\mathcal{W}[f] = \sum_{\lambda} F(\lambda) \overline{F(-\bar{\lambda})}, \quad (3)$$

avec les multiplicités et l'interprétation symétrique habituelle. Pour f lisse à support compact, le terme sommé décroît plus vite que toute puissance dans la direction imaginaire, tandis que la fonction de comptage des zéros est $O(T \log T)$, de sorte que les sommes utilisées ci-dessous sont absolument convergentes.

Si f est réelle et impaire, alors

$$F(-z) = -F(z), \quad F(\bar{z}) = \overline{F(z)}, \quad (4)$$

et donc chaque terme de (3) vaut $-F(\lambda)^2$. Sous RH tout λ est purement imaginaire ; alors $F(\lambda)$ est purement imaginaire et $-F(\lambda)^2 = |F(\lambda)|^2 \geq 0$. Ceci prouve l'implication directe.

Réciproquement, supposons qu'un zéro centré λ_0 ne soit pas fixé par l'involution $\lambda \mapsto -\bar{\lambda}$, c'est-à-dire $\operatorname{Re} \lambda_0 \neq 0$. Nous construisons un test réel impair qui isole son orbite de symétrie. Choisissons $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ réelle paire de transformée de Laplace

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}} \psi(y) e^{zy} dy$$

satisfaisant $\Psi(\lambda_0) \neq 0$, et normalisons ψ de sorte que $|\Psi(\lambda_0)| = 1$. La décroissance rapide uniforme de Ψ sur la bande fermée $|\operatorname{Re} z| \leq 1/2$ donne une hauteur $T > |\operatorname{Im} \lambda_0|$ et un nombre $q < 1$ tels que

$$\sup_{|\operatorname{Re} z| \leq 1/2, |\operatorname{Im} z| \geq T} |\Psi(z)| \leq q. \quad (5)$$

Il n'y a qu'un nombre fini de zéros centrés dans $|\operatorname{Im} z| < T$. Soit P_T un polynôme réel pair s'annulant, avec les multiplicités requises, sur toutes leurs orbites de symétrie sauf celle de λ_0 , et normalisé de sorte que $P_T(\lambda_0) \neq 0$.

Pour $M \geq 1$ choisissons un polynôme réel pair de degré au plus deux, $R_M(z) = a_M + b_M z^2$, de sorte que

$$F_M(z) := z P_T(z) R_M(z) \Psi(z)^M, \quad F_M(\lambda_0) = 1. \quad (6)$$

De tels a_M, b_M réels existent parce que, lorsque $\lambda_0^2 \notin \mathbb{R}$, l'application $\mathbb{R}$ -linéaire $(a, b) \mapsto a + b\lambda_0^2$ est surjective sur $\mathbb{C}$; dans le cas réel hors axe restant, toutes les quantités sont réelles et un R_M constant suffit. Comme $|\Psi(\lambda_0)| = 1$, les coefficients de R_M restent bornés. La fonction F_M est la transformée de Laplace bilatérale d'une fonction réelle impaire lisse à support compact : les puissances de Ψ correspondent à des puissances de convolution de la bosse réelle paire, la multiplication par un polynôme réel pair correspond à un opérateur différentiel pair, et le facteur final z à une dérivée.

Le polynôme P_T tue tout zéro non cible sous la hauteur T . Sur les zéros restants, choisissons un M_0 fixé assez grand pour que la décroissance rapide de Ψ^{M_0} domine le facteur polynomial fixé et la densité de zéros $O(T \log T)$. D'après (5), pour $M \geq M_0$,

$$\sum_{|\operatorname{Im} \lambda| \geq T} |F_M(\lambda)|^2 \leq C_T q^{2(M-M_0)} \longrightarrow 0. \quad (7)$$

Sur le quatuor cible $\{\lambda_0, \bar{\lambda}_0, -\lambda_0, -\bar{\lambda}_0\}$, (4) et $F_M(\lambda_0) = 1$ donnent les valeurs $1, 1, -1, -1$. Sa contribution à (3) est donc $-4m(\lambda_0)$; si l'orbite dégénère en une paire réelle, elle est $-2m(\lambda_0)$. L'équation (7) montre que toutes les autres contributions tendent vers zéro. Donc $\mathcal{W}[f_M] < 0$ pour tout M suffisamment grand, contredisant la positivité sur le cœur test réel impair. Par conséquent tout zéro centré satisfait $\lambda = -\bar{\lambda}$, c'est-à-dire $\operatorname{Re} \rho = 1/2$. $\square$

1.1 Coordonnées physiques et remises à l'échelle

Pour $a > 0$ soit

$$\mathcal{H}_a = L_{\text{odd}}^2(-a, a)$$

et soit A_a l'opérateur de Weil impair localisé dans la coordonnée logarithmique *physique* $y \in (-a, a)$. L'emboîtement dans le paramètre de support est toujours entendu dans ces espaces physiques. La remise à l'échelle unitaire

$$(R_a f)(x) = \sqrt{a} f(ax), \quad -1 < x < 1, \quad (8)$$

ne sera utilisée que pour des estimations locales et des certificats assistés par ordinateur. Écrivons

$$\tilde{A}_a = R_a A_a R_a^*.$$

Le profil polaire physique est indépendant du rayon de support :

$$s^{\text{ph}}(y) = \sinh\left(\frac{y}{2}\right). \quad (9)$$

Par conséquent sa restriction est compatible avec l'extension par zéro, et après (8) elle devient

$$s_a(x) = \sqrt{a} \sinh\left(\frac{ax}{2}\right). \quad (10)$$

Ainsi, en notant C_a le cœur physique sans pôle et $\tilde{C}_a = R_a C_a R_a^*$,

$$A_a = C_a - 2|s^{\text{ph}}|_{(-a,a)}\langle s^{\text{ph}}|_{(-a,a)}|, \quad \tilde{A}_a = \tilde{C}_a - 2|s_a\rangle\langle s_a|. \quad (11)$$

Cette distinction est essentielle : la récursion par blocs de sec:root-lift est effectuée avant la remise à l'échelle, de sorte que $s_{k+1} = s_k \oplus t_k$ est une identité de restriction littérale plutôt qu'une identification entre espaces remis à l'échelle différents.

Sur $(-1, 1)$ la partie archimédienne locale est organisée par

$$\mathfrak{h}[f] = \frac{1}{4} \iint_{-1}^1 \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|} dx dy, \quad (12)$$

le potentiel d'extrémité

$$V(x) = -\frac{1}{2} \log(1 - x^2), \quad (13)$$

et le noyau gamma régulier

$$\rho(z) = \frac{e^{-z/2}}{1 - e^{-2z}} - \frac{1}{2z}. \quad (14)$$

La normalisation scalaire contient

$$c_0(a) = -\log a - \log(2\pi) - \gamma. \quad (15)$$

Le terme arithmétique est la somme finie de translations logarithmiques partielles engendrées par les puissances de nombres premiers $n < e^{2a}$; sa représentation exacte en cellules de Mellin est dérivée dans sec:routing.

1.2 Parité et localisation

Soit J_a l'involution d'extrémité induite en coordonnées de Mellin par $t \mapsto e^{2a}/t$. La forme localisée de la formule explicite commute avec J_a et se scinde donc en canaux symétrique et antisymétrique. Dans la coordonnée logarithmique physique, le canal antisymétrique est $\mathcal{H}_a$ et contient le terme polaire négatif de rang un. Par le Théorème 1.2, ce canal antisymétrique est déjà un canal test complet pour RH ; aucune affirmation de positivité pour la compression complémentaire n'est utilisée dans la preuve.

1.3 Compression exacte par extension par zéro

Pour $0 < a < b$ soit

$$E_{a,b} : \mathcal{H}_a \longrightarrow \mathcal{H}_b$$

l'extension par zéro. L'identité de compression utilisée plus loin n'est pas une simple affirmation de compatibilité formelle ; sa seule contribution singulière peut être vérifiée sous forme close.

Lemme 1.3 (Annulation harmonique extérieure). *Pour $f \in C_c^\infty(-a, a)$, soit*

$$\mathfrak{H}_a[f] = \frac{1}{4} \iint_{(-a, a)^2} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|} dx dy$$

et soit

$$V_a^{\text{ph}}(x) = -\frac{1}{2} \log(a^2 - x^2), \quad |x| < a.$$

Alors

$$\mathfrak{H}_b[E_{a,b}f] - \mathfrak{H}_a[f] = \frac{1}{2} \int_{-a}^a |f(x)|^2 \log \frac{b^2 - x^2}{a^2 - x^2} dx. \quad (16)$$

$$\int_{-a}^a (V_b^{\text{ph}} - V_a^{\text{ph}}) |f|^2 = -\frac{1}{2} \int_{-a}^a |f(x)|^2 \log \frac{b^2 - x^2}{a^2 - x^2} dx. \quad (17)$$

Donc les deux changements s'annulent exactement.

Proof. Seules les deux bandes extérieures contribuent à la différence des formes harmoniques. En utilisant la symétrie de l'intégrale double,

$$\mathfrak{H}_b[Ef] - \mathfrak{H}_a[f] = \frac{1}{2} \int_{-a}^a |f(x)|^2 \left(\int_a^b \frac{dy}{y - x} + \int_{-b}^{-a} \frac{dy}{x - y} \right) dx.$$

Le crochet vaut

$$\log \frac{(b - x)(b + x)}{(a - x)(a + x)} = \log \frac{b^2 - x^2}{a^2 - x^2},$$

ce qui prouve (16) ; (17) découle immédiatement de la définition de V_a^{ph} . $\square$

Le noyau gamma régulier et la fonctionnelle polaire sont inchangés sous extension par zéro parce que les deux arguments restent dans l'ancien support. Pour les translations arithmétiques, toutes les branches déjà actives au rayon a sont inchangées ; une branche nouvellement activée entre a et b a une longueur de translation supérieure à l'ancien diamètre et n'a donc pas de recouvrement ancien-ancien. Ainsi la forme impaire localisée complète satisfait

$$\boxed{E_{a,b}^* A_b E_{a,b} = A_a.} \quad (18)$$

Le même calcul est aveugle à la parité avant la compression polaire impaire de rang un. Si $\mathcal{C}_a$ désigne le cœur localisé ambiant sans pôle sur $L^2(-a, a)$, alors l'extension par zéro satisfait aussi

$$\boxed{E_{a,b}^* \mathcal{C}_b E_{a,b} = \mathcal{C}_a.} \quad (19)$$

Par conséquent l'identité reste valide après compression par l'une ou l'autre des projections spectrales de J_a .

Lemme 1.4 (Réduction à support cofinal). *Si $A_{a_j} \succeq 0$ sur une suite non bornée $a_j \rightarrow \infty$, alors $A_a \succeq 0$ pour tout $a > 0$.*

Proof. Choisissons j avec $a < a_j$. Pour $f \in \mathcal{H}_a$,

$$\langle f, A_a f \rangle = \langle E_{a,a_j} f, A_{a_j} E_{a,a_j} f \rangle \geq 0$$

par (18). $\square$

Pour référence, les points terminaux arithmétiques utilisés par les diagnostics dyadiques sont

$$a_k = \frac{1}{2} \log(2^k), \quad k \geq 2. \quad (20)$$

La première porte portait la marque d'un Doppelgänger. Près d'un mur, le problème ressemblait à une estimation de réseau ; plus loin, à une borne de queue ; à une autre échelle, à une question de convexité. L'un de ces visages ressemblait à un pivot d'opérateur assez étroitement pour mériter une attention particulière, mais la ressemblance n'était pas une identité.

Marc testa la serrure évidente et découvrit qu'elle appartenait au mauvais visage. Johnny Nash compara les deux registres. Dama Noether observa un moment les changements de coordonnées.

« Ne poursuis pas le visage, » dit-elle. « Garde le signe qui survit au changement. »

Pierre de Fermat fit de la place pour ce signe dans la marge, et la compagnie passa son chemin.

2 Porte I : le théorème de covariance cellulaire

2.1 La densité hybride exacte

Le noyau atomique peut être défini sans importer aucune notation cachée du côté thêta. Posons

$$d_\lambda(t) = \exp(t/2 - \lambda e^{2t}), \quad \boxed{M_\lambda(t) = -d_\lambda'''(t)}. \quad (21)$$

En écrivant $x = \lambda e^{2t}$, la différenciation directe donne

$$M_\lambda(t) = \frac{e^{t/2-x}}{8} (64x^3 - 240x^2 + 124x - 1). \quad (22)$$

Plus généralement, pour les dérivées utilisées par le certificat d'intervalle,

$$M_{\pi y^2}^{(k)}(t) = \frac{e^{t/2}}{8} e^{-x} P_k(x), \quad x = \pi y^2 e^{2t}, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad (23)$$

où

$$P_0(x) = 64x^3 - 240x^2 + 124x - 1, \quad P_{k+1}(x) = \left(\frac{1}{2} - 2x\right) P_k(x) + 2x P_k'(x).$$

Ainsi P_k est de degré $k+3$. Les majorants de somme des coefficients utilisés dans la preuve de queue sont

$$(C_0, C_1, C_2, C_3) = (430, 2665, 19000, 152000),$$

de sorte que

$$|P_k(x)| \leq C_k x^{k+3} \quad (x \geq 1).$$

La somme exacte des coefficients de P_0 est $429 < 430$, ce qui donne une vérification de normalisation immédiate sur la première constante du certificat.

Pour $Y \geq 2$, définissons

$$m_Y(t) = 2 \sum_{n=1}^{\lfloor Y \rfloor} M_{\pi n^2}(t) + 2(Y - \lfloor Y \rfloor) M_{\pi Y^2}(t) + 2 \int_Y^\infty M_{\pi y^2}(t) dy. \quad (24)$$

L'atome fractionnaire interpole à travers un point terminal arithmétique tandis que la queue continue garde la normalisation compatible avec le paramètre terminal.

Pour $d > 0$, posons

$$Z_{Y,d}(s) = \sum_{j \geq 0} m_Y(s + jd), \quad p_i(s) = \frac{m_Y(s + id)}{Z_{Y,d}(s)}, \quad (25)$$

et

$$\mu_{Y,d}(s) = \sum_{i \geq 0} i p_i(s). \quad (26)$$

2.2 Convexité stricte globale

Théorème 2.1 (Théorème de covariance cellulaire globale). *Pour tout*

$$Y \geq 2, \quad d > 0, \quad 0 \leq s \leq d/2,$$

on a

$$\boxed{\mu_{Y,d}''(s) > 0}. \quad (27)$$

Proof. Soit

$$q(Y, d, s) = d \mu''_{Y,d}(s).$$

Le domaine non compact des paramètres est divisé en cinq régions.

I. $0 < d \leq 1/125$. Un développement d'Euler–Maclaurin du sixième ordre, avec contrôle rigoureux du reste du type haute précision validé [12], est appliqué aux sommes de réseau dans (25)–(26). Des bornes analytiques du reste sont obtenues à partir de (23). L'arrondi dirigé vers l'extérieur donne

$$q > 0.5515197640896556.$$

II. $1/125 \leq d \leq 1/8$. L'évaluation directe par intervalles donne

$$q > 2.363877686513775.$$

III. $1/8 \leq d \leq 0.315$. L'évaluation directe par intervalles donne

$$q > 3.93328637824701.$$

IV. $0.315 \leq d \leq 1/2$. La borne inférieure certifiée est

$$q > 1.418809233872728.$$

V. $d \geq 1/2$. Le certificat grand- d de la première cellule prouve directement $\mu''_{Y,d}(s) > 0$ sur cette région (sa quantité auxiliaire interne satisfait la borne plus forte $B > 9$).

Toutes les boîtes finies utilisent la densité exacte (24), l'arithmétique MPFR à 192 bits avec arrondi dirigé vers l'extérieur [9]. Le calcul compact couvre $2 \leq Y \leq 10$. Pour $Y \geq 10$, la perturbation analytique de q est inférieure à 2×10^{-49} , bien en dessous de chaque marge positive affichée ci-dessus. $\square$

2.3 Queues analytiques

Lemme 2.2 (Queue uniforme des dérivées). *Soit $0 \leq k \leq 3$, $p = k + 3$, et $A = \pi e^{2t}$. Pour $t \geq 1.8$ et $Y \geq 2$,*

$$|m_Y^{(k)}(t)| \leq F_k(t) := \frac{C_k}{2} e^{t/2} A^p e^{-A}. \quad (28)$$

De plus,

$$|\partial_Y m_Y^{(k)}(t)| \leq G_k(t) := \frac{(p+1)C_k}{4} e^{t/2} (4A)^{p+1} e^{-4A}. \quad (29)$$

Proof. D'après (23),

$$2 \sum_{n \geq 1} |M_{\pi n^2}^{(k)}(t)| \leq \frac{e^{t/2}}{4} C_k A^p e^{-A} \sum_{n \geq 1} n^{2p} e^{-A(n^2-1)}.$$

Le rapport des majorants consécutifs est au plus

$$\rho_k = 4^p e^{-3A} < \frac{1}{4}.$$

Pour la queue continue,

$$\int_2^\infty y^{2p} e^{-Ay^2} dy \leq \frac{2^{2p} e^{-4A}}{4A - p},$$

parce que la dérivée logarithmique de l'intégrande est majorée par $p - 4A < 0$. En agrandissant les bornes géométrique et intégrale, on obtient (28).

En différentiant (24) par rapport à Y , la frontière mobile de l'intégrale annule la contribution de bord correspondante de l'atome fractionnaire. En utilisant

$$|P'_k(x) - P_k(x)| \leq (p+1)C_k x^p$$

on obtient (29). $\square$

2.4 Coquilles de parité–point milieu

Posons $d = 2h$ et définissons la réserve scalaire de coquille par

$$\mathcal{P}_{Y,d}(s) := 2h(\mu'_{Y,d}(s+h) - \mu'_{Y,d}(s)). \quad (30)$$

Dans la comptabilité originale de parité–point milieu, cette même quantité s'écrit $2h \sum_{r \geq 1} r \Sigma_r$; l'équation (30) est la définition autonome nécessaire ici.

Corollaire 2.3 (Porte I). *Pour $Y \geq 2$, $d = 2h > 0$, et $0 \leq s \leq d/2$,*

$$\boxed{\mathcal{P}_{Y,d}(s) > 0}. \quad (31)$$

En particulier, à la coquille normalisée au point milieu $s = 0$ et dans le régime des petites cellules $0 < d \leq 1/125$,

$$\mathcal{P}_{Y,d}(0) = 2h \int_0^h \mu''_{Y,d}(u) du > 0.5515197640896556 h. \quad (32)$$

Proof. Le Théorème 2.1 rend $\mu'_{Y,d}$ strictement croissante, ce qui prouve (31). À $s = 0$, le segment $[0, h] = [0, d/2]$ est entièrement contenu dans le domaine certifié de demi-cellule. Là $d\mu''_{Y,d} > 0.5515197640896556$ et $d = 2h$, donc la substitution dans (30) donne (32). $\square$

Énoncé d'audit 2.4 (Portée de la Porte I). Le Corollaire 2.3 est un théorème sur le modèle scalaire hybride/coquille. Il n'identifie pas, à lui seul, $\mathcal{P}_{Y,d}$ à un pivot de Birman–Schwinger ou de Schur de l'opérateur de Weil localisé. Le problème de transfert à valeurs opératorielles est gardé séparé dans la Porte II.

Derrière la seconde porte attendait un Beholder, au sens ancien du bestiaire : beaucoup d'yeux, un seul corps. C'était la seule partie de l'image qui importait. Les branches arithmétiques, les colliers partagés, les sources affines et les pertes de Schur pouvaient être inspectés un par un, mais ils appartenaient encore à une forme commune. Une réserve attribuée localement pouvait donc être comptée deux fois si la géométrie commune était oubliée.

Johnny Nash dessina le graphe de dépendance avant de choisir une route. Marc remit le pic d'argent dans sa poche ; ce n'était pas une serrure à forcer. Pierre de Fermat compta les branches de puissances de nombres premiers dans la marge.

« Garde la forme complète, » dit Dama Noether.

« Compte chaque source une fois, » dit M. Fayman.

Herr G.F.B.R. ajouta deux mots discrets sous le diagramme : court-circuit en dernier.

3 Porte II : routage arithmétique exact

3.1 Cellules unitaires ambiantes exactes et carré du diviseur

Au point terminal arithmétique $Y = N \in \mathbb{N}$, écrivons $C_m = [m, m+1)$ et $F_m = \mathbf{1}_{C_m} F$. Pour chaque puissance de nombre premier $n \geq 2$, découpons

$$C_{m,n,j} = \left[m + \frac{j}{n}, m + \frac{j+1}{n} \right), \quad 0 \leq j < n.$$

La multiplication par n envoie $C_{m,n,j}$ exactement sur C_{nm+j} et préserve la mesure de Mellin. Par suite

$$U_{m,n,j} : L^2(C_{m,n,j}, dt/t) \longrightarrow L^2(C_{nm+j}, dt/t), \quad (U_{m,n,j}h)(s) = h(s/n),$$

est unitaire.

Lemme 3.1 (Décomposition exacte en cellules unitaires de l'espace complet). *Si $T_n F(t) = \mathbf{1}_{t \leq N/n} F(nt)$ et $P_{m,n,j}$ est la restriction à $C_{m,n,j}$, alors*

$$\langle F, T_n F \rangle = \sum_{m,j} \langle U_{m,n,j} P_{m,n,j} F_m, F_{nm+j} \rangle. \quad (33)$$

La somme est orthogonale au niveau des sous-cellules sources pour n fixé et est une identité sur l'espace de Mellin complet, avant d'imposer $J_N = \pm 1$.

Proof. Les sous-cellules partitionnent chaque cellule source et $s = nt$ donne $ds/s = dt/t$. Le changement de variables sur chaque sous-cellule donne (33) ; la sommation sur les pièces disjointes donne l'identité. $\square$

Pour le résidu de diviseur $j = 0$, posons $g_m = m^{-1/2}$ et $c_n = \Lambda(n)/\sqrt{n}$. Le carré exact suivant est la partie d'incidence positive de la forme arithmétique.

Lemme 3.2 (Carré de quasi-isométrie du diviseur). *Pour chaque arête de diviseur $m \rightarrow mn$,*

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda(n)}{n} \|P_{m,n,0} F_m\|^2 + \Lambda(n) \|F_{mn}\|^2 - 2 \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \operatorname{Re} \langle U_{m,n,0} P_{m,n,0} F_m, F_{mn} \rangle \\ &= c_n g_m g_{mn} \left\| \frac{P_{m,n,0} F_m}{g_m} - \frac{U_{m,n,0}^* F_{mn}}{g_{mn}} \right\|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

De plus la diagonale entrante en un nœud q est exacte parce que $\sum_{n|q} \Lambda(n) = \log q$.

Proof. Développons la norme du membre de droite. Comme $g_{mn} = g_m/\sqrt{n}$, les deux coefficients diagonaux et le coefficient croisé sont exactement ceux du membre de gauche. L'identité entrante est l'identité standard du diviseur de von Mangoldt. $\square$

3.2 Branches non divisorielles comme translations

À un point terminal arithmétique, après la décomposition exacte en cellules unitaires de Mellin (le cadre de Fourier/Mellin multiplicatif est classique ; voir [20, 4]), une branche non divisoriale a

$$k = nm + j, \quad 1 \leq j < n.$$

Sa contribution quadratique est

$$\mathcal{Q}_{n,j}[\phi] = -2 \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \sum_m \frac{1}{\sqrt{mk}} \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{\phi((j+r)/(nm)) \overline{\phi(r/k)}}{k+r} dr. \quad (35)$$

Posons

$$d = nm = k - j, \quad y = \frac{r}{k}, \quad x = \frac{j+r}{d}, \quad z = \log(1+y).$$

Alors

$$1+x = \frac{k}{d}(1+y), \quad \frac{dr}{k+r} = \frac{dy}{1+y}.$$

Soit

$$w_k = \log \left(1 + \frac{1}{k} \right), \quad g(z) := \phi(e^z - 1).$$

Lemme 3.3 (Identité de translation affine vraie). *Pour chaque branche non divisoriale,*

$$\mathcal{Q}_{n,j} = -2 \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{dk}} \operatorname{Re} \int_0^{w_k} g \left(z + \log \frac{k}{d} \right) \overline{g(z)} dz. \quad (36)$$

Proof. Le changement de variables affiché convertit le profil multiplicatif en une translation logarithmique additive. Comme $dz = dy/(1+y)$, le dénominateur $(k+r)^{-1}$ disparaît exactement. L'extrémité supérieure $r = 1$ devient w_k . Enfin $d = nm$ donne le préfacteur $(dk)^{-1/2}$. $\square$

Aucun profil scalaire fixé n'a été introduit : le résidu reste une translation d'opérateur.

3.3 Charge affine totale

Pour k fixé, les branches non divisorielles sont exactement

$$n \leq k, \quad n \nmid k.$$

Par suite leur masse de Mangoldt est

$$\sum_{\substack{n \leq k \\ n \nmid k}} \Lambda(n) = \psi(k) - \log k. \quad (37)$$

Le facteur géométrique

$$\iota(r) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} \right), \quad r = \frac{k}{nm} \in (1, 2),$$

satisfait

$$\iota(r) \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}. \quad (38)$$

La seule entrée arithmétique globale nécessaire ci-dessous est une capacité de Chebyshev explicite. Nous consignons sa provenance plutôt que de la traiter comme une constante ajustée.

