

Positivité de Weil dans des fenêtres compactes : une réduction finie, bornes bilatérales certifiées, et une loi de décroissance de Landau–Widom

XUEFENG ZHU

School of Mechanics and Aerospace Engineering,
State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and
CAE Software for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China

xuefeng@dlut.edu.cn

3 septembre 2026

Abstract

Le critère de Weil énonce que l’hypothèse de Riemann (RH) est équivalente à la non-négativité d’une forme quadratique explicite $Q(f)$ sur des fonctions test. Pour f à support dans une fenêtre $[-L, L]$, nous étudions l’infimum normalisé $\lambda^*(L) = \inf_f Q(f)/\|f\|_2^2$ des deux côtés.

Bornes inférieures (inconditionnelles). La positivité sur support borné est classique pour $\text{supp } f \subseteq [-\frac{\log 2}{2}, \frac{\log 2}{2}]$ (Yoshida ; Connes–Consani par une méthode différente). Nous prouvons, par calcul certifié, que $Q(f) \geq 8.9 \times 10^{-18} \|f\|_2^2$ pour tout $\text{supp } f \subseteq [-0.8, 0.8]$, c’est-à-dire pour un support d’autocorrélation 1.6, soit 2.3 fois la plage classique. La preuve repose sur une réduction en un seul coup : une enveloppe ponctuelle pour le symbole de Weil, avec une constante de peigne que l’équidistribution de Weyl montre optimale, convertit la positivité sur toute la fenêtre en la semi-définie positivité d’une seule matrice finie, dont les entrées convergent super-exponentiellement et dont le couplage à la queue rejetée est de taille 10^{-100} . La même machinerie appliquée au secteur de parité impaire montre que la positivité certifiée vaut pour des fonctions test complexes *arbitraires* de support 1.6, et que l’état fondamental de la fenêtre est simple et pair, avec des séparations bilatérales certifiées ; c’est précisément l’hypothèse spectrale requise par le récent programme d’opérateurs de Connes, Consani, Moscovici et van Suijlekom. Nous rapportons aussi un calcul exploratoire au support 2.38, et le coût, doublement exponentiel, pour en faire un certificat.

Bornes supérieures (inconditionnelles). Les mêmes bornes variationnelles supérieures sont réévaluées entièrement du côté géométrique de la formule explicite—une somme finie sur les nombres premiers, une intégrale archimédienne compacte et un pôle explicite—en arithmétique d’intervalles, sans recours aux zéros ni à RH. Nous obtenons des bornes variationnelles supérieures certifiées inconditionnelles pour $\lambda^*(L)$, jusqu’à 3.2×10^{-283} à $L = 2$. Elles suivent la loi d’échelle empirique

$$-\ln \lambda^*(L) \simeq 2\pi^2 \frac{N(T^*)}{\ln N(T^*)}, \quad T^* = 2\pi e^{2L},$$

avec N la fonction de comptage des zéros. La décroissance est donc plus rapide que toute exponentielle en L ; l’échelle T^* est la limite de résolution spectrale de la fenêtre ; et $2\pi^2$ correspond au taux de plongement des valeurs propres de Landau–Widom pour les opérateurs de limitation temps–bande. La loi à un paramètre ajuste les quatre points asymptotiques $L = 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$ avec des résidus inférieurs à 0.7%. Hors échantillon, avec les deux modèles calibrés sur $L \leq 1.2$, ses résidus sont plats ($\approx -5\%$, sans tendance), tandis que ceux d’un modèle concurrent à trois paramètres pur comptage de zéros croissent monotonement de $+0.8\%$ à $+5.8\%$; nous rejetons ce dernier. La constante est ajustée, non dérivée. Un théorème conditionnel complète les expériences : sous RH, $\lambda^*(L) \leq \exp(-Le^L)$ pour tout L grand, par une construction explicite qui combine un produit canonique sur les zéros avec une fenêtre à bande limitée.

Synthèse. À $L = 0.8$ les deux moitiés se rencontrent et encadrent le profil des deux côtés, $8.9 \times 10^{-18} \leq \lambda^*(0.8) \leq 2.27 \times 10^{-17}$, avec des certificats *inconditionnels* pour les deux inégalités. Les mêmes calculs

montrent pourquoi la voie de la positivité ne peut atteindre RH sans assistance. Tout certificat du type en un seul coup doit résoudre des fréquences jusqu'à $T_1(L) = 2\pi e^{A_L}$, où $A_L \sim 4e^L$ est la masse du peigne des nombres premiers ; ce seuil croît doublement exponentiellement en L , et nous montrons qu'aucune borne ponctuelle sur le peigne ne l'abaisse. Pendant ce temps, la marge spectrale disponible s'effondre au taux de Landau–Widom correspondant. Franchir le mur résultant exige donc une annulation dans le peigne des nombres premiers, un problème arithmétique concret. Enfin, nous documentons comment les évaluations en float64 du côté géométrique produisent des valeurs propres négatives parasites, un piège pour toute étude numérique de la positivité de Weil, et donnons un remède certifié.¹