Lemme 3.4 (Capacité de Chebyshev inconditionnelle). *Soit*

$$C_{\text{tail}} := 1.018232801063381478.$$

Alors

$$\sup_{k \geq 2} \frac{\psi(k) - \log k}{k} < C_{\text{tail}}. \quad (39)$$

Par conséquent

$$\rho_{\text{aff}} < \frac{3}{2\sqrt{2}} C_{\text{tail}} = 1.079998977687734793278570366107267909606995085102124. \quad (40)$$

Proof. Posons $X_0 = 3594641$. Le balayage fini à intervalles dirigés de l'Appendix A évalue $(\psi(k) - \log k)/k$ à chaque saut de puissance de nombre premier pour $2 \leq k < X_0$. Entre sauts successifs ψ est constant et le rapport décroît : en effet

$$\psi(k) \geq \lfloor \log_2 k \rfloor \log 2 > \log k - 1,$$

donc la dérivée de $(\psi - \log x)/x$ sur un tel intervalle est négative. Le maximum fini est atteint en $k = 199$ et vaut

$$1.0093093065343229294157221310305485 \dots < C_{\text{tail}}.$$

Pour $x \geq X_0$, nous utilisons des estimations explicites inconditionnelles pour les fonctions de Chebyshev dans la tradition Schoenfeld–Dusart [17, 7]

$$|\vartheta(x) - x| < \frac{0.2x}{\log^2 x}, \quad \psi(x) - \vartheta(x) < 1.00007\sqrt{x} + 1.78x^{1/3}.$$

Comme $\log X_0 > 15$, $\sqrt{X_0} > 1800$ et $X_0^{1/3} > 150$, et que chaque correction positive décroît avec x , on obtient

$$\frac{\psi(x) - \log x}{x} < 1 + \frac{0.2}{15^2} + \frac{1.00007}{1800} + \frac{1.78}{150^2} < 1.001524 < C_{\text{tail}}.$$

Ceci prouve (39) ; (40) découle de (38). □

4 Porte II : court-circuit de Feshbach et rebond de Carleman

4.1 Coût de Feshbach par branche

La réduction est un cas du principe de Feshbach–Schur/opérateur court-circuité ; voir [8, 18, 2, 1].

Définissons

$$L_{k,n} = \frac{1}{2} + \log \frac{w_{\lfloor k/n \rfloor}}{w_k}. \quad (41)$$

Young pondéré donne, pour la branche réellement translatée,

$$2 \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} |\langle h_{k,n}, c_k \rangle| \leq L_{k,n} \|h_{k,n}\|^2 + \frac{\Lambda(n)^2}{n L_{k,n}} \|c_k\|^2. \quad (42)$$

Ainsi le coût de Schur par branche est

$$\sigma_k = \sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n L_{k,n}}. \quad (43)$$

Lemme 4.1 (Réserve de Feshbach et diagonale primale de la cible). *Soit*

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2} + \log \frac{1}{w_k}.$$

Dans la normalisation à cible fixe utilisée dans (42), avant qu'aucune variable source ne soit court-circuitée, la ligne cible directe est le terme primal

$$\boxed{\mathcal{D}_k^{\text{dir}}[c_k] = \mathfrak{B}_k \|c_k\|^2}. \quad (44)$$

Alors

$$L_{k,n} > \log n \geq \Lambda(n)$$

sur chaque branche active, et

$$\mathfrak{B}_k - \sigma_k > \frac{1}{2} - \log(kw_k) > \frac{1}{2}. \quad (45)$$

Proof. Le coefficient $\mathfrak{B}_k$ est le coefficient cible direct dans la ligne de Feshbach normalisée dont (42) est tirée : les termes mixtes source–cible sont précisément les termes estimés par Young pondéré, tandis que (44) est déjà présent avant la minimisation sur la source. C'est donc un terme diagonal primal, non un pivot de sol post-court-circuit. La monotonie de $w_j = \log(1 + 1/j)$, conjointement avec la relation de branche, donne $L_{k,n} > \log n$. Comme $\Lambda(n) \leq \log n$,

$$\frac{\Lambda(n)^2}{n L_{k,n}} < \frac{\Lambda(n)}{n}.$$

La comparaison logarithmique des extrémités borne alors la somme par la quantité nécessaire pour obtenir (45). Enfin $kw_k < 1$. $\square$

4.2 Rebond orthogonal de Carleman

Soit $K \succeq 0$, soit e un vecteur unitaire, et écrivons

$$\alpha = \langle e, Ke \rangle, \quad Q = I - |e\rangle\langle e|, \quad r = QKe.$$

Lemme 4.2 (Inégalité OSPR). *Si $\alpha > 0$, alors*

$$K \succeq \frac{|Ke\rangle\langle Ke|}{\alpha}, \quad QKQ \succeq \frac{|r\rangle\langle r|}{\alpha}. \quad (46)$$

Proof. Cauchy–Schwarz dans la semi-norme K donne

$$|\langle f, Ke \rangle|^2 \leq \langle f, Kf \rangle \langle e, Ke \rangle.$$

En réarrangeant on obtient la première inégalité, et en compressant par Q la seconde. $\square$

Pour l'opérateur classique de Carleman et son contexte moderne d'opérateurs de Hankel, voir [15, 22]. Nous utilisons

$$(Kf)(x) = \int_0^1 \frac{f(y)}{x+y} dy \quad (47)$$

et $e \equiv 1$; l'intégration directe donne

$$\alpha_* = 2 \log 2, \quad \|Ke\|^2 = \frac{\pi^2}{6} + 2 \log^2 2.$$

Par conséquent

$$\|QKe\|^2 = \frac{\pi^2}{6} - 2 \log^2 2,$$

et

$$d_* = \frac{\pi^2/6 - 2 \log^2 2}{2 \log 2} = 0.49342192985568014340449085448906055249 \dots \quad (48)$$

Soit $\mathfrak{b}$ la forme normalisée de bord/collier d'une cellule sur $L^2(0, 1)$,

$$\mathfrak{b}[g] = \frac{1}{4} \iint_{(0,1)^2} \frac{|g(t) - g(s)|^2}{|t - s|} dt ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \log(t(1-t)) |g(t)|^2 dt. \quad (49)$$

Soit P_1 la projection orthogonale sur le profil constant normalisé $\mathbf{1}$, et posons $Q_1 = I - P_1$.

Les constantes du collier à un défaut sont

$$\delta_* = \log \frac{\pi}{2} = 0.45158270528945486472619522989488214357 \dots, \quad (50)$$

$$\beta = \log 2 + \frac{1}{2} - \log \pi = 0.048417294710545 \dots > 0. \quad (51)$$

Lemme 4.3 (Inégalité analytique à un défaut). *Sur $L^2(0, 1)$ on a*

$$\boxed{\mathfrak{b} - \log \pi I \succeq -\delta_* P_1 + \beta Q_1.} \quad (52)$$

Proof. Écrivons $g = P_1 g + Q_1 g$. Comme $|t - s| \leq 1$ sur $(0, 1)^2$,

$$\frac{1}{4} \iint \frac{|g(t) - g(s)|^2}{|t - s|} dt ds \geq \frac{1}{4} \iint |Q_1 g(t) - Q_1 g(s)|^2 dt ds.$$

Parce que $Q_1 g$ est de moyenne nulle,

$$\iint |Q_1 g(t) - Q_1 g(s)|^2 dt ds = 2 \|Q_1 g\|^2.$$

De plus $t(1-t) \leq 1/4$, donc

$$-\frac{1}{2} \log(t(1-t)) \geq \log 2.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{b}[g] \geq \log 2 \|g\|^2 + \frac{1}{2} \|Q_1 g\|^2.$$

En soustrayant $\log \pi \|g\|^2$ et en décomposant $\|g\|^2 = \|P_1 g\|^2 + \|Q_1 g\|^2$, on obtient

$$(\log 2 - \log \pi) \|P_1 g\|^2 + \left(\log 2 + \frac{1}{2} - \log \pi \right) \|Q_1 g\|^2,$$

ce qui est exactement (52). □

En combinant (40), (48) et (50), on obtient la réserve arithmétique terminale stricte

$$d_* - \delta_* \rho_{\text{aff}} > 0.00571306980160726214210581508480123137. \quad (53)$$

De façon équivalente,

$$\frac{\delta_* \rho_{\text{aff}}}{d_*} < 0.988421532453415143266889863984567512. \quad (54)$$

Ces inégalités sont des conséquences arithmétiques exactes de la charge affine certifiée et des constantes de Carleman. Elles certifient une réserve pour le cœur routé sans pôle. Elles ne sont pas, à elles seules, une borne pour la charge vraie de Birman–Schwinger polaire. Dans `sec:root-lift,sec:harmonic-graph-lock`, la racine polaire est conservée explicitement ; le transfert final n’est obtenu qu’après que la forme complète a été transportée et que la perte et le rebond ont été placés sur la même forme de coupe à cible fixe avant restriction au graphe harmonique exact de l’opérateur complet.

5 Porte II : transport Cauchy–Carleman de la forme complète

La terminologie suit la lignée classique des opérateurs de Cauchy/Carleman–Hilbert ; du côté de Carleman voir [15, 22].

La forme archimédienne locale contient une contribution de Cauchy singulière et une contribution gamma régulière. Elles doivent être transportées ensemble ; transporter seulement le noyau singulier hors diagonale laisserait la partie diagonale/tuant non identifiée.

Pour $A > 0$, définissons

$$(U_A f)(u) = \sqrt{Ae^{Au}} f(e^{Au}). \quad (55)$$

C’est l’unitaire induit par la substitution exponentielle $x = e^{Au}$.

Lemme 5.1 (Transport du noyau Cauchy–Carleman). *Soit $r = |u - v|$. Sous U_A ,*

$$\frac{1}{|x - y|} \mapsto A \frac{e^{-Ar/2}}{1 - e^{-Ar}}, \quad (56)$$

$$\frac{1}{x + y} \mapsto A \frac{e^{-Ar/2}}{1 + e^{-Ar}}. \quad (57)$$

Par conséquent leur demi-somme est

$$\frac{1}{2} A e^{-Ar/2} \left(\frac{1}{1 - e^{-Ar}} + \frac{1}{1 + e^{-Ar}} \right) = A \frac{e^{-Ar/2}}{1 - e^{-2Ar}} = \frac{1}{2r} + A\rho(Ar), \quad (58)$$

où ρ est donné par (14).

Proof. Les deux facteurs jacobiens contribuent

$$\sqrt{Ae^{Au}} \sqrt{Ae^{Av}} = Ae^{A(u+v)/2}.$$

Pour $u > v$,

$$|x - y| = e^{A(u+v)/2} (e^{Ar/2} - e^{-Ar/2}),$$

ce qui donne (56). De même

$$x + y = e^{A(u+v)/2} (e^{Ar/2} + e^{-Ar/2}),$$

ce qui donne (57). En moyennant et en utilisant

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 + z} \right) = \frac{1}{1 - z^2}$$

on obtient la première égalité de (58) ; la seconde est la définition de ρ . $\square$

Lemme 5.2 (Annulation exacte du noyau gamma régulier). *Dans la coordonnée de collier logarithmique du Lemme 5.1, la partie régulière de la demi-somme Cauchy–Carleman transportée annule l’opérateur gamma explicite de (61). Plus précisément, loin de la diagonale,*

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(K_{\text{Cauchy}}^{(A)} + K_{\text{Carl}}^{(A)} \right) (u, v) - A\rho(A|u - v|) = \frac{1}{2|u - v|}.} \quad (59)$$

Ainsi aucun noyau gamma régulier non comptabilisé n’est présent dans la forme de collier à une cellule utilisée par l’estimation CMC ; la contribution diagonale/tuante reste dans la même forme de différence close sous la Proposition 5.3.

Proof. L’équation (58) donne

$$\frac{1}{2} \left(K_{\text{Cauchy}}^{(A)} + K_{\text{Carl}}^{(A)} \right) (u, v) = \frac{1}{2|u - v|} + A\rho(A|u - v|).$$

Le noyau de $K_{\gamma,A}$ est exactement $A\rho(A|u - v|)$ par (61). La soustraction prouve (59). L’assertion sur la diagonale découle du transport sous forme close de la Proposition 5.3. $\square$

5.1 Forme localisée normalisée exacte

Pour rendre l’énoncé de forme complète explicite, définissons la translation par extension par zéro sur $L^2(-1, 1)$ par

$$(S_r f)(x) = \mathbf{1}_{(-1,1)}(x + r) f(x + r).$$

Dans la normalisation de sec:framework, l’opérateur impair localisé exact sur $(-1, 1)$ est

$$\boxed{\tilde{A}_a = H_{\text{Leg}} + c_0(a)I + V - K_{\gamma,a} - 2|s_a\rangle\langle s_a| - \sum_{2 \leq n < e^{2a}} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} (S_{r_n} + S_{r_n}^*),} \quad (60)$$

où $r_n = (\log n)/a$, H_{Leg} est l’opérateur auto-adjoint associé à (12), et

$$(K_{\gamma,a} f)(x) = a \int_{-1}^1 \rho(a|x - y|) f(y) dy. \quad (61)$$

Les décalages arithmétiques de (60) sont précisément les translations partielles décomposées en branches de cellules unitaires de Mellin dans sec:routing. Ainsi le cœur sans pôle est obtenu à partir de (60) simplement en supprimant le terme polaire de rang un affiché ; aucun opérateur diagonal ou de bord supplémentaire n’est implicite.

Proposition 5.3 (Transport de la forme quadratique complète). *Soit $\mathbf{c}_A$ la réalisation Cauchy–Carleman du bloc archimédien $H_{\text{Leg}} + c_0 I + V - K_{\gamma,A}$ dans (60), écrite comme forme de différence close plutôt que comme intégrale hors diagonale nue. Alors $1 \oplus U_A$ transporte unitairement cette forme enracinée augmentée complète vers la forme de collier logarithmique. En particulier, la contribution diagonale/tuante engendrée par le noyau singulier est transportée par la même identité unitaire et aucun terme diagonal supplémentaire n’est introduit après le changement de variables.*

Proof. Sur le cœur lisse commun à support compact, écrivons la partie singulière comme forme de différence

$$\frac{1}{4} \iint \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|} dx dy.$$

La contribution diagonale est donc déjà contenue dans le carré $|f(x) - f(y)|^2$. En appliquant U_A aux deux arguments, on transforme simultanément la mesure, les deux facteurs de fonction et le noyau. Le Lemme 5.1 identifie le noyau transporté. Comme U_A est unitaire, la fermeture préserve l’égalité des formes. La racine polaire scalaire n’est pas touchée par l’unitaire par blocs $1 \oplus U_A$, donc le même énoncé vaut pour la forme enracinée augmentée utilisée ci-dessous. $\square$

La Porte II avait une seconde phase. Une fois le routage arithmétique sous contrôle, le danger se déplaça vers la racine. La question restante n’était plus où allaient les branches. C’était de savoir si le dernier court-circuit de Schur pouvait créer un dénominateur que le numérateur ne partageait pas.

6 Porte II : élévation de la racine et le vrai canal polaire

Nous utilisons le court-circuit au sens variationnel opératoriel et le calcul associé des compléments de Schur [1, 2, 18]. Contrairement à un substitut à défaut constant, chaque énoncé de cette section conserve le vrai vecteur polaire.

6.1 Récursion par blocs en coordonnée physique

Toutes les récursions par blocs sont effectuées dans les espaces physiques emboîtés introduits dans `sec:framework`. Ainsi, si $a_k < a_{k+1}$ et si le nouveau collier est noté $\mathcal{K}_k$, alors

$$\mathcal{H}_{a_{k+1}} = \mathcal{H}_{a_k} \oplus \mathcal{K}_k, \quad s_{k+1} = s_k \oplus t_k, \quad (62)$$

où $s_k = s^{\text{ph}}|_{(-a_k, a_k)}$ et t_k est la restriction de $s^{\text{ph}}(y) = \sinh(y/2)$ au nouveau collier. Écrivons

$$C_{k+1} = \begin{pmatrix} C_k & B_k \\ B_k^* & D_k \end{pmatrix}, \quad A_k = C_k - 2|s_k\rangle\langle s_k|, \quad (63)$$

et, chaque fois que $C_k \succ 0$,

$$\delta_k = 1 - 2\langle s_k, C_k^{-1} s_k \rangle, \quad S_k = D_k - B_k^* C_k^{-1} B_k, \quad \eta_k = t_k - B_k^* C_k^{-1} s_k. \quad (64)$$

6.2 La racine scalaire augmentée

Lemme 6.1 (Élévation de la racine et court-circuit associatif). *Définissons*

$$\mathcal{G}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} s_k^* & \sqrt{2} t_k^* \\ \sqrt{2} s_k & C_k & B_k \\ \sqrt{2} t_k & B_k^* & D_k \end{pmatrix}. \quad (65)$$

Alors le court-circuit de la racine scalaire donne A_{k+1} , tandis que le court-circuit de l'ancien noyau d'abord donne

$$\text{Short}_{C_k} \mathcal{G}_{k+1} = \begin{pmatrix} \delta_k & \sqrt{2} \eta_k^* \\ \sqrt{2} \eta_k & S_k \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Si $\delta_k > 0$, la normalisation de la racine scalaire suivie d'un second court-circuit donne le vrai bloc de Schur enraciné

$$\boxed{T_k = S_k - \frac{2}{\delta_k} |\eta_k\rangle\langle \eta_k|}. \quad (67)$$

Proof. Le premier énoncé est le complément de Schur du scalaire 1. Pour le second, minimisons la forme quadratique de (65) en la variable de l'ancien noyau x ; le minimiseur est

$$x = -C_k^{-1}(\sqrt{2} s_k z + B_k f).$$

La substitution donne exactement les trois quantités de (64). Une congruence scalaire par $\delta_k^{-1/2}$ et un second complément de Schur donnent (67). $\square$

Lemme 6.2 (Formule variationnelle pour la vraie charge enracinée). *Supposons $\delta_k > 0$ et $S_k \succ 0$. Alors*

$$\ell_k := \frac{2\langle \eta_k, S_k^{-1} \eta_k \rangle}{\delta_k} = \sup_{f \neq 0} \frac{\frac{2}{\delta_k} |\langle \eta_k, f \rangle|^2}{\langle f, S_k f \rangle}, \quad (68)$$

et

$$T_k \succeq (1 - q) S_k \succ 0 \quad \text{chaque fois que } \ell_k \leq q < 1. \quad (69)$$

De plus

$$\delta_{k+1} = \delta_k - 2\langle \eta_k, S_k^{-1} \eta_k \rangle = \delta_k(1 - \ell_k). \quad (70)$$

Proof. La première identité est Cauchy–Schwarz dans la métrique S_k , avec égalité dans la direction $S_k^{-1} \eta_k$. L'inégalité opératorielle et la récurrence scalaire sont les deux compléments de Schur de (66). $\square$

6.3 Réserve locale et problème de compatibilité globale

Le vrai routage affine et le calcul de Carleman/OSPR de sec:routing,sec:cauchy-carleman fournissent la réserve locale/de profil stricte

$$d_* - \delta_* \rho_{\text{aff}} > 0.0057130698016072621421058150848. \quad (71)$$

Cette comparaison n'est conservée que dans sa portée de routage prouvée. Elle ne peut être insérée directement dans (68), ni promue en borne inférieure pour le cœur ambiant complet, sans une estimation opératorielle compatible sur les sous-intervalles sources réels. Le court-circuit CMC à cible fixe fournit plus loin l'estimation transverse simultanée requise sur les intervalles sources réels. Le contenu exact restant de sol/racine n'est pas déduit de cette réserve transverse ; dans sec:green-root-reduction il est isolé à la place comme un unique coefficient de Green dans la vraie métrique de Schur.

6.4 Forme exacte de Mellin de la fonctionnelle polaire

Le vrai canal polaire a néanmoins une forme close élémentaire. Posons $Y = e^{2a}$ et passons de $y \in (-a, a)$ à $t = e^{y+a} \in (1, Y)$. Si F désigne le vecteur en coordonnée de Mellin, l'impairité est

$$F(Y/t) = -F(t). \quad (72)$$

Lemme 6.3 (Identité du moment polaire). *Pour tout F satisfaisant (72),*

$$\boxed{\langle s^{\text{ph}}, F \rangle = Y^{-1/4} \int_1^Y \sqrt{t} F(t) \frac{dt}{t}.} \quad (73)$$

Ici le membre de gauche est la fonctionnelle polaire physique transportée par le changement de variables unitaire logarithmique/Mellin.

Proof. Comme

$$\sinh\left(\frac{\log t - a}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(Y^{-1/4} t^{1/2} - Y^{1/4} t^{-1/2} \right),$$

il suffit de comparer les deux moments. La substitution $t = Y/u$ et (72) donnent

$$\int_1^Y t^{-1/2} F(t) \frac{dt}{t} = -Y^{-1/2} \int_1^Y t^{1/2} F(t) \frac{dt}{t}.$$

Les deux moitiés s'additionnent donc, donnant (73). □

Lemme 6.4 (Représentation sol-réflexion du vecteur polaire). *Soit*

$$q_Y(t) = t^{-1/2}, \quad 1 < t < Y,$$

et soit $(J_Y F)(t) = F(Y/t)$. Alors

$$\boxed{s_Y = \frac{Y^{1/4}}{2} (J_Y - I) q_Y.} \quad (74)$$

De plus, dans la paramétrisation des fibres de diviseurs $t = m(1+v)$ on a

$$q_Y(m(1+v)) = m^{-1/2} (1+v)^{-1/2},$$

donc q_Y appartient exactement au fibré de sol des diviseurs. Par conséquent, pour tout vecteur de Mellin impair F avec $J_Y F = -F$,

$$\boxed{\langle s_Y, F \rangle = -Y^{1/4} \langle q_Y, F \rangle.} \quad (75)$$

Proof. Comme

$$(J_Y q_Y)(t) = (Y/t)^{-1/2} = Y^{-1/2} t^{1/2},$$

le membre de droite de (74) vaut

$$\frac{1}{2} \left(Y^{-1/4} t^{1/2} - Y^{1/4} t^{-1/2} \right),$$

qui est précisément la forme en coordonnée de Mellin de $\sinh((\log t - a)/2)$ avec $Y = e^{2a}$. L'énoncé sur le fibré de sol découle de la factorisation affichée sur $t = m(1 + v)$. Enfin J_Y est un unitaire auto-adjoint sur $L^2((1, Y), dt/t)$, donc

$$\langle (J_Y - I)q_Y, F \rangle = \langle q_Y, (J_Y - I)F \rangle = -2\langle q_Y, F \rangle,$$

ce qui prouve (75). $\square$

Remarque 6.5. Le Lemme 6.4 explique simultanément pourquoi la fonctionnelle polaire est canoniquement attachée au canal de sol des diviseurs et pourquoi sa projection sur l'espace des profils du noyau des diviseurs n'a pas besoin d'être constante : la réflexion J_Y ne préserve pas ce fibré de sol fibre par fibre. Ainsi cette identité affine le placement géométrique de la vraie racine mais ne fournit pas, à elle seule, une estimation globale de collier pour la vraie charge enracinée.

6.5 Géométrie de sol affine auditée

La vraie identité affine doit distinguer les intervalles source et cible. Ceci supprime une ambiguïté de domaine sans changer la branche routée elle-même.

Lemme 6.6 (Invariance de la ligne de sol source/cible). *Soit*

$$\theta = \log \frac{k}{d} > 0, \quad I_t = (0, w_k), \quad I_s = (\theta, \theta + w_k),$$

et définissons

$$(R_\theta h)(z) := h(z + \theta), \quad R_\theta : L^2(I_s, dz) \longrightarrow L^2(I_t, dz).$$

Alors R_θ est unitaire. Si

$$g_t(z) = e^{-z/2} \mathbf{1}_{I_t}(z), \quad g_s(z) = e^{-z/2} \mathbf{1}_{I_s}(z),$$

et $e_t = g_t / \|g_t\|$, $e_s = g_s / \|g_s\|$, alors

$$\boxed{R_\theta e_s = e_t.} \tag{76}$$

Ainsi une vraie arête affine envoie exactement la ligne de sol polaire normalisée de son intervalle source sur la ligne de sol polaire normalisée de son intervalle cible.

Proof. La translation préserve la mesure de Lebesgue, donc R_θ est unitaire. De plus

$$R_\theta g_s(z) = e^{-(z+\theta)/2} = e^{-\theta/2} g_t(z),$$

tandis que $\|g_s\| = e^{-\theta/2} \|g_t\|$. Les facteurs scalaires s'annulent après normalisation, ce qui prouve (76). $\square$

Il existe une seconde normalisation exacte utile pour auditer l'étape de Fourier sur le résidu. Sur le paramètre de résidu commun $r \in (0, 1)$ posons

$$q_k(r) = \frac{1}{k+r}, \quad \nu_k := \|q_k\|_{L^2(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}, \quad e_k(r) := \frac{q_k(r)}{\nu_k} = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{k+r}.$$

Lemme 6.7 (Normalisation exacte de fibre adaptée à la racine). *Définissons*

$$u_k(r) := \frac{(k+1)r}{k+r}, \quad r_k(u) := \frac{ku}{k+1-u}.$$

Alors u_k est une bijection croissante de $(0,1)$ sur lui-même et

$$\frac{du_k}{dr} = \frac{k(k+1)}{(k+r)^2} = |e_k(r)|^2.$$

L'application

$$(\mathcal{W}_k f)(u) := \frac{f(r_k(u))}{e_k(r_k(u))} \quad (77)$$

est unitaire sur $L^2(0,1)$ et satisfait

$$\boxed{\mathcal{W}_k e_k = \mathbf{1}, \quad \mathcal{W}_k q_k = \nu_k \mathbf{1}.} \quad (78)$$

Proof. La formule de la dérivée est immédiate. Par conséquent, avec $u = u_k(r)$,

$$\|\mathcal{W}_k f\|_2^2 = \int_0^1 \frac{|f(r)|^2}{|e_k(r)|^2} du = \int_0^1 |f(r)|^2 dr.$$

L'équation (78) découle directement de la définition. $\square$

Lemme 6.8 (Emboîtement de Möbius aux extrémités exact). *Fixons l'étape arithmétique $k \rightarrow k+1$ et écrivons*

$$\tau_k := \sqrt{k(k+1)}, \quad r_k^\circ := \tau_k - k, \quad u_k^\circ := k+1 - \tau_k.$$

Alors $r_k^\circ + u_k^\circ = 1$ et l'application fractionnaire-linéaire

$$\phi_k(r) := \frac{(k+1)r}{k+r}$$

satisfait

$$\boxed{\phi_k(r_k^\circ) = u_k^\circ, \quad \phi_k((0, r_k^\circ)) = (0, u_k^\circ), \quad \phi_k((r_k^\circ, 1)) = (u_k^\circ, 1).} \quad (79)$$

Dans la coordonnée de Mellin au point terminal $Y = k+1$, le support physique ancien $(-a_k, a_k)$ est l'intervalle

$$\left(\sqrt{\frac{k+1}{k}}, \sqrt{k(k+1)} \right),$$

et les deux morceaux du collier physique ajouté sont

$$\left(1, \sqrt{\frac{k+1}{k}} \right) \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{k(k+1)}, k+1 \right).$$

De plus, si

$$(U_k g)(r) := e_k(r)g(\phi_k(r)) = \mathcal{W}_k^* g(r),$$

alors U_k préserve la décomposition correspondante ancien/nouveau :

$$\boxed{U_k = U_k^{\text{old}} \oplus U_k^{\text{new}}.} \quad (80)$$

Enfin

$$\boxed{q_k = \nu_k U_k \mathbf{1}, \quad \nu_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}.} \quad (81)$$

Ainsi l'emboîtement physique, le routage arithmétique de Möbius et le vrai sol polaire sont entrelacés par un unique unitaire exact plutôt qu'identifiés a posteriori.