1 Introduction

1.1 Le critère de Weil et le profil de fenêtre

Soit $\Lambda(n)$ la fonction de von Mangoldt et soit $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ les ordonnées des zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann dans le demi-plan supérieur. Pour une fonction test f paire, réelle, continue à support compact, écrivons $\hat{f}(r) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{iru} du$. La formule explicite de Riemann–Weil exprime la somme de $\hat{f}$ sur les zéros en termes de données arithmétiques et archimédiennes, et le critère de Weil [1, 4] affirme que RH est équivalent à la positivité

$$Q(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \text{ admissible,}$$

de la forme quadratique associée (rappelée à la Section 2). Toute approche spectrale de RH, de Hilbert–Pólya au programme de formule des traces de Connes [5] et au programme d'opérateurs prolates de Connes–Consani et Connes–Moscovici [6, 7], doit finalement établir une variante de cette positivité sur des espaces de fonctions test de plus en plus grands.

Malgré le rôle central du critère, son comportement quantitatif ne semble pas avoir été étudié. La positivité est un énoncé oui/non, mais on peut se demander combien petit $Q(f)$ peut réellement devenir, relativement à $\|f\|_2^2$, lorsque f parcourt une fenêtre compacte fixée. Nous considérons donc

$$\lambda^*(L) = \inf_{\substack{f \text{ paire, réelle} \\ \text{supp } f \subset [-L, L]}} \frac{Q(f)}{\|f\|_2^2}, \quad (1)$$

où Q est évaluée sur l'autocorrélation $g = f \star \tilde{f}$, $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ (Section 2) ; sous RH, le côté des zéros donne $Q(f) = \sum_{\gamma > 0} 2|\hat{f}(\gamma)|^2 \geq 0$. Sous RH on a $\lambda^*(L) > 0$ pour tout L , bien que cela requière un court argument au-delà de la positivité ponctuelle, que nous fournissons dans la Proposition 2.3. Réciproquement, une valeur négative de λ^* pour un certain L réfuterait RH, et une preuve inconditionnelle de $\lambda^*(L) > 0$ pour un L donné est un fragment fini de RH. La fonction $L \mapsto \lambda^*(L)$ est donc un profil de difficulté de l'hypothèse de Riemann vu à travers des fonctions test à support compact : elle quantifie la marge avec laquelle la positivité tient sur chaque fenêtre, et c'est la quantité que toute preuve de positivité en dimension finie (par exemple dans le programme de Connes–Consani) doit implicitement contrôler.

Cet article détermine le profil des deux côtés. Les bornes inférieures inconditionnelles, c'est-à-dire les théorèmes de positivité certifiés, proviennent d'une nouvelle réduction finie du problème de fenêtre complète (Théorèmes 1.1–1.2). Les bornes supérieures inconditionnelles, quotients de Rayleigh variationnels certifiés de fonctions d'essai explicites, sont évaluées du côté géométrique en arithmétique multiprécision à intervalles fermés (Section 11) ; un pipeline du côté des zéros produit les vecteurs d'essai et fournit une vérification croisée indépendante. Les nombres sont suffisamment précis pour révéler la loi asymptotique du profil (Section 12, Théorème 1.3, Conjecture 12.1).

¹Traduction par deepseek de l'article arxiv <https://arxiv.org/pdf/2608.24827> : se reporter systématiquement à l'article original en cas de doute, “le” secrétaire n'ayant pas la possibilité de juger de la conformité de la traduction.

1.2 Bornes inférieures : positivité certifiée

Écrivons le côté géométrique de la formule explicite, pour $\text{supp } f \subseteq [-L, L]$ et $F = \hat{f}$, sous la forme

$$Q(f) = 2F(i/2)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2 \Psi_L(t) dt, \quad (2)$$

avec le *symbole de Weil*

$$\Psi_L(t) = \text{Re } \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \log \pi - \sum_{\log n < 2L} \frac{2\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cos(t \log n), \quad (3)$$

$\psi = \Gamma'/\Gamma$: parce que $\text{supp}(f \star \tilde{f}) \subseteq [-2L, 2L]$, seules les puissances de nombres premiers avec $\log n < 2L$ contribuent, et (2) est exactement un terme de pôle de rang un plus un multiplicateur de fréquence. La positivité de Q sur la classe $\text{supp } f \subseteq [-L, L]$ pour tout $L > 0$ est équivalente à RH. Pour L fixé c'est un énoncé fini, inconditionnel, et le record tient depuis trois décennies : Yoshida [3] a prouvé la positivité pour $2L \leq \log 2$, et Connes–Consani [6] ont redémontré cette plage par des méthodes de formule des traces et d'algèbres de von Neumann, exhibant en outre l'extrême petitesse numérique du bord spectral inférieur de la forme. (Des affirmations au-delà de $\log 2$ existent dans des prépublications non arbitrées ; nous ne nous y appuyons pas et ne les comparons pas au-delà de la mention de leur existence.)

Notre premier résultat supprime l'infinie dimensionnalité du problème en une étape. Écrivons $A_L = \sum_{\log n < 2L} 2\Lambda(n)/\sqrt{n}$ pour la masse totale du peigne des nombres premiers dans (3).

Théorème 1.1 (Réduction en un seul coup). *Soit $L > 0$ et posons $T_1 := 2\pi e^{A_L}$. Fixons un $T^\sharp$ pour lequel*

$$\beta^* := \log \frac{T^\sharp}{2\pi} - \frac{1}{T^\sharp} - A_L > 0.$$

Comme le membre de droite croît en $T^\sharp$, cela vaut pour tout $T^\sharp$ au-dessus d'un seuil unique, qui dépasse T_1 d'une quantité $O(T_1^{-1})$ (120.1 contre $T_1 = 119.1$ à $L = 0.8$) ; en particulier $T^\sharp > T_1$ est nécessaire, et T_1 est l'échelle pertinente. Alors pour toute f réelle paire avec $\text{supp } f \subseteq [-L, L]$,

$$Q(f) \geq R(f) := 2F(i/2)^2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{T^\sharp} (\Psi_L(t) - \beta^*) |F(t)|^2 dt + \beta^* \|f\|_2^2. \quad (4)$$

De plus, dans la base de Legendre de $L^2[-L, L]$ la forme quadratique R est représentée par $\beta^ I + 2pp^T + C$ où C a des entrées supportées, à des queues super-exponentiellement petites explicitement bornées près, sur les ordres $n \lesssim eLT^\sharp/2$. Par conséquent, si la base est tronquée après N modes pairs $0, 2, \dots, 2N-2$, le premier ordre rejeté étant $2N \gtrsim eLT^\sharp/2$: si le bloc principal $N \times N$ a $\lambda_{\min} \geq \lambda_0 > 0$, alors*

$$Q(f) \geq (\min(\lambda_0, \beta^* - \varepsilon_D) - \varepsilon_B) \|f\|_2^2 \quad \text{pour toute } f \text{ avec } \text{supp } f \subseteq [-L, L],$$

où ε_D (déviations du bloc de queue) et ε_B (norme du couplage principal–queue) sont des constantes explicites, super-exponentiellement petites, bornées dans la preuve ; dans l'exécution certifiée de la Section 5 les deux sont inférieures à 10^{-100} .

Ce qui rend le Théorème 1.1 utilisable, c'est le peu qu'il contient. Il n'y a pas d'erreur de troncature à suivre contre un écart spectral, ni de découpage de l'espace de Hilbert avec un couplage $O(1)$ à travers une interface. Le découpage en fréquences (4) est une somme directe exacte, toute quantité rejetée est rejetée avec un signe défini, et le couplage entre le bloc principal de Legendre et la queue super-exponentiellement petite est contrôlé par une seule borne de norme. Dans notre expérience des alternatives (Section 15), les troncatures en espace d'ordre de ce problème laissent toujours un couplage $O(1)$ de décalage premier à travers la coupure et échouent ; la formulation (4) semble être la bonne. La constante de peigne A_L dans T_1 ne peut pas être améliorée, puisque le supremum du peigne des nombres premiers vaut exactement A_L (Lemme 3.2) ; à l'intérieur des certificats à enveloppe ponctuelle, le seuil T_1 est optimal.

Exécuter la réduction à $L = 0.8$ donne :

Théorème 1.2 (Positivité certifiée, support 1.6). *Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ réelle paire avec $\text{supp } f \subseteq [-0.8, 0.8]$,*

$$Q(f) \geq 8.9 \times 10^{-18} \|f\|_2^2.$$

En particulier la forme de Weil est positive sur toutes les autocorrélations $g = f \star \tilde{f}$ avec $\text{supp } g \subseteq [-1.6, 1.6]$.

Le certificat derrière le Théorème 1.2 ($T^\sharp = 200$, $\beta^* = 0.5134\dots$, $N = 200$ modes de Legendre pairs, précision de travail 50 chiffres) est décrit à la Section 5 ; son budget d'erreur se referme avec 24 ordres de grandeur de marge, et une exécution indépendante à $T^\sharp = 150$ donne une seconde certification, interne monotone. Ses quatre ingrédients sont un lemme d'enveloppe prouvé par des moyens classiques, une borne de quadrature par ellipse de Bernstein, une borne de queue en région interdite et un résidu de Cholesky vérifié. Tous sont élémentaires et entièrement explicites ; il n'y a pas de constantes anonymes.