Proof. L'identité $r_k^\circ + u_k^\circ = 1$ est immédiate. Comme ϕ_k est strictement croissante,

$$\phi_k(r_k^\circ) = \frac{(k+1)(\sqrt{k(k+1)} - k)}{\sqrt{k(k+1)}} = k+1 - \sqrt{k(k+1)} = u_k^\circ,$$

ce qui donne (79).

Au point terminal $Y = k+1$ la coordonnée de Mellin est $t = e^{y+a_{k+1}}$. Les anciens points terminaux physiques $y = \pm a_k$ se projettent donc sur

$$e^{a_{k+1}-a_k} = \sqrt{\frac{k+1}{k}}, \quad e^{a_{k+1}+a_k} = \sqrt{k(k+1)},$$

ce qui prouve la décomposition ancien/collier affichée. Sur la cellule arithmétique supérieure $t = k+r$ la réflexion $J_{k+1}(t) = (k+1)/t$ peut s'écrire

$$J_{k+1}(k+r) = 1 + \frac{1 - \phi_k(r)}{k}.$$

Ainsi (79) envoie la partie ancienne sur la partie ancienne et la partie nouveau collier sur la partie nouveau collier du côté réfléchi également. Comme $U_k = \mathcal{W}_k^*$ est la composition pondérée par cette même application, (80) s'ensuit. Enfin $U_k \mathbf{1} = e_k$ et $q_k = \nu_k e_k$, ce qui prouve (81). $\square$

Pour une famille de résidus $k_j = nm + j$, $j = 0, \dots, n-1$, soit

$$\mathcal{W} := \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{W}_{k_j}, \quad \mathbf{q} := (q_{k_0}, \dots, q_{k_{n-1}}).$$

Si $\mathcal{F}_n$ est la transformée de Fourier discrète unitaire sur $\mathbb{C}^n$, alors

$$(\mathcal{F}_n \otimes I) \mathcal{W} \mathbf{q} \in \mathbb{C}^n \otimes \text{span}\{\mathbf{1}\}. \quad (82)$$

Ainsi un caractère de Fourier non nul du vrai sol est un effet d'indice de résidu ; ce n'est pas, en soi, une fuite dans l'espace des profils de moyenne nulle.

Lemme 6.9 (Covariance de jauge locale aux arêtes). *Soit $R_e : H_e^s \rightarrow H_e^t$ une vraie translation affine source/cible et soient e_e^s, e_e^t ses vecteurs de sol normalisés, de sorte que $R_e e_e^s = e_e^t$. Choisissons des unitaires W_e^s, W_e^t des fibres source et cible vers une copie de référence de $L^2(0,1)$ avec*

$$W_e^s e_e^s = \mathbf{1}, \quad W_e^t e_e^t = \mathbf{1}.$$

Alors

$$\tilde{R}_e := W_e^t R_e (W_e^s)^*$$

est unitaire et préserve la ligne constante. Par conséquent, pour tous $a_e, L_e > 0$ et tous $x \in H_e^s$, $y \in H_e^t$,

$$2a_e |\langle R_e x, y \rangle| \leq L_e \|x\|^2 + \frac{a_e^2}{L_e} \|y\|^2 \quad (83)$$

si et seulement si la même inégalité tient après les jauges locales aux arêtes.

Proof. L'identité $\tilde{R}_e \mathbf{1} = \mathbf{1}$ découle des trois relations de définition. L'unitarité donne

$$|\langle R_e x, y \rangle| = |\langle \tilde{R}_e W_e^s x, W_e^t y \rangle|, \quad \|W_e^s x\| = \|x\|, \quad \|W_e^t y\| = \|y\|.$$

Ainsi Young pondéré est inchangé par la normalisation locale à la branche. $\square$

Énoncé d’audit 6.10 (Ce que la covariance locale aux arêtes ne prouve pas). Le Lemme 6.9 supprime toute obstruction de domaine sur une arête affine individuelle, mais il ne produit pas à lui seul une unique conjugaison unitaire globale de tout le réseau de résidus. Différentes arêtes incidentes à la même cellule utilisent généralement des jauges différentes. Par conséquent une preuve de la vraie perte enracinée exige encore une allocation compatible de l’énergie partagée de sommet/collier sur toutes les arêtes incidentes, ou une estimation directe équivalente sur l’opérateur complet. En particulier, sommer (83) arête par arête n’est pas autorisé à réutiliser plusieurs fois la même réserve positive de collier. La construction CMC à cible fixe ci-dessous fournit la compatibilité au niveau source, et `sec:harmonic-graph-lock` achève l’argument en restreignant la forme de coupe commune résultante au graphe harmonique exact de l’opérateur complet.

Énoncé d’audit 6.11 (Limite de compatibilité de la normalisation adaptée à la racine). L’équation (82) est un énoncé géométrique exact, mais elle n’identifie pas la capacité affine déjà certifiée avec la vraie perte de Schur enracinée. La transformée de Fourier exacte sur les résidus utilisée dans le routage est ponctuelle en un paramètre original commun r . En revanche, les applications adaptées à la racine dépendent de la branche :

$$r_{k_j}(u) = \frac{k_j u}{k_j + 1 - u}.$$

Ainsi, pour k_i, k_j distincts, l’application de somme directe $\mathcal{W}$ ne commute pas avec la transformée de Fourier ponctuelle originale sur les résidus. Conjuguer le réseau affine exact par $\mathcal{W}$ change donc ses opérateurs de profil, et une estimation opératorielle supplémentaire serait nécessaire pour transporter le même budget ρ_{aff} à travers cette jauge. En particulier, (82) ne doit pas être utilisée seule pour déduire une borne de la forme

$$\frac{2}{\delta_k} |\langle \eta_k, f \rangle|^2 \leq \delta_* \rho_{\text{aff}} \mathcal{E}_H[f].$$

La compatibilité manquante est résolue dans `sec:harmonic-graph-lock` en restreignant la forme complète déjà transportée au graphe A_k -harmonique exact de l’opérateur complet. La normalisation mobile de la racine n’entre alors que par l’identité prouvée de Sherman–Morrison $\eta_k = \delta_k \zeta_k$; aucune conjugaison globale dépendant de la branche n’est requise.

6.6 Normalisation à résidu commun : suppression de l’obstruction Fourier/jauge

Les applications dépendantes de la branche $\mathcal{W}_k$ sont utiles pour la géométrie locale mais ne sont pas nécessaires pour la transformée globale sur les résidus. Il existe une normalisation plus simple qui reste dans la coordonnée de résidu commune originale et commute donc exactement avec la transformée de Fourier discrète.

Lemme 6.12 (Unitaire exact de cellule commune et vrai profil de sol). *Pour tout entier $k \geq 1$ définissons*

$$\mathcal{V}_k : L^2((k, k+1), dt/t) \longrightarrow L^2((0, 1), dr), \quad (\mathcal{V}_k F)(r) := \frac{F(k+r)}{\sqrt{k+r}}.$$

Alors $\mathcal{V}_k$ est unitaire. Si $q_Y(t) = t^{-1/2}$ est le profil de sol de Mellin du Lemme 6.4, alors sur la k -ième cellule

$$\boxed{\mathcal{V}_k q_Y = q_k, \quad q_k(r) = \frac{1}{k+r}.} \quad (84)$$

Proof. Directement,

$$\|\mathcal{V}_k F\|_2^2 = \int_0^1 \frac{|F(k+r)|^2}{k+r} dr = \int_k^{k+1} |F(t)|^2 \frac{dt}{t}.$$

De plus $(\mathcal{V}_k q_Y)(r) = (k+r)^{-1}$. □

Soit P_1 la projection orthogonale sur le profil constant $\mathbf{1} \in L^2(0, 1)$ et posons $Q_1 = I - P_1$. Ainsi

$$P_1 f = \left(\int_0^1 f(r) dr \right) \mathbf{1}.$$

Lemme 6.13 (Décomposition moyenne/moyenne nulle compatible avec la DFT). *Pour tout $k \geq 1$,*

$$P_1 q_k = w_k \mathbf{1}, \quad w_k = \log \left(1 + \frac{1}{k} \right), \quad (85)$$

$$\|q_k\|_2^2 = \frac{1}{k(k+1)}, \quad \|Q_1 q_k\|_2^2 = \frac{1}{k(k+1)} - w_k^2. \quad (86)$$

Si $\mathcal{F}_n$ est la DFT unitaire sur les résidus, alors sur $\mathbb{C}^n \otimes L^2(0, 1)$

$$\boxed{(\mathcal{F}_n \otimes I)(I \otimes P_1) = (I \otimes P_1)(\mathcal{F}_n \otimes I),} \quad (87)$$

et la même identité tient avec Q_1 à la place de P_1 . De plus

$$\|Q_1 q_k\|_2^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \|q'_k\|_2^2 \leq \frac{1}{\pi^2 k^4}. \quad (88)$$

Par conséquent la fuite relative de profil

$$\varepsilon_k := \frac{\|Q_1 q_k\|_2^2}{\|q_k\|_2^2} = 1 - k(k+1) \log^2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \quad (89)$$

satisfait, pour tout $k \geq 4$,

$$\boxed{\varepsilon_k \leq \frac{k+1}{\pi^2 k^3} \leq \frac{5}{64\pi^2} < 0.007916 < 1 - q_{\text{aff}}.} \quad (90)$$

Proof. Les deux premières identités découlent par intégration directe :

$$\int_0^1 \frac{dr}{k+r} = w_k, \quad \int_0^1 \frac{dr}{(k+r)^2} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

L'orthogonalité de P_1 et Q_1 donne (86). L'équation (87) est une identité de facteur tensoriel : $\mathcal{F}_n$ agit seulement sur l'indice de résidu tandis que P_1 et Q_1 agissent seulement sur la variable de profil commune r .

L'inégalité de Poincaré–Neumann sharp sur $(0, 1)$ donne $\|Q_1 q_k\|_2^2 \leq \pi^{-2} \|q'_k\|_2^2$, et $|q'_k(r)| = (k+r)^{-2} \leq k^{-2}$, ce qui prouve (88). La division par $\|q_k\|_2^2 = 1/[k(k+1)]$ donne

$$\varepsilon_k \leq \frac{k+1}{\pi^2 k^3}.$$

Le membre de droite décroît pour $k \geq 1$; en $k = 4$ il vaut $5/(64\pi^2) < 0.007916$. Enfin $1 - q_{\text{aff}} > 0.0115784675465848567$ par (54). $\square$

Corollaire 6.14 (Décomposition de sol compatible avec la DFT par famille). *À l'intérieur de chaque famille de résidus fixée, le sol polaire exact peut être décomposé en ses parties de profil constante et de moyenne nulle avant la DFT sur les résidus, et la même décomposition survit à la DFT inchangée. Aucune reparamétrisation dépendante de la branche n'est requise pour cet énoncé par famille.*

Énoncé d'audit 6.15 (Portée de la décomposition à résidu commun). L'équation (90) est une véritable réserve quantitative, mais c'est un énoncé cellule par cellule/de profil. Elle ne borne pas le réseau ambiant complet parce que des branches distinctes de puissances de nombres premiers incidentes à une cible commune proviennent d'intervalles sources différents. Aucune allocation ambiante globale n'est déduite de cette estimation.

6.7 Structure ambiante croisée en n

L'identité exacte en cellules unitaires de l'espace complet doit être conservée avant toute agrégation de profil. Fixons une cellule cible $C_k = [k, k+1)$. Pour chaque puissance de nombre premier active n , écrivons

$$m_n = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor, \quad j_n = k - nm_n.$$

L'intervalle source correspondant est

$$I_{k,n} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right) = C_{m_n, n, j_n}, \quad (91)$$

et l'unitaire de branche envoie $F|_{I_{k,n}}$ sur la fonction $s \mapsto F(s/n)$ sur C_k .

Par conséquent le vrai opérateur de collision cible est

$$(T_k F)(s) = \sum_{n \in \mathcal{N}_k} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} F(s/n), \quad s \in C_k, \quad (92)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \|T_k F\|_{L^2(C_k, ds/s)}^2 &= \sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n} \int_k^{k+1} |F(s/n)|^2 \frac{ds}{s} \\ &\quad + 2 \sum_{n < n'} \frac{\Lambda(n)\Lambda(n')}{\sqrt{nn'}} \operatorname{Re} \int_k^{k+1} F(s/n) \overline{F(s/n')} \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (93)$$

Les termes mixtes de (93) sont de véritables corrélations ambiantes croisées entre intervalles sources différents.

L'agrégation par $d = n \lfloor k/n \rfloor$ n'est pas une identité ambiante. Par exemple, à $k = 841$ les valeurs $n \in \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ satisfont toutes $n \lfloor 841/n \rfloor = 840$, mais leurs vrais intervalles sources sont respectivement

$$\begin{aligned} [420.5, 421), \quad [280 + \frac{1}{3}, 280 + \frac{2}{3}), \quad [210.25, 210.5), \\ [168.2, 168.4), \quad [120 + \frac{1}{7}, 120 + \frac{2}{7}), \quad [105.125, 105.25). \end{aligned}$$

Choisir F supportée dans le premier de ces intervalles fait s'annuler tous les termes mixtes impliquant $n = 2$, tandis que le carré d'une masse de Mangoldt agrégée les retiendrait. Donc les deux formes quadratiques ne peuvent coïncider sur l'espace ambiant complet.

6.8 Jauge à cible fixe et court-circuit simultané des sources

L'obstruction ambiante croisée en n ci-dessus est un énoncé sur la tentative d'identifier tous les intervalles sources avec un unique profil global avant que la cible ne soit fixée. Pour une cellule cible fixée il existe cependant une jauge canonique par branche qui utilise la même coordonnée cible pour chaque source incidente et ne mélange donc pas les espaces de sol et transverse de la cible.

Lemme 6.16 (Jauge de branche à cible fixe). *Fixons une cellule cible C_k et soit*

$$R_n : H_{k,n}^s \longrightarrow H_k^t$$

l'unitaire de branche vrai de l'intervalle source $I_{k,n}$ vers la cible. Soit $e_t \in H_k^t$ son sol cible normalisé et soit $e_n^s \in H_{k,n}^s$ le sol source normalisé, de sorte que $R_n e_n^s = e_t$. Choisissons un unitaire $W_t : H_k^t \rightarrow L^2(0, 1)$ satisfaisant $W_t e_t = \mathbf{1}$ et définissons

$$W_n^s := W_t R_n.$$

Alors, simultanément pour chaque branche incidente à C_k ,

$$\boxed{W_t R_n (W_n^s)^* = I.} \quad (94)$$

Si $P = |\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{1}|$ et $Q = I - P$, alors

$$Q W_t R_n (W_n^s)^* P = 0, \quad P W_t R_n (W_n^s)^* Q = 0. \quad (95)$$

Proof. La définition donne $W_t R_n(W_n^s)^* = W_t R_n R_n^* W_t^* = I$ sur la copie cible. L'équation (95) est alors immédiate. Le même W_t est utilisé pour toutes les branches incidentes ; seules les jauges sources varient. $\square$

L'intérêt du Lemme 6.16 est limité mais exact : la nouvelle étoile affine ne crée pas de terme de mélange sol/transverse supplémentaire dans la jauge à cible fixe. Il n'identifie pas le pivot de sol post-court-circuit avec un scalaire de Carleman ; cette question est gardée séparée ci-dessous.

Nous prouvons maintenant l'estimation de capacité simultanée nécessaire sur les vrais emplacements sources. Rappelons la forme normalisée de bord/collier d'une cellule $\mathfrak{b}$ de (49).

Lemme 6.17 (Interaction de moyenne nulle à deux sources). *Soit $D \geq 1$ et soient $f, g \in L^2(0, 1)$ satisfaisant $\int_0^1 f = \int_0^1 g = 0$. Posons*

$$E_D(f, g) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(s) - g(t)|^2}{D + t - s} ds dt, \quad c_D := \log \frac{D+1}{D}.$$

Alors

$$\boxed{E_D(f, g) \geq c_D(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2)}. \quad (96)$$

Proof. Il suffit d'abord de prendre $D > 1$; l'extrémité $D = 1$ suit par convergence monotone. Utilisons

$$\frac{1}{D + t - s} = \int_0^\infty e^{-Du} e^{us} e^{-ut} du.$$

Posons

$$a(u) = \frac{1 - e^{-u}}{u}, \quad b(u) = \frac{e^u - 1}{u}, \quad p(u) = b(u) - 1, \quad q(u) = a(u) - e^{-u}.$$

Pour $u > 0$ les quatre quantités sont non négatives et $p(u)q(u) \leq a(u)b(u)$. Comme les deux fonctions sont de moyenne nulle, définissons

$$F_u = \int_0^1 f(s)(e^{us} - 1) ds, \quad G_u = \int_0^1 g(t)(e^{-ut} - e^{-u}) dt.$$

Cauchy-Schwarz pondéré donne

$$\begin{aligned} |F_u|^2 &\leq p(u) \int_0^1 |f(s)|^2 (e^{us} - 1) ds, \\ |G_u|^2 &\leq q(u) \int_0^1 |g(t)|^2 (e^{-ut} - e^{-u}) dt. \end{aligned}$$

Par suite, par $p(u)q(u) \leq a(u)b(u)$ et l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned} 2|F_u G_u| &\leq a(u) \int_0^1 |f(s)|^2 (e^{us} - 1) ds \\ &\quad + b(u) \int_0^1 |g(t)|^2 (e^{-ut} - e^{-u}) dt. \end{aligned} \quad (97)$$

Maintenant

$$c_D = \int_0^\infty e^{-Du} a(u) du = \int_0^\infty e^{-Du} e^{-u} b(u) du.$$

Les deux termes du membre de droite de (97), après multiplication par e^{-Du} et intégration en u , sont exactement les excès des deux poids diagonaux du noyau au-dessus de c_D . Le terme de noyau mixte est

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(s)\overline{g(t)}}{D + t - s} ds dt = \int_0^\infty e^{-Du} F_u \overline{G_u} du.$$

Ainsi les excès diagonaux dominent deux fois la valeur absolue du terme mixte, ce qui est précisément (96). $\square$

Certificat analytique 6.18 (Capacité de moyenne parent/source). Soit $D \geq 1$ et soient $f, g \in L^2(0, 1)$ arbitraires. Définissons

$$\bar{f} := \int_0^1 f(s) ds, \quad \bar{g} := \int_0^1 g(t) dt, \quad f_0 := f - \bar{f}, \quad g_0 := g - \bar{g}.$$

Pour

$$E_D(f, g) := \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(s) - g(t)|^2}{D + t - s} ds dt$$

on a la borne inférieure inconditionnelle

$$\boxed{E_D(f, g) \geq \frac{\|f_0\|_2^2 + \|g_0\|_2^2 + |\bar{f} - \bar{g}|^2}{D + 1}}. \quad (\text{PMC-2})$$

En particulier la forme de différence de Cauchy fournit un coût strictement positif pour des moyennes sources inégales, modulo la direction constante commune.

Proof. Pour $0 \leq s, t \leq 1$ et $D \geq 1$,

$$0 < D + t - s \leq D + 1 \quad \text{p.p.}, \quad \frac{1}{D + t - s} \geq \frac{1}{D + 1}.$$

(La singularité de bord unique en $D = 1$ est inoffensive et l'inégalité tient par approximation monotone.) Donc

$$E_D(f, g) \geq \frac{1}{D + 1} \int_0^1 \int_0^1 |f(s) - g(t)|^2 ds dt.$$

Comme f_0 et g_0 sont de moyenne nulle, les termes croisés avec les constantes s'annulent et

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(s) - g(t)|^2 ds dt = \|f_0\|_2^2 + \|g_0\|_2^2 + |\bar{f} - \bar{g}|^2.$$

Ceci prouve (PMC-2). □

Corollaire 6.19 (Laplacien pondéré sur les moyennes sources). Soient $I_1, \dots, I_M$ des emplacements sources deux à deux disjoints d'une longueur logarithmique commune $\varepsilon > 0$, ordonnés de gauche à droite, et normalisons chaque emplacement à $(0, 1)$. Pour $\nu < \mu$ posons

$$D_{\nu\mu} := \frac{a_\mu - a_\nu}{\varepsilon} \geq 1, \quad \omega_{\nu\mu} := \frac{1}{2(D_{\nu\mu} + 1)}.$$

Si a_ν désigne la moyenne normalisée du profil sur le ν -ième emplacement et si L_{PMC} est le laplacien complet du graphe pondéré avec poids d'arête $\omega_{\nu\mu}$, alors l'énergie de différence de Cauchy source-source obéit à

$$\boxed{\mathfrak{H}_{\text{means}} \geq \sum_{\nu < \mu} \omega_{\nu\mu} |a_\nu - a_\mu|^2 = \langle a, L_{\text{PMC}} a \rangle}. \quad (\text{PMC})$$

Tous les poids sont positifs, donc $\ker L_{\text{PMC}} = \text{span}\{(1, \dots, 1)\}$.

Proof. Remettons à l'échelle chaque emplacement source par sa longueur logarithmique commune. La partie source-source de la forme de différence de Cauchy transportée est la moitié de la somme des énergies de paires $E_{D_{\nu\mu}}$. Appliquons le Certificat 6.18 à chaque paire et retenons seulement le terme de différence de moyennes. La sommation donne (PMC). Le graphe est complet avec des poids d'arête strictement positifs, donc sa seule direction nulle est le vecteur constant commun. □

Théorème 6.20 (Capacité cohérente multi-sources). Soient

$$I_\nu = (a_\nu, a_\nu + \varepsilon) \subseteq (0, 1), \quad \nu = 1, \dots, M,$$

des intervalles deux à deux disjoints d'une longueur commune $\varepsilon > 0$. Pour chaque ν soit $f_\nu \in L^2(I_\nu)$ satisfaisant $\int_{I_\nu} f_\nu = 0$. Si u est une extension commune quelconque satisfaisant $u|_{I_\nu} = f_\nu$ pour chaque ν , alors

$$\mathfrak{b}[u] \geq \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \sum_{\nu=1}^M \|f_\nu\|_2^2. \quad (98)$$

Par conséquent, avec $S = \bigcup_\nu I_\nu$,

$$\text{Short}_S \mathfrak{b} \succeq \left(\log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \bigoplus_{\nu=1}^M Q_{I_\nu}. \quad (99)$$

Ici le court-circuit est l'infimum variationnel sur un complément commun $L^2((0, 1) \setminus S)$.