La Section 7 rapporte un calcul exploratoire à $L = 1.19$ (support 2.38). Une version antérieure de ce travail affirmait un théorème certifié à ce support, sur la base d'un affûtage par nombre premier de la constante d'enveloppe qui, en fait, borne le peigne des nombres premiers dans la mauvaise direction ; la Remarque 3.3 explique l'erreur, et le Lemme 3.2 montre qu'aucun tel affûtage ne peut exister. Nous retirons l'affirmation. Nous conservons le calcul, une matrice 950×950 à 70 chiffres de précision vérifiée définie positive avec $\lambda_{\min} \in (10^{-48}, 10^{-46})$, comme preuve compatible avec la positivité, et la Section 7 donne le coût corrigé d'un véritable certificat au support 2.38 ainsi qu'une voie qui pourrait ramener ce coût à la baisse.

Enfin, la restriction aux fonctions test *paires* dans le Théorème 1.2 peut être levée. La forme de Weil se découple en secteurs de parité, avec un renversement de signe du terme de pôle dans le secteur impair, et la réduction en un seul coup s'applique à chaque secteur séparément. La Section 6 certifie $Q \geq 8.2 \times 10^{-15}$ sur le secteur impair au support 1.6, d'où la positivité pour f complexe arbitraire (Corollaire 6.3), et résout la structure de parité du spectre de fenêtre : l'état fondamental est simple et pair, avec des marges certifiées (Théorème 6.2). C'est la première des deux hypothèses spectrales manquantes dans le programme d'opérateurs de Connes–Consani–Moscovici [9] et Connes–van Suijlekom [8], vérifiée ici à une échelle fixée avec des constantes explicites.

1.3 Bornes supérieures : la loi de Landau–Widom

La seconde moitié de l'article mesure à quelle distance les bornes inférieures certifiées se trouvent de la vérité. Nous calculons des bornes variationnelles supérieures certifiées pour $\lambda^*(L)$ pour $L \in [0.5, 2.0]$ (Tableau 3) ; elles décroissent de 10^{-6} à $L = 0.5$ à 3.2×10^{-283} à $L = 2.0$. Les certificats eux-mêmes sont inconditionnels : chaque valeur rapportée est l'extrémité supérieure d'intervalle du quotient de Rayleigh du côté géométrique $Q(f_L)/\|f_L\|_2^2$ pour une fonction d'essai explicite f_L , et n'implique qu'une somme finie sur les nombres premiers, une intégrale archimédienne compacte et un pôle explicite. (Une assemblée du côté des zéros n'est utilisée que pour *proposer* les coefficients de f_L ; l'origine d'un vecteur d'essai n'a pas besoin d'être certifiée pour qu'une borne variationnelle supérieure soit valide.) La décroissance est gouvernée par la *hauteur de résolution*

$$T^*(L) = 2\pi e^{2L},$$

la hauteur en dessous de laquelle une fonction à bande limitée à $[-L, L]$ a suffisamment de capacité d'oscillation pour interpoler les zéros de ζ (Section 9). En notant $N(T)$ le nombre de zéros de hauteur au plus T , les bornes supérieures certifiées sont décrites, avec une précision inférieure au pour cent dans le régime asymptotique, par la loi à un paramètre

$$-\ln \lambda^*(L) = C \frac{N(T^*)}{\ln N(T^*)} (1 + o(1)), \quad C = 20.13\dots \approx 2\pi^2. \quad (5)$$

La constante est familière : $\pi^2/\ln$ est le taux de Landau–Widom gouvernant le plongement des valeurs propres des opérateurs de limitation temps–bande (prolates) au-delà du nombre de Shannon [13, 12]. Nous avons isolé la loi (5) par un test hors échantillon, exigeant que les modèles calibrés sur la plage $L \leq 1.2$ prédisent

les nouvelles valeurs certifiées à $L = 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$. Ce qui les discrimine est la forme des résidus plutôt que leur taille. La forme de Landau–Widom, avec sa constante unique, sous-prédit d’un facteur presque constant (-4.4% , -4.9% , -5.5% , -4.8%), ne montrant aucune tendance ; le décalage est la dérive de taille finie de la constante, qui n’a pas encore saturé à $L \leq 1.2$. Le modèle concurrent à trois paramètres un nat par zéro $-\ln \lambda^* \propto N(T^*)$ se trompe au contraire de $+0.8\%$, $+2.0\%$, $+3.7\%$, $+5.8\%$, croissant monotonement, ce qui est la signature d’une mauvaise forme fonctionnelle ; nous le rejetons (Section 12).

Une mise en garde s’applique partout : ce qui est certifié, c’est que chaque valeur affichée est une borne supérieure pour $\lambda^*(L)$, et en principe $\lambda^*(L)$ pourrait être plus petit. Identifier la loi (5) avec λ^* lui-même repose sur deux autres choses. L’une est structurelle : la base sinusoïdale de la Section 11 est complète dans $L^2(-L, L)$, donc les valeurs de Galerkin décroissent vers $\lambda^*(L)$ quand la dimension croît, et nous observons une stabilisation au niveau de 0.03% sous raffinement de dimension. L’autre est la borne inférieure certifiée du Théorème 1.2, qui fixe la valeur vraie à un facteur 2.6 près à $L = 0.8$ (Section 8). Nous formalisons l’identification, avec la constante, comme la Conjecture 12.1, et signalons la distinction partout où cela importe.

Nous complétons les expériences par un théorème conditionnel, prouvé à la Section 13, qui capture le contenu qualitatif de (5) avec l’exposant e^L à la place de e^{2L} .

Théorème 1.3. *Supposons RH. Il existe un L_0 tel que pour tout $L \geq L_0$,*

$$\lambda^*(L) \leq \exp(-L e^L).$$

La preuve est une construction explicite : un produit canonique fini sur les zéros jusqu’à $T = 2\pi e^L$, multiplié par une fenêtre en puissance de sinc qui épuise le budget de type exponentiel L . L’analyse rend transparent le mécanisme derrière T^* , en ce que le coût potentiel-théorique du produit équilibre exactement la décroissance réalisable d’une fenêtre de type L . Elle localise aussi l’obstruction à atteindre l’exposant complet e^{2L} dans un problème extrémal précis pour les fenêtres à bande limitée, le même problème dont la solution est gouvernée par les asymptotiques de Landau–Widom. En ce sens, le théorème et la constante mesurée $2\pi^2$ dans (5) se corroborent mutuellement.

1.4 Synthèse : une enceinte bilatérale et la barrière

Là où les deux programmes se recouvrent, ils encadrent le profil de RH des deux côtés, avec des certificats des deux côtés :

$$8.9 \times 10^{-18} \leq \lambda^*(0.8) \leq 2.27 \times 10^{-17},$$

un facteur 2.6. À notre connaissance, λ^* est la première quantité équivalente à RH dont le profil de fenêtre a été encadré des deux côtés par calcul certifié. L’enceinte mesure aussi la perte de la réduction : la forme réduite R de (4), qui rejette tout l’excès de Ψ_L au-delà de $T^\sharp$, atteint encore à un ordre de grandeur du plancher vrai de la fenêtre. Réciproquement, la loi (5) calibre l’effort de certification, puisqu’elle prédit à l’avance l’échelle de $\lambda_{\min}$ d’une matrice planifiée et donc la précision de travail requise ; la Section 7 consigne cette interaction.

Les mêmes calculs quantifient pourquoi la voie de la positivité, sans assistance, ne peut atteindre RH :

Théorème 1.4 (Barrière pour les certificats à enveloppe ponctuelle). *Toute application du Théorème 1.1 requiert $T^\sharp > T_1(L) = 2\pi e^{A_L}$, et $A_L = (4 + o(1))e^L$ quand $L \rightarrow \infty$ par le théorème des nombres premiers ; donc la taille de matrice $N \asymp LT_1$ et le nombre de nœuds de quadrature croissent doublement exponentiellement en L . De plus $\sup_t$ du peigne des nombres premiers vaut exactement A_L (Lemme 3.2), donc à l’intérieur de la classe des certificats qui bornent le peigne ponctuellement, le seuil T_1 ne peut pas être abaissé.*

Le Théorème 1.4 est inconditionnel et est prouvé à la Section 14. Deux énoncés de caractère logique différent l’accompagnent, et nous les gardons en dehors du théorème : le premier est mesuré plutôt que prouvé, le second est une interprétation.

Remarque 1.5 (La marge à résoudre ; mesurée, non prouvée). *La marge que tout certificat doit résoudre s’effondre au taux de Landau–Widom : par les bornes supérieures certifiées de la Section 12 et la loi (5), $-\ln \lambda^*(L) \simeq 2\pi^2 N(T^*) / \ln N(T^*)$ avec $T^* = 2\pi e^{2L}$, de sorte que le plancher tombe doublement exponentiellement en L : de 10^{-17} à $L = 0.8$ à 10^{-48} à $L = 1.2$ puis 10^{-283} à $L = 2$. Le statut de cet énoncé est celui de (5) lui-même, à savoir une loi ajustée à des bornes supérieures certifiées ; le convertir en une borne inférieure prouvée du coût d’un certificat de positivité arbitraire reste ouvert (Section 14).*