Proof. Ordonnons les intervalles de gauche à droite. Sur un intervalle source unique I_ν , $|x - y| \leq \varepsilon$ et l'identité de moyenne nulle donnent

$$\frac{1}{4} \iint_{I_\nu^2} \frac{|f_\nu(x) - f_\nu(y)|^2}{|x - y|} dx dy \geq \frac{1}{2} \|f_\nu\|_2^2.$$

Pour un point libre $y < a_\nu$,

$$\int_{I_\nu} |f_\nu(x) - u(y)|^2 dx = \|f_\nu\|_2^2 + \varepsilon |u(y)|^2 \geq \|f_\nu\|_2^2,$$

et $|x - y| \leq a_\nu + \varepsilon - y$. Par suite la contribution source-libre venant de la gauche est bornée inférieurement par

$$\frac{1}{2} \|f_\nu\|_2^2 \int \frac{dy}{a_\nu + \varepsilon - y},$$

où l'intégrale porte sur la partie libre à gauche. La borne droite analogue est

$$\frac{1}{2} \|f_\nu\|_2^2 \int \frac{dy}{y - a_\nu}.$$

Si un intervalle du complément est occupé par un autre emplacement source, la contribution manquante est fournie par le Lemme 6.17. En effet, pour I_μ à droite de I_ν , en remettant à l'échelle les deux emplacements par ε on obtient

$$\frac{1}{2} \iint_{I_\nu \times I_\mu} \frac{|f_\nu(x) - f_\mu(y)|^2}{y - x} dx dy \geq \frac{1}{2} c_{\nu\mu} (\|f_\nu\|_2^2 + \|f_\mu\|_2^2),$$

où

$$c_{\nu\mu} = \log \frac{a_\mu + \varepsilon - a_\nu}{a_\mu - a_\nu}.$$

C'est exactement l'intégrale de la charge de noyau à une source précédente sur l'intervalle source manquant, de chaque côté. Par conséquent les morceaux libres et toutes les paires source-source reconstruisent, pour chaque ν , la charge complète du complément

$$\frac{1}{2} \left[\log \frac{a_\nu + \varepsilon}{\varepsilon} + \log \frac{1 - a_\nu}{\varepsilon} \right] \|f_\nu\|_2^2. \quad (100)$$

Le potentiel d'extrémité sur I_ν satisfait

$$x(1 - x) \leq (a_\nu + \varepsilon)(1 - a_\nu),$$

et donc

$$-\frac{1}{2} \int_{I_\nu} \log(x(1 - x)) |f_\nu(x)|^2 dx \geq -\frac{1}{2} \log((a_\nu + \varepsilon)(1 - a_\nu)) \|f_\nu\|_2^2. \quad (101)$$

En ajoutant (6.8)–(101) on annule tout facteur dépendant de a_ν et on obtient

$$\left(\log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right) \|f_\nu\|_2^2.$$

L'énergie harmonique sur la région libre-libre restante et le potentiel d'extrémité y sont non négatifs, donc ils peuvent être rejetés. En sommant sur ν on prouve (98). Comme l'estimation tient pour toute extension commune, prendre l'infimum sur le complément commun donne (99). $\square$

6.9 Application aux vrais intervalles sources

Écrivons

$$w_j = \log \left(1 + \frac{1}{j} \right), \quad m_n = \left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor.$$

À l'intérieur d'une cellule parente fixée $C_m = [m, m+1)$ utilisons la coordonnée logarithmique $\xi = \log(t/m)$ et normalisons par $x = \xi/w_m$. Chaque vrai intervalle source $I_{k,n} \subset C_m$ a alors une longueur normalisée

$$\varepsilon_{k,m} = \frac{w_k}{w_m}. \quad (102)$$

Pour n distincts les intervalles $I_{k,n}$ sont disjoints. Par conséquent le Théorème 6.20 donne, simultanément sur chaque cellule parente,

$$\text{Short}_{\{I_{k,n}: m_n=m\}} \mathbf{b}_m \succeq \bigoplus_{m_n=m} L_{k,n} Q_{k,n}, \quad L_{k,n} = \frac{1}{2} + \log \frac{w_m}{w_k}. \quad (103)$$

C'est un véritable énoncé au niveau source : aucun intervalle source n'est identifié et aucun minimiseur n'est réutilisé.

Corollaire 6.21 (Borne transverse de Feshbach résolue en source). *Dans la jauge à cible fixe du Lemme 6.16, soit $q \in QH_k^t$. Le vecteur source engendré par les branches actives est*

$$b_{k,n}(q) = \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} R_n^* q.$$

Alors le court-circuit simultané des sources satisfait

$$\mathcal{L}_k^\perp[q] \leq \sum_n \frac{\Lambda(n)^2}{n L_{k,n}} \|q\|^2 = \sigma_k \|q\|^2. \quad (104)$$

Par conséquent le bloc direct-transverse de Schur obéit à

$$D_k \succeq (\mathfrak{B}_k - \sigma_k) Q \succ \frac{1}{2} Q. \quad (105)$$

Proof. Sous les jauges à cible fixe chaque R_n est l'identité sur le profil cible commun et préserve $P \oplus Q$. L'équation (103) donne une borne inférieure diagonale par blocs pour la métrique source simultanée. L'inversion de l'ordre sous inversion donne donc, cellule parente par cellule parente,

$$\langle b_m, (\mathfrak{C}_{k,m}^{\text{short}})^{-1} b_m \rangle \leq \sum_{m_n=m} \frac{\Lambda(n)^2}{n L_{k,n}} \|q\|^2.$$

En sommant sur les cellules parentes orthogonales on prouve (104). La réserve de Feshbach (45) donne $\mathfrak{B}_k - \sigma_k > 1/2$, ce qui prouve (105). $\square$

Énoncé d'audit 6.22 (Ce que CMC ferme, et ce qu'il ne ferme pas). Le Théorème 6.20 et le Corollaire 6.21 ferment l'écart de simultanité dans la vraie perte de Schur *transverse* résolue en source. Ils n'identifient pas le coefficient scalaire de sol du bloc de Schur exact post-ancien-noyau. En particulier, les quantités OSPR

$$\alpha_* = 2 \log 2, \quad r = QK\mathbf{1}, \quad d_* = \frac{\|r\|^2}{\alpha_*}$$

appartiennent au bloc de Carleman normalisé pré-court-circuit. Elles ne peuvent pas être insérées comme α_k, r_k dans la matrice post-court-circuit de l'opérateur complet sans une identité indépendante. Le vrai pivot de sol n'est pas obtenu à partir de (105) seul. Dans `sec:green-root-reduction` le contenu restant de sol/racine est réduit exactement aux scalaires de Schur Π_k, δ_k^Q et à l'unique coefficient de Green G_k .

6.10 Critère terminal polaire-cyclique fini du vrai noyau

À un point terminal arithmétique N , soit C_N le noyau impair exact sans pôle dans l'opérateur localisé, de sorte que

$$A_{N,-} = C_N - 2|s_N\rangle\langle s_N|. \quad (106)$$

Aucun bloc de Gram affine n'est extrait avant cette étape.

Lemme 6.23 (Critère de Schur fini du vrai noyau). *Soit P une projection orthogonale de rang fini satisfaisant $Ps_N = s_N$ et posons $Q = I - P$. Supposons*

$$QC_NQ \succeq \lambda_N Q, \quad \lambda_N > 0. \quad (107)$$

Si

$$PC_NP - 2|s_N\rangle\langle s_N| - \lambda_N^{-1}PC_NQC_NP \succeq 0, \quad (108)$$

alors $A_{N,-} \succeq 0$.

Proof. Le bloc Q de $A_{N,-}$ vaut QC_NQ parce que $Qs_N = 0$. Son complément de Schur sur $P\mathcal{H}_N$ est

$$PC_NP - 2|s_N\rangle\langle s_N| - PC_NQ(QC_NQ)^{-1}QC_NP.$$

La borne de queue donne $(QC_NQ)^{-1} \preceq \lambda_N^{-1}Q$, donc (108) est une borne inférieure du complément de Schur exact. $\square$

Soit $v_0 = s_N/\|s_N\|$ et exécutons le Lanczos exact pour le vrai noyau C_N :

$$C_N v_j = \beta_{j-1}^{(C)} v_{j-1} + \alpha_j^{(C)} v_j + \beta_j^{(C)} v_{j+1}, \quad \beta_j^{(C)} \geq 0.$$

Soit P_r la projection sur $\text{span}\{v_0, \dots, v_{r-1}\}$, $Q_r = I - P_r$, et soit $J_{N,r}^{(C)} = P_r C_N P_r$ dans cette base. Alors

$$Q_r C_N P_r = \beta_{r-1}^{(C)} |v_r\rangle\langle v_{r-1}|. \quad (109)$$

Corollaire 6.24 (Critère Krylov–Radau terminal du vrai noyau). *Supposons que pour chaque point terminal N dans une suite arithmétique cofinale non bornée il existe $r = r(N)$ et $\lambda_{N,r} > 0$ tels que*

$$Q_r C_N Q_r \succeq \lambda_{N,r} Q_r \quad (110)$$

et

$$J_{N,r}^{(C)} - 2\|s_N\|^2 e_1 e_1^* - \frac{(\beta_{r-1}^{(C)})^2}{\lambda_{N,r}} e_r e_r^* \succeq 0. \quad (111)$$

Alors $A_{N,-} \succeq 0$ sur cette suite cofinale et par conséquent $A_{a,-} \succeq 0$ pour tout a fini.

Proof. L'équation (109) transforme (108) en (111). Appliquons le Lemme 6.23 puis la compression exacte par extension par zéro. $\square$

Remarque 6.25 (Mécanisme de queue déjà prouvé). Pour une queue de partition constituée de fonctions de moyenne nulle sur chaque atome, la forme de différence harmonique satisfait la borne de Poincaré exacte $\mathcal{H}[f] \geq \frac{1}{2}\|f\|^2$. Le noyau gamma régulier obéit à $\sup_{t \geq 0} |\rho'(t)| < 1.745$, ce qui donne $|\langle f, K_{\gamma,A} f \rangle| < 3.49A^2 h \|f\|^2$ pour une longueur d'atome maximale h . Si l'espace grossier fini contient les constantes de partition et le vrai vecteur polaire, le terme polaire de rang un s'annule exactement sur cette queue pure. Ces estimations fournissent un mécanisme analytique pour établir la borne de queue du vrai noyau (110) ; elles ne certifient pas à elles seules la matrice finie (111) uniformément en N .

Pour les estimations locales ultérieures, la masse polaire d'un collier physique peut aussi être calculée exactement. Si $t_{a,h}$ désigne la restriction de s^{ph} à $(a, a+h) \cup (-a-h, -a)$, alors

$$\|t_{a,h}\|^2 = \sinh(a+h) - \sinh a - h = h(\cosh a - 1) + O_a(h^2). \quad (112)$$

6.11 Une identité résiduelle de l'opérateur complet

L'identité suivante isole la vraie quantité qui doit être contrôlée dans un collier mince. Définissons le couplage ancien–nouveau de l'opérateur localisé *complet* par

$$B_{A,k} := B_k - 2s_k t_k^*. \quad (113)$$

Lemme 6.26 (Résidu de racine de Sherman–Morrison). *Supposons $A_k \succ 0$. Alors*

$$C_k^{-1} s_k = \delta_k A_k^{-1} s_k, \quad \langle s_k, A_k^{-1} s_k \rangle = \frac{1 - \delta_k}{2\delta_k}, \quad (114)$$

et, avec

$$\zeta_k := t_k - B_{A,k}^* A_k^{-1} s_k, \quad (115)$$

on a la factorisation exacte

$$\boxed{\eta_k = \delta_k \zeta_k.} \quad (116)$$

Par conséquent

$$\boxed{\ell_k = 2\delta_k \langle \zeta_k, S_k^{-1} \zeta_k \rangle.} \quad (117)$$

Proof. De $A_k = C_k - 2|s_k\rangle\langle s_k|$,

$$A_k C_k^{-1} s_k = (1 - 2\langle s_k, C_k^{-1} s_k \rangle) s_k = \delta_k s_k,$$

ce qui prouve la première identité de (114) ; la seconde suit en prenant le produit scalaire avec s_k . Comme $B_{A,k}^* = B_k^* - 2t_k s_k^*$,

$$\begin{aligned} t_k - B_{A,k}^* A_k^{-1} s_k &= t_k - \delta_k^{-1} B_k^* C_k^{-1} s_k + \delta_k^{-1} (1 - \delta_k) t_k \\ &= \delta_k^{-1} (t_k - B_k^* C_k^{-1} s_k) = \delta_k^{-1} \eta_k. \end{aligned}$$

Ceci donne (116) ; en le substituant dans (68) on obtient (117). $\square$

6.12 Cadre de certificat aux points terminaux

La construction Krylov–Radau du vrai noyau ci-dessus fournit un critère terminal indépendant de dimension finie. L'argument du graphe harmonique ci-dessous fournit la voie utilisée pour le théorème principal.

6.13 Fermeture par graphe harmonique du vrai pivot enraciné

Nous effectuons maintenant le court-circuit final sans remplacer le vrai vecteur polaire par un substitut de profil. Tout au long de cette sous-section les points terminaux arithmétiques sont

$$a_k = \frac{1}{2} \log k, \quad k \geq 7,$$

et la décomposition physique ancien/nouveau et la notation $C_k, B_k, D_k, S_k, \delta_k, \eta_k$ sont celles de (63)–(64). Nous utilisons aussi le couplage de l'opérateur complet $B_{A,k} = B_k - 2s_k t_k^*$ et le résidu exact ζ_k du Lemme 6.26.

Lemme 6.27 (Graphe harmonique exact de l'opérateur complet). *Supposons $A_k \succ 0$ et définissons*

$$H_k : \mathcal{K}_k \longrightarrow \mathcal{H}_{a_{k+1}}, \quad H_k f := \begin{pmatrix} -A_k^{-1} B_{A,k} f \\ f \end{pmatrix}. \quad (118)$$

Alors $H_k f$ est A_{k+1} -orthogonal au sous-espace physique ancien et

$$\boxed{H_k^* A_{k+1} H_k = T_k, \quad H_k^* s_{k+1} = \zeta_k.} \quad (119)$$

De plus,

$$\boxed{H_k^* C_{k+1} H_k = S_k + 2(1 - \delta_k) |\zeta_k\rangle \langle \zeta_k|}. \quad (120)$$

Par conséquent, pour tout $f \in \mathcal{K}_k$,

$$\langle s_{k+1}, H_k f \rangle = \langle \zeta_k, f \rangle, \quad (121)$$

$$\langle H_k f, C_{k+1} H_k f \rangle = \langle f, S_k f \rangle + 2(1 - \delta_k) |\langle \zeta_k, f \rangle|^2. \quad (122)$$

Proof. Par rapport à la décomposition ancien/collier,

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & B_{A,k} \\ B_{A,k}^* & D_k - 2|t_k\rangle \langle t_k| \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A_{k+1} H_k f = \begin{pmatrix} 0 \\ (D_k - 2|t_k\rangle \langle t_k| - B_{A,k}^* A_k^{-1} B_{A,k}) f \end{pmatrix}.$$

Le bloc inférieur est le complément de Schur de A_k dans A_{k+1} , qui est exactement le bloc de Schur enraciné T_k par le Lemme 6.1. Ceci prouve la première identité de (119). Comme $s_{k+1} = s_k \oplus t_k$,

$$H_k^* s_{k+1} = t_k - B_{A,k}^* A_k^{-1} s_k = \zeta_k,$$

ce qui prouve la seconde.

Enfin $C_{k+1} = A_{k+1} + 2|s_{k+1}\rangle \langle s_{k+1}|$, donc

$$H_k^* C_{k+1} H_k = T_k + 2|\zeta_k\rangle \langle \zeta_k|.$$

En utilisant $\eta_k = \delta_k \zeta_k$ du Lemme 6.26 dans $T_k = S_k - (2/\delta_k) |\eta_k\rangle \langle \eta_k|$ on obtient (120). Les identités scalaires (121)–(122) suivent immédiatement. $\square$

6.13.1 Annulation exacte du scalaire de sol replié post-court-circuit

Le dernier court-circuit scalaire peut être audité indépendamment de toute borne inférieure sur son pivot physique de sol. L'identité suivante est purement algébrique ; son rôle est de rendre explicite que le petit facteur de Schur apparaît dans le numérateur du forçage post-court-circuit aussi bien que dans le pivot lui-même.

Lemme 6.28 (Annulation scalaire exacte post-court-circuit). *Soient L_k et R_k les deux morceaux d'une coupe repliée à cible fixe après le transport terminal exact adapté à la racine. Soient $a_{k,-} > 0$ et $a_{k,+} > 0$ les coefficients de multiplication correspondants ; ici M_a désigne la multiplication par a . Posons*

$$I_k := \int_{L_k} \frac{du}{a_{k,-}(u)}, \quad J_k := \int_{R_k} \frac{du}{a_{k,+}(u)}. \quad (123)$$

Pour un scalaire β_k avec $1 - \beta_k I_k > 0$, définissons le bloc pré-court-circuit à un défaut

$$\mathcal{A}_k^{\text{pre}} := M_{a_{k,-}} \oplus M_{a_{k,+}} - \beta_k |\mathbf{1}_{L_k} \oplus \mathbf{1}_{R_k}\rangle \langle \mathbf{1}_{L_k} \oplus \mathbf{1}_{R_k}|, \quad (124)$$

et

$$\gamma_k^c := \frac{\beta_k}{1 - \beta_k I_k}, \quad \Delta_k := 1 - \beta_k (I_k + J_k). \quad (125)$$

Supposons que $x_k = x_{k,-} \oplus x_{k,+}$ soit un vecteur harmonique pré-court-circuit et $g_k = g_{k,-} \oplus g_{k,+} = \mathcal{A}_k^{\text{pre}} x_k$. Posons

$$\begin{aligned} \theta_{k,-} &:= \int_{L_k} x_{k,-}(u) du, & \theta_{k,+} &:= \int_{R_k} x_{k,+}(u) du, \\ \Theta_k &:= \theta_{k,-} + \theta_{k,+}, & m_{k,-} &:= \int_{L_k} \frac{g_{k,-}(u)}{a_{k,-}(u)} du, \\ & & m_{k,+} &:= \int_{R_k} \frac{g_{k,+}(u)}{a_{k,+}(u)} du. \end{aligned} \quad (126)$$

Alors la charge totale de sol pré-court-circuit est exactement divisible par le défaut global :

$$\boxed{M_k := m_{k,-} + m_{k,+} = \Delta_k \Theta_k.} \quad (127)$$

Après avoir court-circuité L_k , l'opérateur effectif de droite et le forçage sont

$$\mathcal{A}_k^{\text{cut}} = M_{a_{k,+}} - \gamma_k^c |\mathbf{1}_{R_k}\rangle \langle \mathbf{1}_{R_k}|, \quad h_k = g_{k,+} + \gamma_k^c m_{k,-} \mathbf{1}_{R_k}, \quad (128)$$

et satisfont les identités exactes

$$\boxed{h_k = \mathcal{A}_k^{\text{cut}} x_{k,+},} \quad (129)$$

$$\boxed{m_k := \int_{R_k} \frac{h_k(u)}{a_{k,+}(u)} du = (1 - \gamma_k^c J_k) \theta_{k,+} = \frac{\Delta_k}{1 - \beta_k I_k} \theta_{k,+}.} \quad (130)$$

Si la coordonnée de sol physique normalisée est

$$\hat{h}_{0,k} := \frac{\sqrt{|R_k|}}{J_k} m_k \quad (131)$$

et si le pivot scalaire physique de Schur correspondant est

$$\Pi_k^{\text{phys}} := |R_k| \left(\frac{1}{J_k} - \gamma_k^c \right) = \frac{|R_k|}{J_k} (1 - \gamma_k^c J_k), \quad (132)$$

alors, chaque fois que $\Pi_k^{\text{phys}} > 0$,

$$\boxed{\frac{|\hat{h}_{0,k}|^2}{\Pi_k^{\text{phys}}} = \frac{1 - \gamma_k^c J_k}{J_k} |\theta_{k,+}|^2 \leq (1 - \gamma_k^c J_k) \int_{R_k} a_{k,+}(u) |x_{k,+}(u)|^2 du.} \quad (133)$$

En un zéro limite de Π_k^{phys} , l'identité se prolonge par continuité : m_k et $\hat{h}_{0,k}$ portent le même facteur s'annulant.

Proof. De $g_k = \mathcal{A}_k^{\text{pre}} x_k$,

$$g_{k,-} = a_{k,-} x_{k,-} - \beta_k \Theta_k, \quad g_{k,+} = a_{k,+} x_{k,+} - \beta_k \Theta_k.$$

La division par les coefficients de multiplication et l'intégration donnent

$$m_{k,-} = \theta_{k,-} - \beta_k I_k \Theta_k, \quad m_{k,+} = \theta_{k,+} - \beta_k J_k \Theta_k,$$

et donc (127). Le complément de Schur du bloc gauche dans (124) est exactement $\mathcal{A}_k^{\text{cut}}$, et son forçage effectif est la seconde formule de (128). En substituant l'expression précédente de $m_{k,-}$ et en utilisant

$$\beta_k + \gamma_k^c \beta_k I_k = \gamma_k^c$$

on obtient (129). En intégrant (129) contre $a_{k,+}^{-1}$ on obtient la première égalité de (130). La seconde découle de

$$\boxed{1 - \gamma_k^c J_k = \frac{1 - \beta_k (I_k + J_k)}{1 - \beta_k I_k} = \frac{\Delta_k}{1 - \beta_k I_k}.} \quad (134)$$

Les équations (131)–(132) donnent maintenant la première identité de (133) ; l'inégalité est l'estimation de Cauchy–Schwarz pondérée

$$|\theta_{k,+}|^2 \leq J_k \int_{R_k} a_{k,+}(u) |x_{k,+}(u)|^2 du.$$

□

Corollaire 6.29 (FOLD-FORCING sur le graphe harmonique de l'opérateur complet). *Pour $F = H_k f$, l'hypothèse $g_k = \mathcal{A}_k^{\text{pre}} x_k$ du Lemme 6.28 est automatique après le transport de forme complète, la jauge à cible fixe et le repli de Möbius aux extrémités utilisés dans l'argument de coupe commune. Par conséquent aucune estimation de la forme $(\Pi_k^{\text{phys}})^{-1} \leq C$ n'est requise dans le canal scalaire routé.*

Proof. Par le Lemme 6.27, la composante physique ancienne de $A_{k+1} H_k f$ s'annule. La Proposition 5.3 transporte la forme quadratique complète et son forçage par congruence unitaire. Le Lemme 6.16 utilise une coordonnée cible pour toutes les sources incidentes, et le Lemme 6.8 montre que l'unitaire final adapté à la racine est diagonal par blocs pour la décomposition physique ancien/nouveau. Gelons les coordonnées transportées complémentaires et déplaçons leur contribution déjà fixée vers le membre de droite de l'équation de première ligne. Sur le canal de sol replié, l'opérateur gauche restant est précisément le bloc à un défaut $\mathcal{A}_k^{\text{pre}}$; par définition de ce forçage résiduel, l'équation de ligne est donc

$$g_k = \mathcal{A}_k^{\text{pre}} x_k.$$

C'est l'identité FOLD-FORCING. Le Lemme 6.28 montre alors que chaque occurrence du petit pivot physique est accompagnée d'un facteur supplémentaire dans le moment de sol post-court-circuit. $\square$

Lemme 6.30 (Rotation vraie de sol de la borne à un défaut). *Soit*

$$L_0 = -\delta_* P_e + \beta Q_e, \quad \delta_* = \log(\pi/2), \quad \beta = \log 2 + \frac{1}{2} - \log \pi,$$

de sorte que $\beta + \delta_ = 1/2$. Si v est un vecteur unitaire et*

$$\varepsilon = 1 - |\langle v, e \rangle|^2 < 2\beta,$$

alors

$$L_0 \succeq -\gamma(\varepsilon) P_v, \quad \gamma(\varepsilon) = \frac{\delta_* \beta}{\beta - \varepsilon/2}. \quad (135)$$

La constante est sharp sur $\text{span}\{e, v\}$.

Proof. Écrivons $v = \sqrt{1-\varepsilon} e + \sqrt{\varepsilon} u$, $u \perp e$. Sur $\text{span}\{e, u\}$ le déterminant de $L_0 + \gamma P_v$ est

$$-\delta_* \beta + \gamma(\beta - (\beta + \delta_*) \varepsilon) = -\delta_* \beta + \gamma(\beta - \varepsilon/2).$$

La valeur de (135) rend le déterminant nul ; la trace est positive, tandis que le complément orthogonal porte la valeur propre positive β . $\square$

Après remise à l'échelle d'une cellule affine logarithmique de longueur $w > 0$ à $(0, 1)$, le vrai sol polaire normalisé est

$$e_w(u) = \frac{e^{-wu/2}}{\left(\int_0^1 e^{-wu} du\right)^{1/2}}. \quad (136)$$

Son défaut exact par rapport à la ligne constante est

$$\varepsilon(w) := 1 - |\langle e_w, \mathbf{1} \rangle|^2 = 1 - \frac{4}{w} \tanh \frac{w}{4}. \quad (137)$$

La fonction $\varepsilon(w)$ est croissante pour $w > 0$. Comme $w_k = \log(1 + 1/k)$ décroît en k , pour tout $k \geq 7$

$$\varepsilon_k \leq \varepsilon_7 = 0.000371306002358632550916134716013 \dots, \quad (138)$$

$$\gamma_k \leq \gamma_7 = 0.453320935246934874180341358903 \dots \quad (139)$$

Conjointement avec (40) et (48),

$$d_* - \gamma_7 \rho_{\text{aff}} > 0.003835783224542657213199534889 \dots > 0, \quad (140)$$

et par conséquent

$$q_F := q_7^* := \frac{\gamma_7 \rho_{\text{aff}}}{d_*} < 0.992226159818910811861704782016 < 1. \quad (141)$$

Lemme 6.31 (Covariance du court-circuit sous un unitaire décomposé). *Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{old}} \oplus \mathcal{K}$, soit q une forme quadratique fermée semi-bornée sur $\mathcal{H}$, et soit $U = U_{\text{old}} \oplus U_{\text{new}}$ unitaire pour cette décomposition. Alors*

$$\boxed{\text{Short}_{\mathcal{H}_{\text{old}}}(q \circ U) = (\text{Short}_{\mathcal{H}_{\text{old}}} q) \circ U_{\text{new}}.} \quad (142)$$

De façon équivalente, au niveau opératoire, chaque fois que les compléments de Schur correspondants sont définis,

$$\text{Short}_{\text{old}}(U^*QU) = U_{\text{new}}^*(\text{Short}_{\text{old}} Q)U_{\text{new}}.$$

Proof. Pour $y \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} (\text{Short}_{\text{old}}(q \circ U))[y] &= \inf_{x \in \mathcal{H}_{\text{old}}} q[U_{\text{old}}x \oplus U_{\text{new}}y] \\ &= \inf_{x' \in \mathcal{H}_{\text{old}}} q[x' \oplus U_{\text{new}}y] = (\text{Short}_{\text{old}} q)[U_{\text{new}}y], \end{aligned}$$

où la surjectivité de U_{old} a été utilisée dans la seconde égalité. $\square$

Corollaire 6.32 (Entrelacement exact des court-circuits physique/arithmétique). *À l'étape arithmétique $k \rightarrow k+1$, l'unitaire de Möbius adapté à la racine du Lemme 6.8 peut être appliqué avant ou après le vrai court-circuit physique ancien avec exactement le même résultat sur le nouveau collier.*

Proof. Le Lemme 6.8 donne $U_k = U_k^{\text{old}} \oplus U_k^{\text{new}}$ pour la décomposition physique littérale ancien/collier. Appliquons le Lemme 6.31. $\square$

6.14 Vraie métrique de Schur et l'unique coefficient de Green

Nous isolons maintenant l'obstruction de racine sans introduire de métrique auxiliaire. Soit $\mathfrak{e}_k$ la ligne de sol vraie normalisée dans le nouveau collier et écrivons l'espace de collier exact post-ancien-noyau comme

$$\mathcal{K}_k = \mathbb{C}\mathfrak{e}_k \oplus \mathcal{K}_k^\perp.$$

Par rapport à cette décomposition écrivons

$$S_k = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}_k & r_k^* \\ r_k & D_k \end{pmatrix}, \quad \eta_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ v_k \end{pmatrix}. \quad (143)$$

L'estimation transverse résolue en source (105) fournit $D_k \succ 0$. Définissons

$$\boxed{\Pi_k := \mathfrak{a}_k - r_k^* D_k^{-1} r_k, \quad z_k := \alpha_k - r_k^* D_k^{-1} v_k, \quad \delta_k^Q := \delta_k - 2v_k^* D_k^{-1} v_k.} \quad (144)$$

Lemme 6.33 (Identité exacte de Schur imbriquée dans la vraie métrique). *Supposons $A_k \succ 0$ et $D_k \succ 0$. Court-circuiter le bloc transverse D_k dans le bloc augmenté exact (66) donne*

$$\boxed{\text{Short}_{D_k} \begin{pmatrix} \delta_k & \sqrt{2} \eta_k^* \\ \sqrt{2} \eta_k & S_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_k^Q & \sqrt{2} \overline{z_k} \\ \sqrt{2} z_k & \Pi_k \end{pmatrix}.} \quad (145)$$

Si $\Pi_k > 0$, alors

$$\boxed{\langle \eta_k, S_k^{-1} \eta_k \rangle = v_k^* D_k^{-1} v_k + \frac{|z_k|^2}{\Pi_k},} \quad (146)$$

et la récurrence exacte du pivot enraciné devient

$$\boxed{\delta_{k+1} = \delta_k^Q - \frac{2|z_k|^2}{\Pi_k}.} \quad (147)$$

Proof. Écrivons le bloc dans l'ordre racine/sol/transverse :

$$\begin{pmatrix} \delta_k & \sqrt{2}\alpha_k & \sqrt{2}v_k^* \\ \sqrt{2}\alpha_k & \mathbf{a}_k & r_k^* \\ \sqrt{2}v_k & r_k & \mathbf{D}_k \end{pmatrix}.$$

Le complément de Schur de $\mathbf{D}_k$ est exactement (145). L'inverse par blocs standard de S_k donne (146). La substitution dans (70) donne (147). $\square$

Définissons l'extension harmonique sans pôle

$$\widehat{H}_k f := \begin{pmatrix} -C_k^{-1} B_k f \\ f \end{pmatrix}. \quad (148)$$

Alors la multiplication par blocs directe donne

$$\boxed{\widehat{H}_k^* C_{k+1} \widehat{H}_k = S_k, \quad \widehat{H}_k^* s_{k+1} = \eta_k.} \quad (149)$$

Posons

$$p_k^\# := \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathbf{D}_k^{-1} r_k \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathbb{C}\mathbf{e}_k \oplus \mathcal{K}_k^\perp. \quad (150)$$

Alors

$$S_k p_k^\# = \Pi_k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (151)$$

Lemme 6.34 (Représentation exacte de Green du scalaire de sol résiduel). *Supposons $A_k \succ 0$, $\mathbf{D}_k \succ 0$, et $\Pi_k > 0$. Soit*

$$G_k := \langle q_{k+1}, C_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_k \rangle, \quad q_Y(t) = t^{-1/2}.$$

Alors

$$\boxed{|z_k| = \Pi_k (k+1)^{1/4} |G_k|.} \quad (152)$$

Par conséquent

$$\boxed{\delta_{k+1} = \delta_k^Q - 2\Pi_k \sqrt{k+1} |G_k|^2.} \quad (153)$$

Proof. Comme $A_k \succ 0$, on a aussi $C_k = A_k + 2|s_k\rangle\langle s_k| \succ 0$. Parce que $\mathbf{D}_k \succ 0$ et $\Pi_k > 0$, le critère de Schur donne $S_k \succ 0$, donc la décomposition par blocs de C_{k+1} sur $C_k \oplus \mathcal{K}_k$ donne $C_{k+1} \succ 0$. De (149) et (151),

$$C_{k+1} \widehat{H}_k p_k^\# = \Pi_k \mathbf{e}_k, \quad \widehat{H}_k p_k^\# = \Pi_k C_{k+1}^{-1} \mathbf{e}_k.$$

En appariant avec s_{k+1} et en utilisant $\widehat{H}_k^* s_{k+1} = \eta_k$ on obtient le scalaire résiduel z_k , à la conjugaison inoffensive fixée par la convention de produit scalaire près. En prenant les valeurs absolues et en appliquant l'identité exacte polaire-sol impaire (75) à $Y = k+1$ on obtient (152). L'équation (153) découle de (147). $\square$

Définition 6.35 (Condition exacte de racine de Green). À l'étape arithmétique $k \rightarrow k+1$, la condition RG_k^* est

$$\boxed{\delta_k^Q > 0, \quad \Pi_k > 0, \quad 2\Pi_k \sqrt{k+1} |G_k|^2 < \delta_k^Q.} \quad (\text{RG}_k^*)$$

De façon équivalente, avec

$$\kappa_k^2 := \frac{2\Pi_k \sqrt{k+1} |G_k|^2}{\delta_k^Q} = \frac{2|z_k|^2}{\delta_k^Q \Pi_k}, \quad (154)$$

la condition RG_k^* est $\delta_k^Q > 0$, $\Pi_k > 0$, et $\kappa_k^2 < 1$.

Théorème 6.36 (Fermeture exacte de la racine de Green en une étape). *Supposons $A_k \succ 0$ et RG_k^* . Alors*

$$\delta_{k+1} = \delta_k^Q(1 - \kappa_k^2) > 0$$

et le bloc de Schur enraciné exact T_k est strictement positif. Par conséquent

$$\boxed{A_{k+1,-} \succ 0.}$$

Proof. Le bloc transverse est strictement positif par (105). La condition $\Pi_k > 0$ implique donc $S_k \succ 0$. L'équation (145) et RG_k^* rendent son complément de Schur deux par deux restant strictement positif. De façon équivalente $T_k \succ 0$, tandis que (153) donne $\delta_{k+1} = \delta_k^Q(1 - \kappa_k^2) > 0$. L'associativité des court-circuits exacts dans (65) donne maintenant $A_{k+1,-} \succ 0$. $\square$

Lemme 6.37 (Seconde réduction de Sherman–Morrison à un vecteur). *Regroupons toutes les coordonnées sauf $\mathfrak{c}_k$ dans X_k et écrivons*

$$C_{k+1} = \begin{pmatrix} K_k & b_k \\ b_k^* & a_k^{(0)} \end{pmatrix}, \quad s_{k+1} = \begin{pmatrix} w_k \\ \tau_k \end{pmatrix}.$$

Après les court-circuits ancien et transverse,

$$\delta_k^Q = 1 - 2w_k^* K_k^{-1} w_k, \quad \Pi_k = a_k^{(0)} - b_k^* K_k^{-1} b_k,$$

Posons

$$A_{X,k} := K_k - 2|w_k\rangle\langle w_k|, \quad b_{A,k} := b_k - 2w_k \overline{\tau_k},$$

et, lorsque $\delta_k^Q > 0$,

$$\zeta_k^Q := \tau_k - b_{A,k}^* A_{X,k}^{-1} w_k, \quad F_k^\# := \begin{pmatrix} -A_{X,k}^{-1} b_{A,k} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A_{X,k}^{-1} w_k = \frac{1}{\delta_k^Q} K_k^{-1} w_k, \tag{155}$$

$$z_k = \delta_k^Q \zeta_k^Q, \tag{156}$$

$$|\langle s_{k+1}, F_k^\# \rangle| = |\zeta_k^Q|, \tag{157}$$

$$\langle F_k^\#, A_{k+1} F_k^\# \rangle = \Pi_k - 2\delta_k^Q |\zeta_k^Q|^2, \tag{158}$$

$$\langle F_k^\#, C_{k+1} F_k^\# \rangle = \Pi_k + 2(1 - \delta_k^Q) |\zeta_k^Q|^2. \tag{159}$$

Ainsi RG_k^ est équivalente au verrou scalaire à un vecteur*

$$\boxed{2\delta_k^Q |\zeta_k^Q|^2 < \Pi_k.} \tag{160}$$

En particulier, l'estimation suffisante

$$\boxed{2|\zeta_k^Q|^2 \leq q_F [\Pi_k + 2(1 - \delta_k^Q) |\zeta_k^Q|^2]} \tag{GF}_k$$

impliquerait

$$\frac{2\delta_k^Q |\zeta_k^Q|^2}{\Pi_k} \leq \frac{q_F \delta_k^Q}{1 - q_F(1 - \delta_k^Q)} \leq q_F < 1. \tag{161}$$

Proof. La première identité est Sherman–Morrison. La substitution dans les définitions de z_k et ζ_k^Q donne (156) ; les identités restantes sont de la multiplication par blocs directe et $C_{k+1} = A_{k+1} + 2|s_{k+1}\rangle\langle s_{k+1}|$. Enfin $0 < \delta_k^Q \leq 1$ dans le régime de racine positive énoncé, et un réarrangement élémentaire de (GF_k) donne (161). $\square$

6.14.1 Fermeture scalaire terminale universelle

Le dernier signe unidimensionnel apparaissant après la réduction parente à deux échelles a une forme analytique close. Le lemme suivant est indépendant de toute coupure finie et n'utilise aucune approximation numérique.

Lemme 6.38 (Inégalité scalaire terminale du sinus hyperbolique). *Soit $0 < a < 1$ et $\rho > 1$. Alors*

$$\boxed{\rho^2 a^\rho (1-a)^2 < a(1-a^\rho)^2.} \quad (162)$$

De façon équivalente,

$$\boxed{\rho a^{(\rho-1)/2} (1-a) < 1-a^\rho.} \quad (163)$$

Proof. Toutes les quantités de (162) sont positives, donc la division par a et le passage à la racine carrée positive donnent exactement (163). Posons

$$a = e^{-2t}, \quad t > 0.$$

Alors

$$1-a = 2e^{-t} \sinh t, \quad 1-a^\rho = 2e^{-\rho t} \sinh(\rho t),$$

et par conséquent (163) est équivalente, après annulation de $2e^{-\rho t} > 0$, à

$$\rho \sinh t < \sinh(\rho t). \quad (164)$$

Posons maintenant $h(u) = \sinh(u)/u$ pour $u > 0$. Comme

$$h'(u) = \frac{u \cosh u - \sinh u}{u^2},$$

et, avec $q(u) = u \cosh u - \sinh u$,

$$q(0) = 0, \quad q'(u) = u \sinh u > 0 \quad (u > 0),$$

on a $h'(u) > 0$ sur $(0, \infty)$. Comme $\rho t > t$,

$$\frac{\sinh(\rho t)}{\rho t} > \frac{\sinh t}{t},$$

ce qui est précisément (164). En inversant les équivalences on prouve (162). $\square$

Corollaire 6.39 (Forme exponentielle à deux échelles). *Soit $x > 0$ et $0 < \alpha < \beta$, et posons*

$$a = e^{-\alpha x}, \quad b = e^{-\beta x}.$$

Alors

$$\boxed{\beta^2 \frac{b}{(1-b)^2} < \alpha^2 \frac{a}{(1-a)^2}.} \quad (165)$$

L'inégalité est stricte pour tout $x > 0$; aucune coupure supérieure sur x n'est nécessaire.

Proof. Posons $\rho = \beta/\alpha > 1$. Alors $b = a^\rho$. En multipliant (165) par le dénominateur commun positif et en divisant par α^2 on obtient exactement (162). $\square$

Remarque 6.40 (Formulation équivalente en monotonie). Le même résultat dit que

$$\Phi(u) := \frac{u^2 e^{-u}}{(1-e^{-u})^2} = \frac{u^2}{4 \sinh^2(u/2)}$$

est strictement décroissante sur $(0, \infty)$. La preuve ci-dessus est la forme sans échelle de cette monotonie.

Énoncé d'audit 6.41 (Portée de la fermeture scalaire terminale). Le Lemme 6.38 et le Corollaire 6.39 sont des énoncés analytiques inconditionnels. Ils ferment le dernier signe scalaire à deux échelles une fois que la réduction parente exacte post-transverse a identifié son résidu à (165) (de façon équivalente (162)). Le lemme lui-même n'identifie pas les coefficients parents au niveau opératoire avec a, α, β . Cette identification algébrique séparée est fournie ci-dessous par le pont de forme inférieure de la ligne héritée et le bloc parent mixte dans `lem:Jsharp-clean,lem:mixed-parent-clean`.

6.14.2 Contrôle pondéré de sol augmenté

Pour une cible fixée k et un indice parent m , soit

$$\mathcal{N}_{k,m} := \{n = p^\ell : n \leq k, n \nmid k, \lfloor k/n \rfloor = m\}.$$

Posons

$$V_{k,m} := \sum_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} \frac{\Lambda(n)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} \Lambda(n)\right)^2}{\sum_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} n}. \quad (166)$$

La quantité est la norme au carré du forçage arithmétique après projection orthogonale loin de la direction de sol parente héritée : si $\lambda_n = \Lambda(n)/\sqrt{n}$ et si la direction héritée a des composantes proportionnelles à $\sqrt{n}$, alors

$$\|P_{\hat{r}^\perp} \lambda\|^2 = V_{k,m}.$$

Le court-circuit de désaccord parent obtenu à partir du modèle inférieur à un défaut a un écart inverse uniforme d'au moins $\log 2$, donc son débit dual exact satisfait

$$\boxed{\hat{\chi}_{k,m} \leq \frac{V_{k,m}}{\log 2}}. \quad (167)$$

Définissons

$$\beta_0 := \log 2 + \frac{1}{2}, \quad \tilde{\sigma}_k := \sum_{\substack{n=p^\ell \leq k \\ n \nmid k}} \frac{\Lambda(n)^2}{n(\log n + \beta_0)}.$$

Pour $m = \lfloor k/n \rfloor$ on a

$$w_m < \frac{1}{m}, \quad w_k > \frac{1}{k+1}, \quad k+1 \leq n(m+1),$$

et par conséquent

$$\boxed{L_{k,n} < \log n + \beta_0, \quad \sigma_k \geq \tilde{\sigma}_k}. \quad (168)$$

Proposition 6.42 (Certificat arithmétique pondéré de sol). *Pour tout entier $k \geq 2$,*

$$\boxed{\frac{1}{\log 2} \sum_m V_{k,m} \leq \tilde{\sigma}_k \leq \sigma_k}. \quad (169)$$

Proof. La seconde inégalité est (168). Pour la première inégalité (arithmétique) nous découpons en

$$X_0 := 3\,594\,641.$$

Pour $2 \leq k \leq X_0$, le balayage fini spécifié dans l'Appendix A évalue la combinatoire exacte en utilisant des intervalles arrondis vers l'extérieur. Les logarithmes entiers sont encadrés par la série atanh positive

$$\log x = e \log 2 + 2 \sum_{r \geq 0} \frac{z^{2r+1}}{2r+1}, \quad z = \frac{x - 2^e}{x + 2^e}, \quad 0 \leq z < \frac{1}{3},$$

avec une queue géométrique explicite ; aucun appel à `log`, `log1` ou à une autre routine transcendante de bibliothèque n'est effectué. Chaque opération arithmétique élémentaire est élargie d'un pas `nextafter1` dans la direction extérieure. La sortie certifiée donne l'égalité exacte en $k = 2$ et, pour tout $3 \leq k \leq X_0$,

$$\tilde{\sigma}_k - \frac{1}{\log 2} \sum_m V_{k,m} \geq 0.111804998077428866317003\dots,$$

le minimum se produisant en $k = 33$. La borne supérieure certifiée correspondante sur le rapport est

$$\frac{(\log 2)^{-1} \sum_m V_{k,m}}{\tilde{\sigma}_k} \leq 0.911416881539699733755493\dots$$

Pour $k \geq X_0$, séparons les contributions des nombres premiers et des puissances supérieures de nombres premiers. L'estimation de variance pondérée sur les bacs premiers et les bornes explicites de Chebyshev utilisées dans `lem:chebyshev-capacity` donnent

$$\sum_m V_{k,m} < 0.14736 \log k + 2.904. \quad (170)$$

Pour le côté inférieur, retenons seulement les nombres premiers $p \geq 5$ et posons

$$F(x) := \sum_{5 \leq p \leq x} \frac{\log^2 p}{p(\log p + \beta_0)}.$$

L'évaluation finie directe donne $F(X_0) > 11.0452$. Avec

$$\varepsilon_0 := \frac{0.2}{\log^2 X_0} < 0.000878, \quad \Phi_0(u) := u - \beta_0 \log(u + \beta_0),$$

l'intégration de Stieltjes de $|\vartheta(x) - x| < 0.2x/\log^2 x$ donne, pour $k \geq X_0$,

$$F(k) \geq F(X_0) + (1 - \varepsilon_0)[\Phi_0(\log k) - \Phi_0(\log X_0)] - 2\varepsilon_0 \frac{\log X_0}{\log X_0 + \beta_0}.$$

Retirer les éventuels diviseurs premiers de k coûte au plus $0.18486 + (1/7) \log k$, donc

$$\tilde{\sigma}_k \geq F(k) - 0.18486 - \frac{1}{7} \log k. \quad (171)$$

En X_0 , (170) divisé par $\log 2$ est < 7.399 , tandis que (171) est > 8.702 . Dans la variable $u = \log k$, la pente de la première est

$$\frac{0.14736}{\log 2} < 0.213,$$

tandis que la pente de la seconde est au moins

$$(1 - \varepsilon_0) \frac{u}{u + \beta_0} - \frac{1}{7} > 0.783 \quad (u \geq \log X_0).$$

Ainsi l'écart est déjà positif en X_0 et croît ensuite. □

Calcul fini certifié 6.43 (Exécution AWGC finie par intervalles). Le balayage à intervalles dirigés de l'Appendix A donne

```
PASS interval-certified N=3594641
min_positive_margin_lo=0.111804998077428866317003 at k=33
max_ratio_upper=0.911416881539699733755493 at k=33
at_N lhs=[0.836991206113748137710405,0.836992125739140218221995]
      rhs=[11.5646711544460260535569,11.5646711544464651658451]
      margin=[10.7276790287068858340339,10.7276799483327170293273]
```

Toutes les quantités affichées sont des extrémités d'intervalle arrondies vers l'extérieur. L'arithmétique utilisée par le balayage, y compris l'encadrement de chaque logarithme entier, est spécifiée explicitement dans l'Appendix A.

Théorème 6.44 (Élévation opératorielle AWGC). *Pour tout $k \geq 2$,*

$$\boxed{\sum_m \hat{\chi}_{k,m} \leq \frac{1}{\log 2} \sum_m V_{k,m}.} \quad (\text{AWGC-OP}_k)$$

Proof. C'est le Corollaire 6.49 sommé sur les cellules parentes orthogonales. □

Corollaire 6.45 (Réserve de désaccord arithmétique). *Pour tout $k \geq 2$,*

$$\mathfrak{B}_k - \sum_m \hat{\chi}_{k,m} \geq \mathfrak{B}_k - \sigma_k > \frac{1}{2}.$$

Lemme 6.46 (Surplus exact à deux échelles du sol hérité). *Soit $n \nmid k$, $m = \lfloor k/n \rfloor$, et supposons que le vrai intervalle source soit dans la cellule parente C_m . Pour le sol parent normalisé*

$$e_m(r) = \frac{\sqrt{m(m+1)}}{m+r},$$

sa masse au carré sur le vrai intervalle source est

$$p_{k,n} = \frac{nm(m+1)}{k(k+1)}. \quad (172)$$

Si $\varepsilon_{k,m} = w_k/w_m$, alors le coefficient aligné normalisé $\theta_{k,m}$ satisfait

$$\theta_{k,m}^2 = \frac{\Phi(w_m)}{\Phi(w_k)} < 1, \quad \Phi(u) = \frac{u^2 e^{-u}}{(1 - e^{-u})^2}. \quad (173)$$

De façon équivalente,

$$\varepsilon_{k,m}^2 - \frac{p_{k,n}}{n} = \frac{\Phi(w_k) - \Phi(w_m)}{k(k+1)w_m^2} > 0.$$

Proof. En écrivant le vrai intervalle source dans la coordonnée de résidu parente on obtient

$$\int_{I_{k,n}} \frac{dr}{m+r} = w_k, \quad \int_{I_{k,n}} \frac{dr}{(m+r)^2} = \frac{n}{k(k+1)},$$

ce qui prouve (172). Comme $e^{-w_j} = j/(j+1)$,

$$\Phi(w_j) = j(j+1)w_j^2.$$

La décroissance stricte de Φ , prouvée dans `rem:terminal-monotonicity`, et $m < k$ donnent (173). $\square$

6.14.3 Budget scalaire MASTER et cible opératorielle exacte

Posons

$$\mathfrak{B}_k := \frac{1}{2} + \log \frac{1}{w_k}, \quad w_k = \log \left(1 + \frac{1}{k} \right),$$

de sorte que $\mathfrak{B}_k > \frac{1}{2} + \log k$. Définissons

$$\mathfrak{g}_k^M := \frac{1}{2} + \log k - \frac{439}{250 \log 2} \sum_m V_{k,m}. \quad (174)$$

Le facteur $439/250 = 1 + 189/250$ est conservé comme rationnel exact ; la première unité est la charge de désaccord de base et le $189/250$ supplémentaire est le coefficient mixte hérité-désaccord établi ci-dessous. L'estimation scalaire elle-même est indépendante du placement ultérieur sur le même vecteur.

Théorème 6.47 (Budget scalaire à double charge MASTER). *Pour tout entier $k \geq 7$,*

$$\boxed{\mathfrak{g}_k^M > 0.} \quad (\text{MASTER-SCALAR})$$

Pour $7 \leq k \leq 3\,594\,641$ un vérificateur par intervalles arrondis vers l'extérieur donne

$$\min \mathfrak{g}_k^M > 1.97650540314533685844807647802,$$

avec le minimum en $k = 33$.

Proof. L'assertion finie découle du balayage à intervalles dirigés spécifié dans l'Appendix A ; il évalue le groupement exact en puissances de nombres premiers définissant $V_{k,m}$ et utilise un encadrement par intervalles des logarithmes entiers fondé sur la série atanh positive. Pour la queue, utilisons l'estimation arithmétique déjà prouvée

$$\sum_m V_{k,m} < 0.14736 \log k + 2.904.$$

Donc, pour $k \geq 3594641$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_k^M &> \left(1 - \frac{439}{250 \log 2} 0.14736\right) \log k + \frac{1}{2} - \frac{439}{250 \log 2} 2.904 \\ &= 0.626682229608 \dots \log k - 6.856913716191 \dots \end{aligned}$$

Le coefficient de $\log k$ est positif, et à la coupure le membre de droite est $2.6028261405 \dots > 0$. Il croît donc ensuite. $\square$

6.14.4 Court-circuit parent exact à un défaut et la constante mixte rationnelle

Le coefficient mixte est déterminé par l'inégalité analytique à un défaut elle-même. Posons $L := \log 2$ et $\beta_0 = L + \frac{1}{2}$. Fixons une cellule parente et soit S l'union de ses $M = M_m$ vrais emplacements sources après normalisation à $(0, 1)$. Chaque emplacement a une longueur $\varepsilon = \varepsilon_{k,m} = w_k/w_m$, donc $s := |S| = M\varepsilon \leq 1$.

Lemme 6.48 (Court-circuit exact de la forme inférieure à un défaut). *Soit*

$$L_0 := \beta_0 I - \frac{1}{2} |\mathbf{1}\rangle\langle \mathbf{1}|$$

sur $L^2(0, 1)$, où $\mathbf{1}$ est la constante normalisée. Court-circuitons L_0 sur S^c puis court-circuitons le sous-espace intra-emplacement orthogonal aux constantes d'emplacement $e_j = \varepsilon^{-1/2} \mathbf{1}_{I_j}$, $j = 1, \dots, M$. (Pour L_0 ce second court-circuit égale la compression, parce que tout vecteur intra-emplacement de moyenne nulle est orthogonal à la constante globale.) Dans la base orthonormée de sol d'emplacement résultante, la matrice est

$$D_{k,m}^{(0)} = \beta_0 I - q_{k,m} |u_m\rangle\langle u_m|, \quad q_{k,m} = \frac{\beta_0 \varepsilon_{k,m}}{2 \log 2 + M_m \varepsilon_{k,m}}. \quad (175)$$

De plus

$$0 \leq q_{k,m} M_m \leq \frac{1}{2}. \quad (176)$$

La métrique source exacte de coupe commune domine cette matrice.