Remarque 1.6 (Ce que signifie le seuil). T_1 est la dernière fréquence à laquelle le peigne des nombres premiers, dans le pire cas d’alignement de phase, est encore capable de conduire Ψ_L à zéro. (Le supremum A_L n’est atteint qu’à la limite, donc le dernier changement de signe effectif de Ψ_L se situe un peu en dessous de T_1 ; ce que le Lemme 3.2 exclut, c’est tout argument ponctuel qui abaisserait le seuil.) Certifier la positivité au-delà du support ≈ 3.2 ($T_1 \approx 10^7$) par n’importe quelle méthode à enveloppe ponctuelle est donc computationalement vain. Pour améliorer les enveloppes ponctuelles, il faut prouver que les phases $(t \log p)_p$ ne peuvent pas s’aligner, un énoncé arithmétique sur l’approximation diophantienne simultanée de $\{\log p\}$, de la même nature que l’information portée par les zéros eux-mêmes.

Sous RH, $Q \geq 0$ à tout support, donc un optimiste trouvera le Théorème 1.2 peu surprenant. Son contenu est ailleurs, dans l’inconditionnalité, l’explicitation et le coût : il localise combien de positivité certifiée une quantité donnée de calcul achète, sur la seule voie vers RH où un progrès partiel est même bien défini. Le théorème de réduction rend les certificats faciles à vérifier, puisque vérifier l’un d’entre eux signifie factoriser une matrice. Le théorème de barrière montre que la voie se ferme doublement exponentiellement vite, ce qui transforme le folklore selon lequel la positivité devient exponentiellement difficile en constantes mesurées et en une obstruction arithmétique spécifique. Certificat, loi et barrière sont ce que nous considérons que ce programme délivre : la frontière passe de $\log 2$ à 1.6, le profil au-delà est mesuré jusqu’à $L = 2$, et le mur derrière les deux est cartographié plutôt que laissé implicite.

1.5 Travaux connexes

La tradition d’attaquer numériquement des quantités proches de RH est mieux représentée par la constante de de Bruijn–Newman Λ_{dBN} , dont les bornes inférieures ont été améliorées au fil de décennies de calcul avant la preuve de $\Lambda_{dBN} \geq 0$ par Rodgers et Tao [14] (voir aussi [15] pour la borne supérieure actuelle) ; notre étude est du même esprit, appliquée à une quantité équivalente à RH différente et, à notre connaissance, jamais mesurée auparavant. Du côté théorique, la positivité de Weil pour des classes restreintes de fonctions test a été établie par Connes–Consani à l’aide de fonctions d’onde sphéroïdales prolates [6] ; l’apparition de la constante de Landau–Widom dans (5) donne un pont quantitatif vers ce cercle d’idées, et le Théorème 1.2 étend la plage de la positivité inconditionnelle elle-même. Très récemment, les troncatures de rang fini de la forme de Weil sont devenues des objets d’étude à part entière : Connes–van Suijlekom [8] et Connes–Consani–Moscovici [9] construisent des matrices de Galerkin explicites à une coupure première, Suzuki [10] développe un traitement parallèle par fonction-vis, et Groskin [11] prouve des règles de certification bilatérales pour de telles troncatures, incluant une bande non concluante explicite de valeurs propres négatives parasites causées par la coupure archimédienne, un phénomène proche de celui que nous diagnostiquons à la Section 10. Ces travaux étudient une famille de troncatures fixée à des coupures fixes ; l’infimum variationnel de fenêtre (1), sa certification inconditionnelle et sa loi asymptotique en L ne semblent pas avoir été considérés auparavant. Le programme de [9] isole en outre deux étapes spectrales manquantes, dont la première (un état fondamental simple et pair à une échelle finie) est exactement un problème de séparation bilatérale de valeurs propres pour la forme de fenêtre ; la Section 6 le règle à $\lambda = e^{0.8}$ avec des constantes certifiées. Le point de vue du problème extrémal sur la formule explicite est développé dans la littérature d’optimisation de Fourier, par ex. Carneiro–Chandee–Milinovich [16] ; le problème variationnel (1) peut être vu comme un membre L^2 -normalisé de cette famille. Les ingrédients de calcul certifié sont standard : notre vérification PSD est l’argument factorisation-approchée-plus-résidu (cf. [18]), et la fermeture par intervalles utilise `mpmath` [23]. Les données de zéros de style Odlyzko n’entrent que comme moteur de proposition et comme *validation* des certificats géométriques (Remarque 11.3) ; elles n’entrent jamais dans les preuves inconditionnelles.