Proof. L'inégalité analytique à un défaut donne $\mathfrak{b} \succeq L_0$. Écrivons $\mathbf{1} = p + q$ avec $p = \mathbf{1}_S$ et $q = \mathbf{1}_{S^c}$; alors $\|p\|^2 = s$ et $\|q\|^2 = 1 - s$. Par rapport à $L^2(S) \oplus L^2(S^c)$,

$$L_0 = \begin{pmatrix} \beta_0 I - \frac{1}{2} |p\rangle\langle p| & -\frac{1}{2} |p\rangle\langle q| \\ -\frac{1}{2} |q\rangle\langle p| & \beta_0 I - \frac{1}{2} |q\rangle\langle q| \end{pmatrix}.$$

Le bloc inférieur droit est positif parce que $\beta_0 - \frac{1}{2}(1 - s) = L + s/2 > 0$. Son inverse envoie q sur $q/(L + s/2)$. Par suite son complément de Schur sur $L^2(S)$ est

$$\beta_0 I - \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - s}{4(L + s/2)} \right) |p\rangle\langle p| = \beta_0 I - \frac{\beta_0}{2L + s} |p\rangle\langle p|.$$

Comme $\langle e_j, p \rangle = \sqrt{\varepsilon}$ et que les fluctuations intra-emplacement orthogonales se découpent du défaut de rang un, leur court-circuit de Schur n'est que la compression affichée. Ceci donne (175). Enfin

$$q_{k,m} M = \frac{\beta_0 s}{2L + s} \leq \frac{1}{2}$$

est équivalent à $s \leq 1$. La monotonie des opérateurs court-circuités transfère l'ordre des formes inférieures de L_0 à la métrique source exacte de coupe commune. $\square$

Corollaire 6.49 (Écart de désaccord uniforme et élévation AWGC opératorielle). Avec $h_m = M_m - E_m^2/C_m$ et $\mu_m = \beta_0 - q_{k,m}h_m$,

$$\boxed{\mu_m \geq \log 2.} \quad (177)$$

Par conséquent, si $\hat{\chi}_{k,m}$ désigne le débit de Schur de désaccord exact,

$$\boxed{\hat{\chi}_{k,m} \leq \chi_m \leq \frac{V_{k,m}}{\log 2}.} \quad (178)$$

Ainsi l'élévation opératorielle (AWGC-OP_k) tient.

Proof. Parce que $0 \leq h_m \leq M_m$, (176) donne $\mu_m \geq \beta_0 - \frac{1}{2} = L$. Sur l'espace de désaccord l'inverse du modèle inférieur est donc borné par $L^{-1}I$. Le forçage de désaccord a une norme euclidienne au carré $V_{k,m}$. Enfin, la métrique source exacte domine le modèle inférieur, donc l'inversion renverse l'ordre sur le bloc de désaccord positif. $\square$

6.14.5 Une coupe source simultanée sans double dépense

L'intérêt du raffinement suivant est de garder les budgets de sol d'emplacement et intra-emplacement transverse à l'intérieur d'un seul et même court-circuit de complément commun. Posons

$$d_0 := 0.422785.$$

Pour $D \geq 1$ posons

$$c_D := \log \frac{D+1}{D}, \quad \delta_D := c_D - \frac{1}{D+1} > 0.$$

Lemme 6.50 (Capacité universelle de déficit de paire). On a

$$\boxed{\sum_{j \geq 1} \delta_j < d_0.} \quad (179)$$

De plus $D \mapsto \delta_D$ est strictement décroissante sur $[1, \infty)$.

Proof. La différentiation donne

$$\delta'_D = -\frac{1}{D(D+1)^2} < 0.$$

Pour j entier les sommes partielles se télescopent :

$$\sum_{j=1}^N \delta_j = 1 + \log(N+1) - H_{N+1}.$$

De plus, avec $x = 1/j$,

$$\log(1+x) - \frac{x}{1+x} < \frac{x^2}{2(1+x)},$$

parce que la différence entre les membres de droite et de gauche s'annule en $x = 0$ et a pour dérivée $x^2/[2(1+x)^2] > 0$. Par conséquent

$$\sum_{j > N} \delta_j < \frac{1}{2(N+1)}.$$

En $N = 1000$, l'évaluation arrondie vers l'extérieur du logarithme unique donne

$$1 + \log 1001 - H_{1001} + \frac{1}{2002} < 0.422784418265375637 < d_0.$$

$\square$

Lemme 6.51 (Décomposition exacte base/résidu de la forme à une cellule). *Soit*

$$\mathfrak{l}_0[u] := \log 2 \|u\|_2^2 + \frac{1}{4} \iint_{(0,1)^2} |u(x) - u(y)|^2 dx dy.$$

Alors $\mathfrak{l}_0$ est exactement la forme quadratique de

$$L_0 = (\log 2 + \tfrac{1}{2})I - \tfrac{1}{2}|\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{1}|,$$

et

$$\boxed{\mathfrak{b} = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r} \geq 0,} \quad (180)$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}[u] &= \frac{1}{4} \iint_{(0,1)^2} \left(\frac{1}{|x-y|} - 1 \right) |u(x) - u(y)|^2 dx dy \\ &\quad + \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \log(x(1-x)) - \log 2 \right] |u(x)|^2 dx. \end{aligned} \quad (181)$$

Proof. L'identité

$$\frac{1}{4} \iint |u(x) - u(y)|^2 dx dy = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{2} |\langle u, \mathbf{1} \rangle|^2$$

donne la formule pour L_0 . En la soustrayant de (49) on obtient (181). Les deux coefficients affichés sont non négatifs parce que $|x-y| \leq 1$ et $x(1-x) \leq 1/4$. $\square$

Théorème 6.52 (Capacité cohérente résiduelle avec moyennes sources libres). *Soient $I_\nu = (a_\nu, a_\nu + \varepsilon) \Subset (0,1)$ des intervalles deux à deux disjoints de longueur commune ε , ordonnés de gauche à droite. Pour une extension commune arbitraire u , posons*

$$f_\nu = u|_{I_\nu}, \quad \bar{f}_\nu = \varepsilon^{-1} \int_{I_\nu} f_\nu, \quad f_{\nu,0} = f_\nu - \bar{f}_\nu.$$

Alors

$$\boxed{\mathfrak{r}[u] \geq \sum_\nu \left(\log \frac{1}{2\varepsilon} - \Delta_\nu \right) \|f_{\nu,0}\|_2^2,} \quad (182)$$

où

$$\Delta_\nu := \frac{1}{2} \sum_{\mu \neq \nu} \delta_{D_{\nu\mu}}, \quad D_{\nu\mu} := \frac{|a_\mu - a_\nu|}{\varepsilon} \geq 1.$$

En particulier, par le Lemme 6.50,

$$\boxed{\mathfrak{r}[u] \geq \left(\log \frac{1}{2\varepsilon} - d_0 \right) \sum_\nu \|f_{\nu,0}\|_2^2.} \quad (183)$$

Les moyennes sources sont complètement libres dans cette estimation.

Proof. Fixons une source I_ν . Sur I_ν^2 , $|x-y| \leq \varepsilon$, tandis que la partie constante de f_ν s'annule dans la différence. Par suite l'énergie interne résiduelle est au moins

$$\frac{1}{2} (1 - \varepsilon) \|f_{\nu,0}\|_2^2.$$

Pour un point libre $y < a_\nu$,

$$\int_{I_\nu} |f_\nu(x) - u(y)|^2 dx = \|f_{\nu,0}\|_2^2 + \varepsilon |\bar{f}_\nu - u(y)|^2 \geq \|f_{\nu,0}\|_2^2,$$

et donc la charge résiduelle source-libre est bornée inférieurement en utilisant $1/(a_\nu + \varepsilon - y) - 1$; le côté droit est analogue.

Si I_μ se trouve à droite et $D = D_{\nu\mu}$, alors $y - x \leq \varepsilon(D + 1) \leq 1$. Ainsi sa contribution résiduelle de paire obéit à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iint_{I_\nu \times I_\mu} \left(\frac{1}{y-x} - 1 \right) |f_\nu(x) - f_\mu(y)|^2 dx dy \\ & \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{D+1} - \varepsilon \right) (\|f_{\nu,0}\|_2^2 + \|f_{\mu,0}\|_2^2), \end{aligned}$$

où le terme de différence de moyennes omis est non négatif. La charge résiduelle à une source qui aurait occupé le même emplacement est

$$\frac{1}{2} (c_D - \varepsilon) \|f_{\nu,0}\|_2^2.$$

Par conséquent la seule perte par rapport à la charge résiduelle complète du complément est $\delta_D/2$ pour chaque paire incidente.

Enfin le potentiel d'extrémité résiduel sur I_ν est borné inférieurement par

$$\left[-\frac{1}{2} \log((a_\nu + \varepsilon)(1 - a_\nu)) - \log 2 \right] \|f_{\nu,0}\|_2^2;$$

lorsque le crochet est négatif cela découle simplement de la non-négativité du potentiel résiduel, et lorsqu'il est positif cela découle de $\|f_\nu\|^2 \geq \|f_{\nu,0}\|^2$. En ajoutant le terme interne, la charge résiduelle complète gauche/droite du complément et ce potentiel, on annule la position a_ν et on obtient $\log(1/(2\varepsilon))\|f_{\nu,0}\|^2$. En soustrayant les déficits de paires on obtient (182).

Pour des emplacements ordonnés disjoints égaux, $D_{\nu\mu} \geq |\nu - \mu|$. Comme δ_D décroît,

$$\Delta_\nu \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{j \geq 1} \delta_j + \sum_{j \geq 1} \delta_j \right) < d_0,$$

ce qui prouve (183). □

Théorème 6.53 (Forme inférieure simultanée de coupe commune sol/transverse). *Fixons un parent actif m et ses vrais emplacements sources. Soit $\mathcal{G}_m$ leur espace de sol d'emplacement et $\mathcal{Z}_m$ la somme orthogonale des espaces intra-emplacement de moyenne nulle dans la jauge à cible fixe. Avec $D_{k,m}^{(0)}$ du Lemme 6.48, posons*

$$\hat{L}_{k,n} := L_{k,n} - d_0.$$

Alors le court-circuit source du seul complément commun satisfait

$$\boxed{\mathfrak{C}_{k,m}^{\text{short}} \succeq D_{k,m}^{(0)}|_{\mathcal{G}_m} \oplus \bigoplus_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} \hat{L}_{k,n} Q_{k,n}.} \quad (\text{MASTER-CUT}_{k,m})$$

Ainsi le budget de sol parent et le budget transverse source sont disponibles simultanément et ne peuvent être doublement dépensés.

Proof. Pour toute extension, le Lemme 6.51 et le Théorème 6.52 donnent

$$\mathfrak{b}[u] \geq \mathfrak{l}_0[u] + \left(\log \frac{1}{2\varepsilon_{k,m}} - d_0 \right) \sum_n \|Q_{k,n} f_n\|^2.$$

Le second terme ne dépend que des données sources prescrites, donc il passe inchangé à travers l'infimum sur le complément commun unique. Le court-circuit exact de L_0 est la matrice du Lemme 6.48 ; par rapport à $\mathcal{G}_m \oplus \mathcal{Z}_m$ elle est

$$D_{k,m}^{(0)} \oplus \beta_0 I_{\mathcal{Z}_m}, \quad \beta_0 = \log 2 + \frac{1}{2},$$

parce que le vecteur global de rang un appartient à $\mathcal{G}_m$. Comme

$$\beta_0 + \log \frac{1}{2\varepsilon_{k,m}} - d_0 = \frac{1}{2} + \log \frac{1}{\varepsilon_{k,m}} - d_0 = L_{k,n} - d_0,$$

on obtient (MASTER-CUT _{k,m}). Chaque terme provient de la décomposition exacte $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}_0 + \mathfrak{r}$ avant qu'aucun court-circuit source ne soit pris. □

Lemme 6.54 (Borne terminale logarithmique indépendante). *Pour tout entier $k \geq 7$,*

$$\boxed{S_k := \sum_{\substack{n \leq k \\ n \nmid k}} \frac{\Lambda(n)}{n} < \log k.} \quad (184)$$

Proof. Il suffit de prouver l'estimation plus forte pour

$$T_k := \sum_{n \leq k} \frac{\Lambda(n)}{n}, \quad S_k \leq T_k.$$

Posons $X_0 = 3\,594\,641$. Un calcul fini direct arrondi vers l'extérieur, implémenté exactement par la procédure par intervalles spécifiée dans l'Appendix A, évalue la somme sur les puissances de nombres premiers et donne pour tout $7 \leq k \leq X_0$

$$T_k < H_k - 1 < \log k,$$

avec marge certifiée minimale

$$\min_{7 \leq k \leq X_0} (H_k - 1 - T_k) > 0.0701888211361692811$$

en $k = 13$. La seconde inégalité est la comparaison intégrale élémentaire $H_k < 1 + \log k$.

Pour être complet, la queue est indépendante de la recherche finie. Soit $T(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)/n$ et $E(x) = \psi(x) - x$. La sommation partielle donne, pour $x \geq X_0$,

$$T(x) - \log x = T(X_0) - \log X_0 + \frac{E(x)}{x} - \frac{E(X_0)}{X_0} + \int_{X_0}^x \frac{E(t)}{t^2} dt.$$

En utilisant directement les inégalités explicites affichées dans la preuve du Lemme 3.4, à savoir

$$|\vartheta(t) - t| < \frac{0.2t}{\log^2 t}, \quad 0 \leq \psi(t) - \vartheta(t) < 1.00007\sqrt{t} + 1.78t^{1/3},$$

et les faits grossiers $\log X_0 > 15$, $\sqrt{X_0} > 1800$, $X_0^{1/3} > 150$, l'augmentation totale possible de $T(x) - \log x$ après X_0 est inférieure à

$$\frac{0.4}{15^2} + \frac{0.2}{15} + \frac{3.00021}{1800} + \frac{4.45}{150^2} < 0.016976.$$

Le même certificat fini donne

$$\log X_0 - T(X_0) > 0.5775121597507083554.$$

Par conséquent $\log x - T(x) > 0.5605$ pour tout $x \geq X_0$, ce qui prouve (184) également sur la queue. $\square$

Théorème 6.55 (Réserve transverse sûre pour MASTER). *Pour $k \geq 7$ définissons*

$$\hat{\sigma}_k := \sum_{\substack{n=p^\ell \leq k \\ n \nmid k}} \frac{\Lambda(n)^2}{n \hat{L}_{k,n}}.$$

Alors

$$\boxed{\mathfrak{B}_k - \hat{\sigma}_k > 0 \quad (k \geq 7).} \quad (\text{MASTER-T}_k)$$

Pour $7 \leq k \leq 4999$ le balayage à intervalles dirigés de l'Appendix A donne

$$\min(\mathfrak{B}_k - \hat{\sigma}_k) > 1.5202196525197509883 \dots,$$

atteint en $k = 7$.

Proof. L'énoncé fini est le certificat par intervalles spécifié dans l'Appendix A. Pour la queue, notons d'abord que $w_k < 1/k$ et $k \geq mn$ donnent

$$\hat{L}_{k,n} > \log n + \frac{1}{2} - d_0 + \log(mw_m). \quad (185)$$

La fonction $m \mapsto mw_m$ croît. Si $m \geq 7$, alors

$$mw_m > 1 - \frac{1}{2m} \geq \frac{13}{14}, \quad \log \frac{13}{14} > -\frac{1}{13},$$

donc

$$\frac{1}{2} - d_0 + \log(mw_m) > \frac{1}{2} - d_0 - \frac{1}{13} > 0.$$

Par conséquent chaque branche avec $m \geq 7$ contribue moins que $\Lambda(n)/n$ à $\hat{\sigma}_k$.

Pour $m \leq 6$, on a $n > k/7$ et, en utilisant $mw_m \geq \log 2 > 2/3$ et $\log(3/2) < 1/2$,

$$\hat{L}_{k,n} > \log n - d_0.$$

Par conséquent, avec $S_k := \sum_{n \leq k, n \nmid k} \Lambda(n)/n$,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_k &\leq S_k + \frac{d_0}{\log(k/7) - d_0} \sum_{n > k/7} \frac{\Lambda(n)}{n} \\ &\leq S_k + \frac{7d_0}{\log(k/7) - d_0} \frac{\psi(k)}{k}. \end{aligned} \quad (186)$$

La borne indépendante du Lemme 6.54 donne $S_k < \log k$. De plus le Lemme 3.4 donne $\psi(k)/k < C_{\text{tail}} + \log k/k$. Pour $k \geq 5000$ la correction du membre de droite dans (186) décroît avec k , et les bornes d'intervalle dirigées

$$\log(5000/7) > 6.57, \quad C_{\text{tail}} + \frac{\log 5000}{5000} < 1.021$$

donnent

$$\frac{7d_0}{\log(k/7) - d_0} \frac{\psi(k)}{k} < 0.492.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{B}_k - \hat{\sigma}_k > \frac{1}{2} - \log(kw_k) - 0.492 > 0.008 > 0.$$

Ceci ferme la queue. □

Lemme 6.56 (Estimation parente rationnelle). *Pour tout parent actif m et toute étape arithmétique $k \geq 7$,*

$$\boxed{\frac{\rho_m}{\Pi_m^{(0)}} < \frac{189}{250} (1 - \theta_{k,m}^2)}. \quad (187)$$

En fait la preuve donne le coefficient universel plus fort

$$c_* := \frac{3 + 2\sqrt{2}}{16(\log 2 + \frac{1}{2}) \log 2} < 0.441.$$

Proof. Posons $M = M_m$, $h = h_m$, $a = a_m$, $q = q_{k,m}$ et $N = \beta_0 - qM$. Sherman–Morrison sur la compression de désaccord donne

$$\rho_m = \frac{q^2 a^2 h}{\mu_m}, \quad \Pi_m^{(0)} = \frac{\beta_0 N}{\mu_m},$$

et donc

$$\frac{\rho_m}{\Pi_m^{(0)}} = \frac{q^2 a^2 h}{\beta_0 N}. \quad (188)$$

Par (176), $q \leq (2M)^{-1}$ et $N \geq L$. Si $v := h/M$, alors $a^2 = M - h = M(1 - v)$, donc

$$\frac{\rho_m}{\Pi_m^{(0)}} \leq \frac{v(1-v)}{4\beta_0 L} \leq \frac{v}{4\beta_0 L}. \quad (189)$$

Pour $x_j = \sqrt{n_j}$, $n_j \in \mathcal{N}_{k,m}$,

$$v = \frac{\text{Var}(x_j)}{M^{-1} \sum_j x_j^2}.$$

L'inégalité de Popoviciu et $k/(m+1) < n_j \leq k/m$ donnent

$$v \leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{m}} - 1 \right)^2.$$

Un parent actif satisfait $k \geq 2m + 1$: si $k = 2m$, le seul n possible avec $\lfloor k/n \rfloor = m$ est $n = 2$, qui est divisorial et donc non actif. Ainsi $w_k < w_m/2$. Comme Φ est strictement décroissante,

$$1 - \theta_{k,m}^2 = 1 - \frac{\Phi(w_m)}{\Phi(w_k)} > 1 - \frac{\Phi(w_m)}{\Phi(w_m/2)} = \tanh^2 \frac{w_m}{4}.$$

En écrivant $x = w_m/4$,

$$\frac{(e^{w_m/2} - 1)^2}{\tanh^2(w_m/4)} = 4e^{2x} \cosh^2 x = (e^{2x} + 1)^2 \leq (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

En combinant avec (189) on obtient le coefficient c_* . Les bornes élémentaires $\sqrt{2} < 1.415$ et $\log 2 > 0.693$ donnent $c_* < 0.441 < 189/250$. $\square$

Lemme 6.57 (Bloc mixte MASTER sharp). *Soit $c_M := 189/250$. Sous le modèle parent exact ci-dessus,*

$$\boxed{\begin{pmatrix} (1 - \theta_{k,m}^2) \Pi_m^{(0)} & -\theta_{k,m} \Gamma_m \\ -\theta_{k,m} \Gamma_m & c_M \chi_m \end{pmatrix} \succeq 0.} \quad (190)$$

Ainsi l'interaction mixte héritée-désaccord coûte au plus une copie supplémentaire $189/250$ du débit de désaccord pur ; conjointement avec la copie de désaccord pur, le multiplicateur MASTER local est exactement $1 + 189/250 = 439/250$.

Proof. Cauchy–Schwarz donne $|\Gamma_m|^2 \leq \rho_m \chi_m$. Par le Lemme 6.56,

$$\begin{aligned} \det &\geq c_M(1 - \theta^2) \Pi^{(0)} \chi - \theta^2 c_M(1 - \theta^2) \Pi^{(0)} \chi \\ &= c_M(1 - \theta^2)^2 \Pi^{(0)} \chi \geq 0. \end{aligned}$$

Les entrées diagonales sont non négatives. Si $\chi = 0$, Cauchy–Schwarz force aussi $\Gamma = 0$. $\square$

6.14.6 Pont de forme inférieure de la ligne héritée et absorption du bloc mixte

L'étape finale de racine est effectuée sur le même vecteur harmonique de coupe commune que la seconde réduction de Sherman–Morrison. Nous consignons d'abord le modèle parent inférieur sous une forme qui sépare la ligne source héritée du désaccord arithmétique.

Fixons un parent actif m et abrégeons

$$\mathcal{N}_m := \mathcal{N}_{k,m}, \quad M_m := |\mathcal{N}_m|, \quad C_m := \sum_{n \in \mathcal{N}_m} n, \quad E_m := \sum_{n \in \mathcal{N}_m} \sqrt{n}.$$

Posons

$$\hat{r}_m := \frac{(\sqrt{n})_{n \in \mathcal{N}_m}}{\sqrt{C_m}}, \quad u_m := (1, \dots, 1)^T, \quad a_m := \frac{E_m}{\sqrt{C_m}}, \quad h_m := M_m - \frac{E_m^2}{C_m}.$$

Pour le modèle inférieur exact de sol source à un défaut du Lemme 6.48 écrivons

$$D_{k,m}^{(0)} = \beta_0 I - q_{k,m} |u_m\rangle \langle u_m|, \quad \beta_0 = \log 2 + \frac{1}{2},$$

et posons

$$\mu_m := \beta_0 - q_{k,m} h_m, \quad N_m := \beta_0 - q_{k,m} M_m, \quad \Pi_m^{(0)} := \frac{\beta_0 N_m}{\mu_m} > 0. \quad (\text{L0})$$

La quantité $\Pi_m^{(0)}$ est le pivot de la ligne héritée du modèle inférieur après court-circuit de $\hat{r}_m^\perp$; elle n'est identifiée à aucun pivot physique de racine.

Soit

$$\lambda_m := \left(\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathcal{N}_m} = b_m \hat{r}_m + \lambda_m^\perp, \quad b_m := \frac{\sum_{n \in \mathcal{N}_m} \Lambda(n)}{\sqrt{C_m}},$$

et soit $D_{m,\perp}^{(0)}$ la compression de désaccord de $D_{k,m}^{(0)}$. Définissons

$$\chi_m := \langle \lambda_m^\perp, (D_{m,\perp}^{(0)})^{-1} \lambda_m^\perp \rangle,$$

$$c_m := -q_{k,m} a_m u_m^\perp, \quad \rho_m := \langle c_m, (D_{m,\perp}^{(0)})^{-1} c_m \rangle, \quad \Gamma_m := \langle c_m, (D_{m,\perp}^{(0)})^{-1} \lambda_m^\perp \rangle.$$

Alors Cauchy–Schwarz dans la métrique inverse de désaccord donne

$$\boxed{|\Gamma_m|^2 \leq \rho_m \chi_m.} \quad (191)$$

Le Lemme 6.56 donne l'estimation parente certifiée

$$\boxed{\frac{\rho_m}{\Pi_m^{(0)}} < \frac{189}{250} (1 - \theta_{k,m}^2).} \quad (192)$$

Lemme 6.58 (Surplus vrai de la ligne héritée). *Soit $\mathcal{D}_{k,m}^{\text{ex}}$ la métrique source-sol exacte obtenue après le court-circuit simultané du complément commun sur les vrais intervalles sources, puis court-circuitons l'espace de désaccord $\hat{r}_m^\perp$. Son pivot hérité survivant $P_{k,m}^{\text{ex}}$ satisfait*

$$\boxed{P_{k,m}^{\text{ex}} \geq \Pi_m^{(0)} > 0.} \quad (193)$$

Par conséquent, avec

$$\kappa_{k,m} := \frac{m(m+1)}{k(k+1)}, \quad r_m^0 = \varepsilon_{k,m} \sqrt{C_m} \hat{r}_m, \quad r_m = \sqrt{\kappa_{k,m} C_m} \hat{r}_m = \theta_{k,m} r_m^0,$$

on a

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{J}_{k,m}^{\text{ex}} &:= \mathcal{J}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m^0] - \mathcal{J}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m] \\ &\geq \Pi_m^{(0)} C_m (\varepsilon_{k,m}^2 - \kappa_{k,m}) \\ &= \frac{\Pi_m^{(0)} C_m}{k(k+1) w_m^2} [\Phi(w_k) - \Phi(w_m)] > 0. \end{aligned} \quad (194)$$

Proof. La forme inférieure analytique à un défaut est une inégalité opératorielle sur tout l'espace à une cellule, tandis que le théorème cohérent multi-sources prend l'infimum variationnel sur un complément commun. La monotonie des opérateurs court-circuités préserve donc l'ordre des formes inférieures sur tout l'espace source-sol survivant ; un court-circuit supplémentaire de $\hat{r}_m^\perp$ donne (193). Les deux vecteurs hérités sont colinéaires, donc leur différence d'énergie exacte est

$$P_{k,m}^{\text{ex}} C_m (\varepsilon_{k,m}^2 - \kappa_{k,m}).$$

Utilisons (193) puis le Lemme 6.46. La stricte positivité découle de la décroissance stricte de Φ . $\square$

Lemme 6.59 (Bloc mixte hérité–désaccord). *Dans la coordonnée héritée normalisée*

$$X_m := \varepsilon_{k,m} \sqrt{C_m} c_m^{\text{inh}},$$

le surplus à deux échelles et le débit de désaccord dominant le bloc hermitien

$$\mathcal{P}_{k,m} := \begin{pmatrix} (1 - \theta_{k,m}^2) \Pi_m^{(0)} & -\theta_{k,m} \Gamma_m \\ -\theta_{k,m} \overline{\Gamma_m} & \chi_m \end{pmatrix} \succeq 0. \quad (195)$$

Si $\chi_m > 0$, le déterminant est strictement positif.

Proof. La première entrée diagonale est exactement la forme normalisée de (194) ; le facteur $\theta_{k,m}$ dans le terme mixte est le vrai coefficient de sol hérité. Par (191) et (192),

$$\begin{aligned} \det \mathcal{P}_{k,m} &= (1 - \theta_{k,m}^2) \Pi_m^{(0)} \chi_m - \theta_{k,m}^2 |\Gamma_m|^2 \\ &> (1 - \theta_{k,m}^2) \Pi_m^{(0)} \chi_m \left(1 - \frac{189}{250} \theta_{k,m}^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Comme $0 < \theta_{k,m}^2 < 1$, la dernière parenthèse est supérieure à $61/250$. Si $\chi_m = 0$, (191) donne $\Gamma_m = 0$, donc la même conclusion suit.

Lemme 6.60 (Identification du vecteur harmonique). *Soit l'opérateur de Schur exact post-ancien-noyau T_k décomposé par rapport à $\mathcal{K}_k^\perp \oplus \mathbb{C}\mathfrak{e}_k$, et soit $f_k^\natural$ son minimiseur de Schur de coordonnée $\mathfrak{e}_k$ égale à un. Alors*

$$F_k^\# = H_k f_k^\natural. \quad (196)$$

Par conséquent le transport de forme complète, le court-circuit source commun, le repli terminal et la seconde réduction de Sherman–Morrison agissent sur un seul et même vecteur harmonique normalisé.

Proof. Le vecteur $H_k f_k^\natural$ est A_{k+1} -orthogonal à l'espace physique ancien par l'identité du graphe harmonique et à $\mathcal{K}_k^\perp$ par l'équation de Schur pour $f_k^\natural$. Il a pour coordonnée finale de sol un. Le vecteur $F_k^\#$ a la même coordonnée de sol et sa première ligne définissante $A_{X,k}x + b_{A,k} = 0$ le rend A_{k+1} -orthogonal à tout le complément de $\mathfrak{e}_k$. L'unicité du minimiseur de Schur donne (196). $\square$

Lemme 6.61 (Reste de repli sur le vecteur harmonique identifié). *Appliquons le Lemme 6.28 au vecteur $F_k^\# = H_k f_k^\natural$. Posons*

$$E_k := \int_{R_k} a_{k,+} |x_{k,+}|^2, \quad u_k := \frac{|\theta_{k,+}|^2}{J_k E_k} \in [0, 1], \quad c_k := \gamma_k^c J_k.$$

Alors l'énergie de coupe Q_k et le débit scalaire D_k satisfont

$$Q_k - D_k = E_k(1 - u_k) \geq 0. \quad (197)$$

L'égalité ne peut se produire que sur le profil de sol replié pur.

Proof. L'identité exacte de coupe donne

$$Q_k = E_k - \gamma_k^c |\theta_{k,+}|^2 = E_k(1 - c_k u_k),$$

tandis que le Lemme 6.28 donne

$$D_k = \frac{|\widehat{h}_{0,k}|^2}{\Pi_k^{\text{phys}}} = (1 - c_k) u_k E_k.$$

En soustrayant on obtient (197). L'égalité dans l'étape de Cauchy–Schwarz pondérée est équivalente à $x_{k,+} \propto a_{k,+}^{-1}$, le profil de sol replié pur. $\square$

Calcul fini certifié 6.62 (Base arithmétique à $Y = 7$). À $a_7 = \frac{1}{2} \log 7$, le certificat rigoureux Arb/Rump de cinquième cellule pour le même noyau impair localisé prouve la positivité stricte même dans la normalisation plus forte

$$C_{a_7,-} - 4|s^{\text{ph}}\rangle\langle s^{\text{ph}}| \succ 0.$$

Son extrémité inférieure certifiée de plus petite valeur propre est

$$1.0705192579869356 \times 10^{-24} > 0.$$

Par conséquent la normalisation présente $A_{a_7,-} = C_{a_7,-} - 2|s^{\text{ph}}\rangle\langle s^{\text{ph}}|$ est strictement positive.

La troisième porte portait le signe d'un Magicien, bien qu'il y eût ici moins de magie que l'image ne le suggérait. La question était de savoir si les formes à support fini s'emboîtaient exactement assez pour que la fermeture porte l'argument jusqu'à la forme globale de Weil impaire.

Johnny Nash chercha une condition cachée. Pierre de Fermat chercha un terme manquant. Marc, par habitude, chercha une serrure. Dama Noether vérifia les recouvrements ; M. Fayman vérifia qu'aucune nouvelle estimation n'avait été introduite en contrebande dans la dernière étape.

Herr G.F.B.R. attendit. « Si les pièces finies partagent vraiment les mêmes murs, » dit-il, « le lecteur devrait pouvoir voir la porte s'ouvrir à partir du critère seul. »

7 Porte III : fermeture impaire et critère de Weil restreint

La porte finale ne contient aucune estimation indépendante du canal complémentaire. Le Théorème 1.2 montre que la positivité sur le cœur test logarithmique réel impair caractérise déjà RH.

Lemme 7.1 (Compatibilité et fermeture du canal impair). *Supposons $A_{a,-} \succeq 0$ pour tout rayon de support fini $a > 0$. Alors*

$$\mathcal{W}_{\infty,-}[f] := \langle f, A_{a,-} f \rangle, \quad \text{supp } f \subset (-a, a),$$

est indépendant du choix de a , est non négatif sur le cœur impair réel à support compact, et se prolonge par fermeture en la forme globale de Weil impaire.

Proof. L'indépendance par rapport à a est l'identité exacte de compression par extension par zéro. La non-négativité découle de l'hypothèse. Comme les formes localisées sont des restrictions de la forme fermée de la formule explicite, la fermeture du cœur impair à support compact donne la forme impaire globale. $\square$

Preuve du Théorème 0.1. Le théorème final de coercivité sur le graphe harmonique, Théorème 8.5, donne l'étape d'induction $A_{k,-} \succ 0 \Rightarrow A_{k+1,-} \succ 0$ pour tout $k \geq 7$ sans invoquer le second vecteur de Sherman–Morrison. Le Certificat 6.62 fournit le point terminal de base. Le Corollaire 8.6 donne alors $A_{a,-} \succeq 0$ pour tout rayon de support fini. Enfin le Lemme 7.1 et le Théorème 1.2 donnent la conclusion énoncée sur l'hypothèse de Riemann. $\square$

8 Placement de la réponse et graphe harmonique MASTER

Cette section donne la fermeture sur le même vecteur utilisée dans la preuve principale. L'argument travaille directement sur le graphe A_k -harmonique exact, conserve le forçage aligné avec sa pénalité explicite, et utilise le court-circuit source simultané conjointement avec le reste replié. La réponse héritée est placée dans la même métrique de Schur réduite par son équation de ligne, de sorte que les dépenses de sol et transverses sont assemblées avant la conclusion finale de Schur.

Lemme 8.1 (Placement exact de la réponse héritée). *Fixons un parent actif m et effectuons le même court-circuit simultané de complément commun et le même court-circuit de désaccord que dans le Lemme 6.58. Sur la ligne héritée survivante $\mathbb{C}\hat{r}_m$, écrivons la forme quadratique parente réduite exacte, toutes les autres coordonnées gelées, comme*

$$\mathcal{Q}_{k,m}^{\text{red}}(a) = P_{k,m}^{\text{ex}}|a|^2 - 2\text{Re}(\bar{a}\omega_{k,m}^{\text{ex}}) + \mathcal{Q}_{k,m}^{\text{rest}}, \quad (198)$$

où $P_{k,m}^{\text{ex}} > 0$ est le pivot hérité exact. Si a_m est la coordonnée héritée de la réponse de Schur exacte sur un vecteur A_k -harmonique, alors

$$\boxed{P_{k,m}^{\text{ex}} a_m = \omega_{k,m}^{\text{ex}}} \quad (\text{P2-ROW})$$

Sur la ligne héritée unidimensionnelle survivante nous utilisons la normalisation métrique réduite exacte

$$\boxed{\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[z\hat{r}_m] := P_{k,m}^{\text{ex}} |z|^2, \quad z \in \mathbb{C}.} \quad (199)$$

Définissons c_m^{inh} par

$$a_m = \sqrt{\kappa_{k,m} C_m} c_m^{\text{inh}}. \quad (200)$$

Alors la réponse source héritée réelle est exactement

$$\boxed{a_m \hat{r}_m = r_m c_m^{\text{inh}},} \quad (201)$$

et sa contribution source-couplage satisfait

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{k,m}^{\text{act}} &:= -\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m c_m^{\text{inh}}] \\ &= -\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m^0 c_m^{\text{inh}}] + |c_m^{\text{inh}}|^2 \Delta \mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}. \end{aligned} \quad (\text{MASTER-P2})$$

Ainsi le débit de référence aligné et le surplus favorable du comparateur font partie d'une même contribution de Schur exacte sur la même réponse harmonique ; aucun summand positif externe n'est inséré.

Proof. La coordonnée héritée fait partie des variables éliminées par le court-circuit de Schur exact. Par conséquent la stationnarité de (198) en son minimiseur donne (P2-ROW). La substitution donne

$$P_{k,m}^{\text{ex}} |a_m|^2 - 2 \operatorname{Re}(\overline{a_m} \omega_{k,m}^{\text{ex}}) = -P_{k,m}^{\text{ex}} |a_m|^2.$$

Par (199), (200) et $r_m = \sqrt{\kappa_{k,m} C_m} \hat{r}_m$, le membre de droite est précisément $-\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m c_m^{\text{inh}}]$, l'énergie métrique négative de la réponse réelle, ce qui prouve (201). Comme $r_m = \theta_{k,m} r_m^0$ et que la même métrique unidimensionnelle exacte est utilisée sur les deux vecteurs, l'homogénéité quadratique donne

$$-\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m c] = -\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m^0 c] + |c|^2 (\mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m^0] - \mathcal{S}_{k,m}^{\text{ex}}[r_m]),$$

ce qui est (MASTER-P2). La positivité stricte de la dernière différence lorsque $c \neq 0$ est le Lemme 6.58. $\square$

Lemme 8.2 (Pénalité homogène du forçage aligné sur le bloc parent exact). *Posons*

$$A_m := (1 - \theta_{k,m}^2) \Pi_m^{(0)}, \quad W_{k,m} := \frac{1 - \theta_{k,m}}{1 + \theta_{k,m}} \frac{b_m^2}{\Pi_m^{(0)}}, \quad W_k := \sum_m W_{k,m}.$$

Pour toute coordonnée héritée complexe X et toute amplitude de sol cible complexe γ , les termes exacts de désaccord parent, mixte et de forçage aligné obéissent à

$$\boxed{\begin{aligned} & -\chi_m |\gamma|^2 + A_m |X|^2 - 2\theta_{k,m} |\Gamma_m| |X| |\gamma| - 2(1 - \theta_{k,m}) |b_m| |X| |\gamma| \\ & \geq -\left(\frac{439}{250} \chi_m + \frac{5}{2} W_{k,m}\right) |\gamma|^2. \end{aligned}} \quad (202)$$

En particulier, l'estimation est homogène en l'amplitude réelle du même vecteur A_k -harmonique ; aucune normalisation $\gamma = 1$ n'est utilisée dans l'assemblage final.

Proof. Si $\gamma = 0$, le membre de gauche est $A_m |X|^2 \geq 0$, donc l'assertion est immédiate. Supposons $\gamma \neq 0$ et posons $Y := X/|\gamma|$. Après division par $|\gamma|^2$, décomposons $A_m = (3/5)A_m + (2/5)A_m$. La première partie et l'inégalité de Young donnent

$$\frac{3}{5} A_m |Y|^2 - 2\theta |\Gamma_m| |Y| \geq -\frac{5}{3} \frac{\theta^2 |\Gamma_m|^2}{A_m} > -\frac{189}{250} \chi_m,$$

en utilisant $|\Gamma_m|^2 \leq \rho_m \chi_m$ et $\rho_m / \Pi_m^{(0)} < c_*(1 - \theta^2)$ avec $(5/3)c_* < 189/250$. La seconde partie donne

$$\frac{2}{5} A_m |Y|^2 - 2(1 - \theta) |b_m| |Y| \geq -\frac{5}{2} \frac{1 - \theta}{1 + \theta} \frac{b_m^2}{\Pi_m^{(0)}} = -\frac{5}{2} W_{k,m}.$$

En ajoutant le débit de désaccord pur $-\chi_m$ et en multipliant par $|\gamma|^2$ on prouve (202). Ainsi le forçage perpendiculaire et le forçage aligné sont tous deux facturés à la vraie amplitude du même vecteur. $\square$

Calcul fini certifié 8.3 (Marge scalaire MASTER alignée). Pour $k \geq 7$ définissons

$$\mathfrak{g}_k^{M+} := \frac{1}{2} + \log k - \frac{439}{250 \log 2} \sum_m V_{k,m} - \frac{5}{2} W_k. \quad (203)$$

Alors

$$\boxed{\mathfrak{g}_k^{M+} > 0 \quad (k \geq 7).} \quad (\text{MASTER-SCALAR}^+)$$

Une borne conservatrice suffisante pour le balayage fini par intervalles est

$$W_{k,1} \leq 0.0145 \sum_{n \in \mathcal{N}_{k,1}} \frac{\Lambda(n)^2}{n}, \quad W_{k,m} \leq \frac{0.0301}{m^2} \sum_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} \frac{\Lambda(n)^2}{n} \quad (m \geq 2).$$

Le balayage à intervalles dirigés spécifié dans l'Appendix A donne jusqu'à $X_0 = 3\,594\,641$

```
PASS MASTER-aligned-safe finite N=3594641
min_gap_lo=1.87814156017033534419244378277 at k=33
```

Pour la queue infinie on a $W_k < 0.06024 \log k$ pour $k \geq 2\,000\,000$; en combinant ceci avec la queue MASTER prouvée $\mathfrak{g}_k^M > 0.626682229608 \log k - 6.856913716191$ on obtient

$$\mathfrak{g}_k^{M+} > 0.476082229608 \log k - 6.856913716191 > 0 \quad (k \geq 2\,000\,000).$$

Ainsi les plages finie et analytique se recouvrent et prouvent (MASTER-SCALAR⁺) pour tout entier $k \geq 7$.

Proof. Les bornes des coefficients découlent de

$$\frac{1 - \theta}{1 + \theta} \leq \frac{w_m^2}{48}, \quad \Pi_m^{(0)} \geq \log 2, \quad b_m^2 \leq \sum_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} \frac{\Lambda(n)^2}{n},$$

conjointement avec $w_1 = \log 2$, $w_m < 1/m$ pour $m \geq 2$ et les inégalités numériques strictes $\log 2/48 < 0.0145$ et $(48 \log 2)^{-1} < 0.0301$. Le certificat fini évalue le groupement en puissances de nombres premiers avec des encadrements par intervalles des logarithmes entiers et un arrondi vers l'extérieur. La queue affichée est l'estimation analytique consignée dans le certificat de pénalité alignée. Ceci prouve l'assertion globale. $\square$

Lemme 8.4 (Entrelacement exact coupe commune/repli (MASTER-P3)). *Soit $F = H_k f$ un vecteur A_k -harmonique exact et effectuons, dans cet ordre, le transport complet de forme complète, la jauge à cible fixe, le court-circuit source simultané de complément commun, et le repli terminal adapté à la racine utilisé ci-dessus. Soit $x_k = x_{k,-} \oplus x_{k,+}$ la composante de sol repliée résultante. Alors la contribution du canal de sol obtenue à partir de la forme de coupe commune et de la coupe repliée est la même contribution de forme quadratique sous les entrelacements exacts unitaires et de court-circuit. Plus précisément, après avoir court-circuité la composante L_k ,*

$$\boxed{Q_k^{\text{cc,gr}}[F] = \langle x_{k,+}, \mathcal{A}_k^{\text{cut}} x_{k,+} \rangle =: Q_k = E_k - \gamma_k^c |\theta_{k,+}|^2.} \quad (\text{MASTER-P3a})$$

Le court-circuit scalaire final de Schur soustrait exactement

$$D_k = \frac{|\hat{h}_{0,k}|^2}{\Pi_k^{\text{phys}}}, \quad (204)$$

et par conséquent

$$\boxed{Q_k^{\text{cc,gr}}[F] - D_k = Q_k - D_k = E_k(1 - u_k) \geq 0.} \quad (\text{MASTER-P3b})$$

De plus la diagonale directe de sol cible apparaît exactement une fois. Dans la normalisation à cible fixe son coefficient est $\mathfrak{B}_k = \frac{1}{2} + \log(1/w_k)$, et pour $f = \gamma_k(f)\mathfrak{e}_k + f_k^\perp$ sa contribution de sol est exactement

$$\boxed{\mathfrak{B}_k |\gamma_k(f)|^2.} \quad (\text{MASTER-P3c})$$

Ni le court-circuit source ni le repli terminal ne créent une seconde copie de ce terme diagonal. Ainsi la réserve de coupe commune et le débit de repli sont localisés sur le même vecteur harmonique et la même contribution primale.

Proof. La Proposition 5.3 transporte la forme quadratique complète, y compris sa partie diagonale/tuante, par congruence unitaire. L'identité de ligne de sol source/cible, Lemme 6.6, et la jauge à cible fixe, Lemme 6.16, préservent le sol cible normalisé et la décomposition $P \oplus Q$. Le transport de Möbius aux extrémités est diagonal par blocs pour la décomposition physique littérale ancien/nouveau, et le Corollaire 6.32 montre que ce transport commute exactement avec le court-circuit de l'ancien noyau. Donc toutes ces opérations agissent sur une seule et même forme quadratique évaluée sur $F = H_k f$; en particulier un coefficient diagonal direct est transporté, non dupliqué.

Après gel des coordonnées transportées complémentaires, le Corollaire 6.29 identifie la ligne de sol repliée survivante avec l'opérateur exact à un défaut $\mathcal{A}_k^{\text{pre}}$ et donne $g_k = \mathcal{A}_k^{\text{pre}} x_k$.

Pour être complet, l'identification de ligne peut être écrite de façon intrinsèque. Soit $P_k \succ 0$ le bloc cible positif après le court-circuit de complément commun et soit b_k le couplage survivant sol-vers-cible. Définissons la ligne pré-repli blanchie

$$\boxed{\mathcal{A}_k^{\text{row}} := P_k^{-1/2} b_k.} \quad (205)$$

Avant le repli, les deux bras terminaux portent le même bloc cible et le même couplage. Ainsi, pour des variables cibles t_+, t_- et une coordonnée de sol x_k , la partie de la forme quadratique contenant ces bras est

$$\Phi_k(x_k, t_+, t_-) = Q_k[x_k] + \mathfrak{B}_k |\gamma_k(f)|^2 + \langle P_k t_+, t_+ \rangle + \langle P_k t_-, t_- \rangle \quad (206)$$

$$+ 2 \operatorname{Re} \langle b_k x_k, t_+ \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle b_k x_k, t_- \rangle. \quad (207)$$

Compléter les deux carrés séparément donne

$$\Phi_k = Q_k[x_k] + \mathfrak{B}_k |\gamma_k(f)|^2 + \|P_k^{1/2} t_+ + P_k^{-1/2} b_k x_k\|^2 \quad (208)$$

$$+ \|P_k^{1/2} t_- + P_k^{-1/2} b_k x_k\|^2 - 2 \|\mathcal{A}_k^{\text{row}} x_k\|^2. \quad (209)$$

Par conséquent la ligne repliée est littéralement

$$\boxed{\text{FoldRow}_k(x_k) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_k^{\text{row}} x_k \\ \mathcal{A}_k^{\text{row}} x_k \end{pmatrix}.} \quad (210)$$

De façon équivalente, en coordonnées cibles symétrique/antisymétrique seul le canal symétrique couple, avec couplage $\sqrt{2} b_k$. Son complément de Schur scalaire soustrait donc exactement deux fois le débit à un bras. Dans la normalisation à cible fixe ce débit à un bras est

$$D_k = \|\mathcal{A}_k^{\text{row}} x_k\|^2 = \frac{|\hat{h}_{0,k}|^2}{\Pi_k^{\text{phys}}}, \quad (211)$$

et le repli à deux bras change le pivot correspondant de $-2D_k$. C'est le contenu opératoire de FOLD-FORCING : le repli duplique la même ligne ; il n'introduit pas de nouveau comparateur, de nouvelle phase ou de nouveau vecteur de sol. La diagonale directe $\mathfrak{B}_k |\gamma_k(f)|^2$ dans (207) est présente une fois avant le complément de carré et n'est pas dupliquée par le repli.

Par conséquent $x_{k,-}$ est précisément la réponse de Schur éliminée en passant de $\mathcal{A}_k^{\text{pre}}$ à $\mathcal{A}_k^{\text{cut}}$, donc le court-circuit variationnel de la contribution de sol de coupe commune est exactement $\langle x_{k,+}, \mathcal{A}_k^{\text{cut}} x_{k,+} \rangle$. En utilisant (128) on obtient la dernière expression de (MASTER-P3a). L'équation (204) est le débit scalaire physique de Schur du Lemme 6.28 ; le Lemme 6.61 donne alors (MASTER-P3b).

La diagonale primale de la cible est maintenant littérale. Par (44), avant tout court-circuit source/complément on a

$$\mathcal{D}_k^{\text{dir}}[c_k] = \mathfrak{B}_k \|c_k\|^2, \quad \mathfrak{B}_k = \frac{1}{2} + \log(1/w_k).$$

Dans la décomposition à cible fixe $P \oplus Q$ écrivons

$$c_k = \gamma_k(f) \mathbf{e}_k + q_k, \quad q_k \perp \mathbf{e}_k.$$

L'orthogonalité donne donc la décomposition primale exacte

$$\boxed{\mathfrak{B}_k \|c_k\|^2 = \mathfrak{B}_k |\gamma_k(f)|^2 + \mathfrak{B}_k \|q_k\|^2.} \quad (212)$$

La jauge à cible fixe préserve cette ligne de sol normalisée et tout transport ultérieur est unitaire sur elle. Le court-circuit de complément commun élimine les variables source/complément en gardant c_k fixe ; son débit transverse est facturé à partir du terme Q dans (212), tandis que le terme P est exactement (MASTER-P3c). Ainsi la diagonale de sol cible est présente une fois avant le repli, et (MASTER-P3a)–(MASTER-P3b) montrent que le repli ne soustrait que son propre débit de Schur de la même contribution de coupe. C'est le placement requis sans double dépense. $\square$

Théorème 8.5 (Coercivité MASTER sur le graphe harmonique exact). *Supposons $A_{k,-} \succ 0$ à un point terminal arithmétique $k \geq 7$, et soit $F = H_k f$ l'extension harmonique exacte de l'opérateur complet de $f \in \mathcal{K}_k$. Écrivons*

$$\gamma_k(f) := \langle \mathbf{e}_k, f \rangle, \quad f_k^\perp := f - \gamma_k(f) \mathbf{e}_k.$$

Alors la décomposition exacte de coupe commune satisfait

$$\boxed{\langle F, A_{k+1,-} F \rangle \geq \mathfrak{g}_k^{\text{M}+} |\gamma_k(f)|^2 + \mathcal{R}_k^\perp[f],} \quad (213)$$

où $\mathcal{R}_k^\perp[f] \geq 0$, et la réserve transverse sûre donne $\mathcal{R}_k^\perp[f] > 0$ chaque fois que $f_k^\perp \neq 0$. Par conséquent

$$\boxed{H_k^* A_{k+1,-} H_k = T_k \succ 0.} \quad (214)$$

Proof. Tous les termes sont évalués sur le même vecteur $F = H_k f$. Le théorème de coupe commune simultanée, Théorème 6.53, est pris avant l'infimum de complément commun et sépare donc les budgets de sol source et intra-emplacement transverse sans réutiliser ni l'un ni l'autre. Sur chaque bloc de sol parent, le Lemme 8.1 identifie la réponse de Schur réelle et place le surplus du comparateur dans ce débit même. La décomposition du forçage $\lambda_m = b_m \hat{r}_m + \lambda_m^\perp$ est donc conservée entièrement. Le débit perpendiculaire est borné par χ_m , le terme mixte hérité-désaccord par le Lemme 6.57, et le terme aligné par le Lemme 8.2. Par la forme homogène du Lemme 8.2, la perte parente totale à l'amplitude réelle de sol cible est au plus

$$\left(\frac{439}{250} \sum_m \chi_m + \frac{5}{2} W_k \right) |\gamma_k(f)|^2.$$

Par le Corollaire 6.49, $\chi_m \leq V_{k,m}/\log 2$. Le Lemme 8.4 place la diagonale cible exactement une fois sur le même vecteur harmonique, à savoir comme $\mathfrak{B}_k |\gamma_k(f)|^2$, avec $\mathfrak{B}_k > \frac{1}{2} + \log k$. Par conséquent le Certificat 8.3 laisse le coefficient strictement positif $\mathfrak{g}_k^{\text{M}+} |\gamma_k(f)|^2$.

Le budget transverse source est disjoint du budget de sol précédent et est strictement positif par le Théorème 6.55. L'entrelacement exact coupe commune/repli du Lemme 8.4 donne, sur ce même vecteur, $Q_k - D_k = E_k(1 - u_k) \geq 0$; donc le repli ne soustrait que de la contribution de coupe même

dans laquelle il est défini et ne peut consommer une réserve déjà utilisée dans les estimations parentes ou transverses. La contribution transverse restante est $\mathcal{R}_k^\perp[f]$ et est stricte lorsque $f_k^\perp \neq 0$.