1.6 Notation

$\hat{f}(r) = \int f(u) e^{iru} du$; en dehors de la Section 6, toutes les fonctions test sont réelles et paires, donc $\hat{f}$ est réelle et paire. $\lambda^*(L)$ est l'infimum de fenêtre (1) ; $\lambda_{\min}(M)$ est la plus petite valeur propre d'une matrice M . $T^* = 2\pi e^{2L}$ est la hauteur de résolution de la fenêtre (moitié des bornes supérieures) ; $T^\#$ est le point de découpage en fréquences de la réduction en un seul coup (moitié des bornes inférieures) ; $T_1 = 2\pi e^{A_L}$ est le seuil d'alignement du peigne, avec $A_L = \sum_{\log n < 2L} 2\Lambda(n)/\sqrt{n}$ la masse du peigne des nombres premiers. $N(T)$ compte les zéros de ζ avec $0 < \gamma \leq T$, et $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi}$ est la densité des zéros à la hauteur t . $\bar{P}_n$ désigne le polynôme de Legendre normalisé à $\int_{-1}^1 \bar{P}_n^2 = 1$; la base de $H = L^2_{\text{even}}[-L, L]$ est $T_n(x) = \bar{P}_n(x/L)/\sqrt{L}$ pour n pair, avec les transformées de Fourier

$$\hat{T}_n(t) = (-1)^{n/2} 2\sqrt{L\nu_n} j_n(tL), \quad \nu_n = n + \frac{1}{2}, \quad (6)$$

j_n la fonction de Bessel sphérique. Partout, dps désigne les chiffres décimaux de précision de travail.

2 La forme de Weil : deux côtés, un problème variationnel

Pour f comme ci-dessus, avec $g = f \star \tilde{f}$, le côté géométrique de la formule explicite (normalisation de [4] ; voir aussi [17, Ch. 5] et Barner [2]) donne (2), une identité exacte pour $\text{supp } f \subseteq [-L, L]$: un terme de pôle de rang un plus le multiplicateur Ψ_L de (3). La formule explicite identifie ceci avec le côté des zéros,

$$Q(f) = \sum_{\rho} \hat{g}\left(\frac{\rho - \frac{1}{2}}{i}\right) \stackrel{\text{RH}}{=} \sum_{\gamma > 0} 2 |\hat{f}(\gamma)|^2, \quad (7)$$

et $Q(f) \geq 0$ pour toute f admissible si et seulement si RH tient [1]. La moitié des bornes inférieures de l'article (Sections 3–7) travaille exclusivement avec le côté géométrique (2). La moitié des bornes supérieures (Sections 11–12) évalue la *même* côté géométrique en des fonctions d'essai explicites, en arithmétique d'intervalles suffisamment profonde pour résoudre l'annulation ; les bornes variationnelles supérieures résultantes sont donc inconditionnelles. Un pipeline du côté des zéros, conditionnel à RH et à l'exactitude des valeurs multiprécision des zéros, est conservé comme moteur de proposition et comme vérification croisée indépendante (Remarque 11.3, Section 11.3).

Deux remarques structurelles sous-tendent tout ce qui suit.

Remarque 2.1 (Positivité vs. annulation). *Le côté des zéros (7) est une somme de termes non négatifs ; le côté géométrique (2) calcule le même nombre minuscule comme une différence de grands termes. Quand $Q(f) \approx 10^{-20} \|f\|^2$ et que les blocs individuels sont d'ordre $\|f\|^2$, l'évaluation en double précision du côté géométrique n'a pas de sens. Cette observation élémentaire, quantifiée à la Section 10, a autrefois suggéré que les bornes supérieures devaient être calculées du côté des zéros. L'arithmétique d'intervalles multiprécision supprime l'obstruction : la Section 11 certifie des quotients de Rayleigh du côté géométrique jusqu'à 10^{-283} , égalant (et typiquement affinant légèrement) les propositions du côté des zéros. Les bornes inférieures continuent d'exiger des estimations unilatérales à signe défini du côté géométrique.*

Remarque 2.2 (Bornes variationnelles supérieures). *Pour tout sous-espace de dimension finie V de fonctions test admissibles, la valeur propre minimale de la restriction de Q à V (par rapport à la matrice de Gram L^2) est une borne supérieure pour $\lambda^*(L)$. Tous les nombres du Tableau 3 sont de cette forme ; aucune affirmation de convergence vers l'infimum vrai n'est nécessaire pour que les bornes supérieures soient rigoureuses.*

La positivité de l'infimum sous RH nécessite une preuve : dans un espace de dimension infinie, $Q(f) > 0$ pour tout $f \neq 0$ n'exclut pas à lui seul $\inf_{\|f\|=1} Q(f) = 0$. Ce qui l'exclut est une inégalité d'échantillonnage pour l'espace de Paley–Wiener, disponible parce que les zéros sont, conditionnellement, denses à toute hauteur suffisamment grande.