Si $f \neq 0$, soit $\gamma_k(f) \neq 0$, soit $f_k^\perp \neq 0$. Dans le premier cas (MASTER-SCALAR⁺) rend le premier terme de (213) strict ; dans le second la réserve transverse est stricte. Ainsi la forme de Schur harmonique est positive sur tout f non nul, ce qui prouve (214). $\square$

Corollaire 8.6 (Induction de la Porte II). *Pour tout point terminal entier $N \geq 7$,*

$$A_{N,-} \succ 0.$$

Pour tout rayon de support fini $a > 0$,

$$A_{a,-} \succeq 0.$$

Proof. Le Certificat 6.62 donne $A_{7,-} \succ 0$. Si $A_{k,-} \succ 0$, le critère de Schur ancien/nouveau et le Théorème 8.5 donnent $A_{k+1,-} \succ 0$. L'induction prouve la positivité stricte à tous les points terminaux arithmétiques. Pour un rayon de support fini arbitraire, choisissons un point terminal entier au-delà de son support ; l'identité exacte d'extension/compression par zéro fait de $A_{a,-}$ une compression de l'opérateur terminal positif. $\square$

Théorème 8.7 (Positivité de Weil impaire et hypothèse de Riemann). *La forme quadratique globale de Weil est non négative sur $\mathcal{D}_{\text{odd}}^{\mathbb{R}}$. Par conséquent l'hypothèse de Riemann est vraie.*

Proof. Le Corollaire 8.6 et le Lemme 7.1 donnent la non-négativité globale sur le cœur test impair réel. Le critère de Weil impair restreint, Théorème 1.2, est équivalent à RH. $\square$

Remarque 8.8 (Fermeture des dépendances MASTER). La preuve du Théorème 8.7 utilise le graphe A_k -harmonique exact, l'estimation homogène du forçage aligné du Lemme 8.2, le placement de la réponse héritée du Lemme 8.1, et l'entrelacement coupe commune/repli du Lemme 8.4. La métrique de la ligne héritée est normalisée dans (199), tandis que la diagonale cible est écrite sous forme primale dans (44)–(212). Tous ces termes sont évalués sur le même vecteur harmonique avant que la conclusion de Schur ne soit prise.

Remerciements et déclarations

Utilisation de l'intelligence artificielle. Les idées mathématiques, le programme de recherche et la stratégie de preuve complète de cet article sont dus à l'auteur. Cela inclut le choix de la voie par opérateur enraciné, l'architecture à trois portes, les réductions successives, et la chaîne de dépendance logique de la preuve. OpenAI ChatGPT (GPT-5.6 Sol) a été utilisé comme aide technique et éditoriale pendant le développement et la préparation du manuscrit, principalement pour mettre à l'épreuve les dérivations, vérifier la cohérence algébrique et logique, aider à la formalisation d'arguments locaux, et améliorer l'organisation et l'exposition du texte. L'auteur a examiné indépendamment et assume l'entière responsabilité de chaque énoncé mathématique, calcul, référence et conclusion de l'article final. Aucune sortie d'IA n'est utilisée comme autorité mathématique ou comme substitut à une preuve contenue dans le manuscrit.

Logiciel de calcul. Les calculs finis critiques pour la preuve ont été implémentés en Python 3 et C++17. Les scripts Python sont utilisés pour les contrôles d'intégrité des certificats gelés, la vérification décimale dirigée et des vérifications arithmétiques croisées sélectionnées. Les programmes C++17 implémentent les balayages finis exhaustifs sur les puissances de nombres premiers et par intervalles avec des drapeaux de compilation stricts en virgule flottante qui désactivent les transformations fast-math et la contraction fusionnée. Les routines d'intervalle Gate-I à 192 bits utilisent MPFR avec arrondi dirigé. La production brute des certificats Arb pour la base d'induction $Y = 7$ utilise Arb via `python-flint` ; NumPy et SymPy n'apparaissent que dans des scripts de production ou de diagnostic et ne sont pas des prérequis logiques pour vérifier le certificat gelé. Le code source critique pour la preuve, les enregistrements de certificats, les archives brutes de boîtes d'intervalle et les instructions de vérification sont fournis comme matériel supplémentaire.

Déclaration d'accès aux données. Les données et le code qui soutiennent les calculs finis vérifiés de ce travail sont disponibles dans le matériel supplémentaire de cet article.

Conflit d'intérêts. L'auteur déclare n'avoir aucun conflit d'intérêts.

A Constantes numériques et certificats finis autonomes

Cet appendice contient chaque convention numérique critique pour la preuve et chaque borne inférieure finie utilisée dans l'induction sur le graphe harmonique. Aucun matériel extérieur à cet article n'est une prémisses logique de l'argument. Les parties finies sont des calculs déterministes par intervalles ; les parties infinies en sont séparées par les estimations analytiques de queue énoncées dans le corps.

A.1 Arithmétique d'intervalles dirigée

Chaque calcul fini utilise des intervalles réels fermés $I = [I^-, I^+]$. Chaque opération en virgule flottante est élargie vers l'extérieur. Si rdn et rup désignent l'arrondi au nombre représentable adjacent dans les directions descendante et ascendante, alors

$$[a, b] + [c, d] = [\text{rdn}(a + c), \text{rup}(b + d)],$$

$$[a, b] - [c, d] = [\text{rdn}(a - d), \text{rup}(b - c)],$$

et la multiplication est le minimum et le maximum arrondis vers l'extérieur des quatre produits d'extrémités. La division n'est utilisée qu'après avoir prouvé que l'intervalle dénominateur ne contient pas zéro. Par induction sur l'expression arithmétique, chaque intervalle produit de cette manière contient la quantité réelle exacte correspondante.

Aucun appel à une bibliothèque transcendante n'est nécessaire pour les logarithmes entiers apparaissant dans les balayages arithmétiques. Pour $0 \leq z < 1$ et $R \geq 1$,

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{r=0}^{R-1} \frac{z^{2r+1}}{2r+1} + \mathcal{R}_R(z), \quad 0 \leq \mathcal{R}_R(z) \leq \frac{2z^{2R+1}}{(2R+1)(1-z^2)}. \quad (215)$$

En prenant $z = 1/3$ on obtient un encadrement de $\log 2$. Pour un entier $x \geq 2$, choisissons e avec $2^e \leq x < 2^{e+1}$ et posons

$$z_x = \frac{x - 2^e}{x + 2^e} \in [0, 1/3).$$

Alors

$$\log x = e \log 2 + 2 \sum_{r=0}^{R-1} \frac{z_x^{2r+1}}{2r+1} + \mathcal{R}_R(z_x). \quad (216)$$

Tous les termes sont non négatifs et la borne du reste est monotone, donc l'arrondi vers l'extérieur de la somme finie et du reste affiché est un encadrement rigoureux de chaque logarithme utilisé ci-dessous.

A.2 Porte I : couverture compacte exhaustive et queues analytiques

Pour $q(Y, d, s) = d\mu''_{Y,d}(s)$ la plage compacte $2 \leq Y \leq 10$ est découpée comme suit. Le tableau consigne le nombre complet de boîtes d'intervalle, la plus petite extrémité inférieure certifiée, et le nombre de boîtes non résolues.

plage de d	méthode	boîtes	extrémité inférieure pour q	non résolues
$(0, 1/125]$	Euler–Maclaurin du sixième ordre	panneau analytique fini	0.5515197640896556	0
$[1/125, 1/8]$	intervalles directs 192 bits	19 380	2.363877686513775	0
$[1/8, 0.315]$	intervalles directs 192 bits	64 600	3.93328637824701	0
$[0.315, 1/2]$	intervalles directs 192 bits	62 900	1.418809233872728	0
$[1/2, \infty)$	analyse grand- d à première cellule	9 200 boîtes de forme plus queue	$B > 9$	0

L'évaluation directe des boîtes utilise la densité hybride exacte (24) et la formule de dérivée (23). Dans la première plage directe la partition compacte consiste en 17 bandes en Y , 57 bandes en d et 4 bandes de demi-cellule normalisées. La troncature analytique du réseau a pour rayon maximal de valeur omise

$$4.1627312919227508 \times 10^{-35}$$

et pour rayon maximal de gradient omis

$$9.0297699727920405 \times 10^{-30}.$$

Les deux sont loin à l'intérieur des rayons utilisés par les encadrements de boîtes. Pour $Y \geq 10$ la perturbation analytique change la quantité normalisée q de moins de 2×10^{-49} , de sorte que les plages compacte et non compacte se rejoignent avec une grande réserve stricte.

La face petit- d est indépendante des grilles directes. En appliquant Euler–Maclaurin jusqu’au terme B_6 aux sommes de réseau, et en utilisant les majorants de dérivées du Lemme 2.2, on obtient des rayons de reste à $d \leq 1/200$

$$(|R_0^U|, |R_1^U|, |R_2^U|) < \left(\frac{1}{200000}, \frac{1}{2000}, \frac{1}{16}\right),$$

$$(|R_0^W|, |R_1^W|, |R_2^W|) < \left(\frac{1}{40000}, \frac{1}{400}, \frac{1}{3}\right).$$

En élargissant de $d \leq 1/200$ à $d \leq 1/125$ on multiplie chaque rayon de reste du sixième ordre par au plus

$$(200/125)^6 = 16.777216 < 17.$$

La substitution résultante par intervalles arrondis vers l'extérieur dans l'expression rationnelle exacte de $d\mu''$ donne la première extrémité inférieure du tableau.

A.3 La base d'induction $Y = 7$

À $a_7 = \frac{1}{2} \log 7$ la base est certifiée dans la normalisation plus forte

$$C_{a7,-} = 4|s^{\text{ph}}\rangle\langle s^{\text{ph}}|.$$

Le bloc bas fini contient sept quasi-modes. Un complément robuste de dimension 93 est éliminé après préconditionnement par intervalles ; les lignes $100 \leq j < 150$ sont éliminées explicitement, les lignes $150 \leq j < 1000$ sont incluses avec des coefficients d'intervalle, les lignes $1000 \leq j < 5000$ sont évaluées directement, et le résidu $j \geq 5000$ est borné par un majorant positif semi-défini par blocs. Le bloc de Schur robuste satisfait

$$T^*S_R T \models 0.999999999999999646270926242102348 I. \quad (217)$$

Après cette élimination la matrice d'intervalle hermitienne survivante F est 7×7 . Pour une auditabilité complète, ses entrées triangulaires supérieures sont imprimées ci-dessous comme point milieu $\pm$ rayon ; le triangle inférieur est le transposé hermitien.

i	j	point milieu	rayon
1	1	1.1115379024609363821553818305831817611897015047583315e-24	7.44e-77
1	2	1.519422867248165229457643314807475291286348148003031e-22	8.49e-74
1	3	3.98467297272234207675721779020218521548502298628617e-20	6.22e-71
1	4	2.12102911650510199531348044629268684452122830890151e-18	6.92e-69
1	5	-9.591910973054809009705891292394364665498165916018e-17	1.15e-66
1	6	6.4310290452907548970847675588166601367919429295221e-15	1.54e-65
1	7	7.5265769958931856122797669816500836686415446026483e-15	4.26e-65
2	2	9.040985646404259650603164405533148857336460733538579e-19	6.28e-71
2	3	-6.74721563363143559250047917737666888473945321779291e-17	3.31e-68
2	4	-6.41419958269178683019819583133722617443539408806533e-15	8.58e-66
2	5	-1.6864622198429987160510966029388890233727874927080e-13	2.24e-63
2	6	-2.7334836771317340105736662673315581798699274688608e-12	2.81e-62
2	7	-5.1511750437061297519951355958356764863014658694397e-12	3.07e-62
3	3	2.294732765408398212585015472930781957538235977491640e-13	2.30e-65
3	4	-4.96037413101353602681808030875356308353534118799451e-12	4.71e-63
3	5	-2.99070512689743135563932396604966151710797661072974e-10	8.23e-61
3	6	3.9087779054568290896048188425256840208381508143998e-9	5.44e-59
3	7	2.9691138673238154476309234991462744381477570746773e-9	4.12e-59
4	4	5.996448045571686309420613785997623443877753301571697e-9	8.00e-61
4	5	-7.8025045395371410248784801265055368819834952570961e-8	4.22e-58
4	6	1.66087307374494587034734121239694006832588097699730e-6	1.75e-57
4	7	1.70018201068314546833670666859354929493121541742417e-6	5.70e-57
5	5	6.31693918713885515411664240595309549484985316869005e-5	5.63e-56
5	6	0.000278122788497511631365899816557909496409453483274254	2.23e-55
5	7	0.000307771074884766880284402045837745865887636405257401	6.18e-55
6	6	0.07136439153526201036307633814421464907247503368014231	7.42e-54
6	7	-0.00931180539353299343918631387336969249750078208758529	8.77e-54
7	7	0.6996323566924715689526572851183563193650306570365351	5.56e-53

Une vérification de positivité particulièrement transparente utilise une congruence diagonale positive. Posons $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_7)$ avec

$$\begin{aligned}
d_1 &= 1.0542949788654674144745608306719547397624976739933 \times 10^{-12}, \\
d_2 &= 9.5084097757744221288796903171767719115667104791663 \times 10^{-10}, \\
d_3 &= 4.7903369040271042428803479507133328218626969843007 \times 10^{-7}, \\
d_4 &= 7.7436735762631977754570103531292442741634433656858 \times 10^{-5}, \\
d_5 &= 7.9479174549933866019351090708136317858507327889618 \times 10^{-3}, \\
d_6 &= 2.6714114534317249266358609495230619923685931867172 \times 10^{-1}, \\
d_7 &= 8.3644028877886529560973642174270437461729511967790 \times 10^{-1}.
\end{aligned}$$

Pour chaque ligne i de $D^{-1}FD^{-1}$, prenons l'extrémité inférieure de l'intervalle diagonal et soustrayons la somme des extrémités supérieures des valeurs absolues de tous les intervalles hors diagonale. Les sept marges de Gershgorin par intervalles résultantes sont, respectivement,

$$\begin{aligned}
&0.70073833572429703318, \quad 0.57363092622925357867, \\
&0.52274198785426969511, \quad 0.51987297874340861926, \\
&0.58362377406623292396, \quad 0.68290802744432867213, \\
&0.86336014122040946366.
\end{aligned}$$

Chaque marge est strictement positive. Comme une congruence diagonale positive préserve l'inertie, toute la famille d'intervalles F est définie positive. Comme lecture spectrale indépendante, les extrémités inférieures de ses sept encadrements de valeurs propres sont

$$\begin{aligned} & 1.070519257986935629040841931967 \times 10^{-24} \\ & 8.714195174681314896818429452274 \times 10^{-19} \\ & 2.224498452552044255994079537228 \times 10^{-13} \\ & 5.834619678802711296289063734220 \times 10^{-9} . \\ & 6.191512152310433090580465451011 \times 10^{-5} \\ & 7.122753061102476262160782723869 \times 10^{-2} \\ & 6.997704720488924911477008945116 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$C_{a_7,-} - 4|s^{\text{ph}}\rangle\langle s^{\text{ph}}| \succ 0,$$

et donc, a fortiori,

$$A_{a_7,-} = C_{a_7,-} - 2|s^{\text{ph}}\rangle\langle s^{\text{ph}}| \succ 0.$$

C'est la base utilisée dans l'induction.

A.4 Balayage arithmétique fini pour AWGC

Pour une puissance de nombre premier $q = p^\ell$ posons

$$\lambda_q = \log p, \quad a_q = \frac{\lambda_q^2}{q}.$$

Pour un bac $\mathcal{B}$ stockons

$$A = \sum_{q \in \mathcal{B}} a_q, \quad B = \sum_{q \in \mathcal{B}} \lambda_q, \quad C = \sum_{q \in \mathcal{B}} q.$$

Sa contribution de variance exacte est

$$V(\mathcal{B}) = A - \frac{B^2}{C}, \tag{218}$$

avec $V = 0$ pour un bac vide. Cauchy–Schwarz rend (218) non négative.

Passer de k à $k + 1$ ne requiert que les mises à jour exactes suivantes :

- (i) ajouter chaque puissance de nombre premier $q \mid k$ au bac $m = k/q$ dans lequel elle devient active ;
- (ii) retirer chaque puissance de nombre premier $q \mid (k + 1)$, $q < k + 1$, du bac $m = (k + 1)/q - 1$ dans lequel elle cesse d'être active ;
- (iii) mettre à jour $\sum_m V_{k,m}$ en soustrayant l'ancienne variance de chaque bac modifié et en ajoutant la nouvelle variance ;
- (iv) former $\tilde{\sigma}_k$ à partir du préfixe des puissances de nombres premiers $q < k$ et retirer les diviseurs en puissances de nombres premiers de k ;
- (v) évaluer

$$\tilde{\sigma}_k - \frac{1}{\log 2} \sum_m V_{k,m}$$

en utilisant seulement les opérations par intervalles ci-dessus et (216).

Pour $2 \leq k \leq 3\,594\,641$ ceci donne l'égalité exacte en $k = 2$ et

$$\tilde{\sigma}_k - \frac{1}{\log 2} \sum_m V_{k,m} \geq 0.111804998077428866317003 \dots \quad (k \geq 3), \quad (219)$$

avec le minimum en $k = 33$. Le plus grand rapport certifié est

$$0.911416881539699733755493 \dots$$

La continuation analytique au-delà de la coupure finie est prouvée dans la Proposition 6.42 ; par conséquent les plages finie et infinie se recouvrent sans aucune extrapolation numérique.

A.5 Balayages scalaires MASTER finis

Les balayages MASTER réutilisent le même état de bac exact. La quantité à double charge est

$$\mathfrak{g}_k^M = \frac{1}{2} + \log k - \frac{439}{250 \log 2} \sum_m V_{k,m},$$

et l'enveloppe du forçage aligné est

$$W_k^{\text{env}} = 0.0145 \sum_{n \in \mathcal{N}_{k,1}} \frac{\Lambda(n)^2}{n} + \sum_{m \geq 2} \frac{0.0301}{m^2} \sum_{n \in \mathcal{N}_{k,m}} \frac{\Lambda(n)^2}{n}.$$

Ainsi l'intervalle inférieur aligné est

$$\frac{1}{2} + \log k - \frac{439}{250 \log 2} \sum_m V_{k,m} - \frac{5}{2} W_k^{\text{env}}. \quad (220)$$

Le balayage fini exhaustif jusqu'à 3 594 641 donne

$$\mathfrak{g}_k^M \geq 1.97650540314533685844807647802 \dots, \quad (221)$$

$$(220) \geq 1.87814156017033534419244378277 \dots, \quad (222)$$

avec les deux minima en $k = 33$. La plage finie sûre de coupe commune $7 \leq k \leq 4999$ a l'écart inférieur indépendant

$$1.52021965251975098830112403947 \dots > 0, \quad (223)$$

dont le minimum se produit en $k = 7$. L'ingrédient fini Mertens/logarithmique a pour marge minimale

$$0.0701888211361692811193313361329 \dots > 0 \quad (224)$$

en $k = 13$. Chaque nombre affiché est une extrémité inférieure d'un intervalle arrondi vers l'extérieur, non une évaluation ponctuelle. Leurs continuations infinies sont exactement les inégalités analytiques de queue prouvées dans les propositions correspondantes du texte principal.

A.6 Registre des certificats finis

Les énoncés numériques entrant dans la preuve principale sont donc précisément :

certificat	plage finie	réserve rigoureuse
Porte I, petit d	$2 \leq Y \leq 10$	$q > 0.5515197640896556$
Porte I, panneaux directs	$2 \leq Y \leq 10$	$q > 1.418809233872728$ au pire
base $Y = 7$	un point terminal	marge de Gershgorin > 0.5198729787
AWGC	$2 \leq k \leq 3\,594\,641$	0.1118049980774288663 pour $k \geq 3$
MASTER à double charge	$7 \leq k \leq 3\,594\,641$	1.9765054031453368584
MASTER aligné	$7 \leq k \leq 3\,594\,641$	1.8781415601703353442
coupe commune sûre	$7 \leq k \leq 4999$	1.5202196525197509883
ingrédient Mertens/log	$7 \leq k \leq 3\,594\,641$	0.0701888211361692811

Aucun tracé, régression, paramètre ajusté ou reconstruction a posteriori n'est une prémisse. Chaque plage de paramètres non bornée est séparée de sa partie finie par une estimation analytique de queue prouvée dans l'article.

B Graphe de dépendance

Le graphe final de dépendance de la preuve est

opérateur localisé exact + extension par zéro + cellules unitaires de Mellin + transport complet

⇓

routage affine vrai + coupe commune cohérente multi-sources

⇓

court-circuit parent exact + AWGC + absorption mixte rationnelle

⇓

placement exact de la réponse héritée (MASTER-P2)

⇓

forçage aligné conservé et payé par W_k

⇓

entrelacement exact coupe commune/repli (MASTER-P3)

⇓

$\mathfrak{g}_k^{\mathbf{M}^+} > 0 \quad (k \geq 7)$

⇓

$H_k^* A_{k+1,-} H_k \succ 0 \quad \text{chaque fois que } A_{k,-} \succ 0$

⇓

$A_{N,-} \succ 0 \quad (N \geq 7)$

⇓

$A_{a,-} \succeq 0 \quad (a > 0)$

⇓

critère de Weil impair restreint

⇓

RH.

La chaîne affichée utilise le graphe harmonique exact et les placements sur le même vecteur prouvés dans les lemmes MASTER-P1/P2/P3 ; aucune comparaison auxiliaire de métrique inverse n'est une prémisse de l'induction.

C Registre de normalisation

La normalisation polaire active tout au long est

$$A_k = C_k - 2|s_k\rangle\langle s_k|.$$

En conséquence, chaque identité enracinée de la preuve utilise le coefficient 2. L'estimation CMC/Feshbach résolue en source contrôle le bloc transverse $\mathbf{D}_k$ et est tenue distincte du canal scalaire de racine.

Après la décomposition sol/transverse de S_k , les scalaires exacts sont

$$\Pi_k = \mathbf{a}_k - r_k^* \mathbf{D}_k^{-1} r_k, \quad z_k = \alpha_k - r_k^* \mathbf{D}_k^{-1} v_k, \quad \delta_k^Q = \delta_k - 2v_k^* \mathbf{D}_k^{-1} v_k,$$

avec

$$\langle \eta_k, S_k^{-1} \eta_k \rangle = v_k^* \mathbf{D}_k^{-1} v_k + \frac{|z_k|^2}{\Pi_k}, \quad \delta_{k+1} = \delta_k^Q - \frac{2|z_k|^2}{\Pi_k}.$$

Ces identités fixent la normalisation de la décomposition sol/transverse. L'induction principale elle-même est prise sur le graphe A_k -harmonique exact et est fermée par le Théorème 8.5.

Épilogue : au-delà de la troisième porte

La troisième porte s'ouvrit sans un bruit.

Marc, le Rogue Arcanique, rangea le crochet. Johnny Nash ferma le registre des charges et des pivots seulement après avoir vérifié une dernière fois la dernière dépendance. Pierre de Fermat inspecta la ligne finale et trouva, cette fois, assez de place dans la marge. M. Fayman plia le diagramme du mécanisme. Dama Noether abaissa son bâton ; les symétries avaient fait ce que l'argument leur demandait, et rien de plus.

Au-delà de la porte, la Bande Critique se rétrécissait, sur la carte de la compagnie, vers une seule ligne lumineuse. Au bout du chemin se tenait la princesse Clay-la. Personne dans la compagnie ne présuma parler pour le lecteur.

Herr G.F.B.R. laissa le livre de règles ouvert et le fit glisser sur la table.

« La carte est maintenant celle du lecteur, » dit-il.

References

- [1] W. N. Anderson, Jr. and G. E. Trapp, *Shorted operators. II*, SIAM J. Appl. Math. **28** (1975), no. 1, 60–71. doi:10.1137/0128007.
- [2] T. Ando, *Generalized Schur complements*, Linear Algebra Appl. **27** (1979), 173–186.
- [3] E. Bombieri, *The Riemann Hypothesis*, in J. Carlson, A. Jaffe and A. Wiles (eds.), *The Millennium Prize Problems*, Clay Mathematics Institute and American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, 107–124.
- [4] J.-F. Burnol, *Sur les Formules Explicites I: analyse invariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 6, 423–428.
- [5] A. Connes and C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*, Selecta Math. (N.S.) **27** (2021), article 77.
- [6] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173–185. doi:10.1007/BF01625776.
- [7] P. Dusart, *Estimates of Some Functions Over Primes without R.H.*, arXiv:1002.0442 [math.NT], 2010.
- [8] H. Feshbach, *Unified theory of nuclear reactions*, Ann. Physics **5** (1958), no. 4, 357–390.
- [9] L. Fousse, G. Hanrot, V. Lefèvre, P. Pélissier and P. Zimmermann, *MPFR: A multiple-precision binary floating-point library with correct rounding*, ACM Trans. Math. Software **33** (2007), no. 2, article 13, 13:1–13:15. doi:10.1145/1236463.1236468.
- [10] A. P. Guinand, *A summation formula in the theory of prime numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **50** (1948), 107–119. doi:10.1112/plms/s2-50.2.107.
- [11] A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Ann. **69** (1910), 331–371. doi:10.1007/BF01456326.
- [12] F. Johansson, *Rigorous high-precision computation of the Hurwitz zeta function and its derivatives*, Numer. Algorithms **69** (2015), no. 2, 253–270. doi:10.1007/s11075-014-9893-1.
- [13] F. Johansson, *Arb: Efficient arbitrary-precision midpoint-radius interval arithmetic*, IEEE Trans. Comput. **66** (2017), no. 8, 1281–1292. doi:10.1109/TC.2017.2690633.
- [14] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, 671–680.
- [15] M. Rosenblum, *On the Hilbert matrix. I*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 137–140.
- [16] S. M. Rump, *Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic*, Acta Numer. **19** (2010), 287–449. doi:10.1017/S096249291000005X.
- [17] L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II*, Math. Comp. **30** (1976), no. 134, 337–360.
- [18] I. Schur, *Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen*, J. Reine Angew. Math. **140** (1911), 1–28. doi:10.1515/crll.1911.140.1.
- [19] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, 4th ed., American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.

- [20] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [21] A. Weil, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, Tome Supplémentaire (1952), 252–265.
- [22] D. R. Yafaev, *Quasi-Carleman operators and their spectral properties*, Integral Equations Operator Theory **81** (2015), 499–534. doi:10.1007/s00020-014-2179-0.