Proposition 2.3 (L’infimum est positif sous RH). *Supposons RH. Pour tout $L > 0$ il existe $c_L > 0$ tel que $Q(f) \geq c_L \|f\|_2^2$ pour toute f admissible supportée dans $[-L, L]$; en particulier $\lambda^*(L) > 0$.*

Proof. Pour une telle f , la transformée $\hat{f}$ est paire et appartient à l’espace de Paley–Wiener PW_L^2 des fonctions entières de type exponentiel au plus L qui sont de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de Littlewood (une conséquence de RH ; voir [19, Ch. XIII]) les écarts entre ordonnées consécutives satisfont $\gamma_{n+1} - \gamma_n \leq \eta(\gamma_n)$ avec $\eta(t) \downarrow 0$, donc l’ensemble symétrisé des ordonnées $\{\pm\gamma\}$ est $\eta(T_1)$ -dense dans $\{|t| \geq T_1\}$ pour tout T_1 . Fixons $\delta = \pi/(4L)$ et choisissons T_1 avec $\eta(T_1) \leq \delta/2$; soit Λ un sous-ensemble maximal δ -séparé de $\{\pm\gamma : \gamma \geq T_1\}$. Par maximalité, des points consécutifs de Λ sur chaque demi-droite sont à distance au plus $\delta + 2\eta(T_1) \leq 2\delta$ l’un de l’autre, donc tout intervalle de longueur r contient au moins $(r - 2T_1)/(2\delta)$ points de Λ ; par suite la densité uniforme inférieure (de Beurling) est $D^-(\Lambda) \geq \frac{1}{2\delta} = \frac{2L}{\pi} > \frac{L}{\pi}$. Un ensemble séparé de densité uniforme inférieure dépassant L/π est un ensemble d’échantillonnage pour PW_L^2 (théorème d’échantillonnage de Beurling ; voir [20, Ch. 2–3]) : il existe $c > 0$, dépendant seulement de L , δ et T_1 , avec $\sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\lambda)|^2 \geq c \|\hat{f}\|_2^2$. Comme $\hat{f}$ est paire et Λ est contenu dans l’ensemble symétrisé des ordonnées,

$$Q(f) = \sum_{\gamma > 0} 2|\hat{f}(\gamma)|^2 \geq \sum_{\lambda \in \Lambda} |\hat{f}(\lambda)|^2 \geq c \|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi c \|f\|_2^2. \quad \square$$

Remarque 2.4. *La proposition est l’endroit où RH entre deux fois : une fois par l’identité du côté des zéros (7), et une fois par la borne d’écart de Littlewood. Inconditionnellement les écarts ne sont connus que bornés, ce qui fournit un sous-ensemble séparé d’une densité fixée, et cela est insuffisant dès que L/π dépasse celle-ci. Aucun c_L effectif ne sort de l’argument. Une valeur effective, inconditionnelle, de c_L est exactement ce que fournit le Théorème 1.2, et la vraie décroissance de $c_L = \lambda^*(L)$ est ce que les Sections 12–13 mesurent et bornent.*

2.1 Validation de l’assemblée du côté géométrique

Les erreurs de convention sont le risque pratique dominant dans les calculs de ce type, aussi nous consignons la validation de bout en bout effectuée sur l’implémentation des bornes inférieures. La matrice de Q dans la base (6) a été assemblée deux fois, (a) dans le domaine des fréquences à partir de (3) par quadrature certifiée, et (b) dans le domaine temporel via l’identité archimédienne exacte du Lemme 2.5 ci-dessous. Séparément, le vecteur propre inférieur v de la matrice du côté arithmétique a été évalué du côté des zéros, comme $2 \sum_{j \leq J} F_v(\gamma_j)^2$ sur les $J = 400$ premières ordonnées de ζ . À $L = 0.5, 0.8, 1.0$ les deux assemblées du côté arithmétique s’accordent sur tous les chiffres affichés, et les sommes partielles du côté des zéros leur sont cohérentes de la seule manière possible, se situant quelques pour cent en dessous des planchers, puisque la queue manquante au-delà de $\gamma_j > \gamma_{400}$ est une somme de carrés :

L	$\lambda_{\min}(\text{côté arith.})$	$2 \sum_{j \leq 400} F_v(\gamma_j)^2$
0.5	9.4039×10^{-7}	9.1610×10^{-7}
0.8	5.7499×10^{-16}	5.3290×10^{-16}
1.0	1.6236×10^{-20}	1.5922×10^{-20}

Ces exécutions de validation utilisent une base délibérément petite (16 modes de Legendre pairs), donc les planchers du tableau se situent au-dessus des valeurs de fenêtre convergées citées ailleurs (par ex. 1.66×10^{-17} à $L = 0.8$) ; ce qui est validé est la normalisation et l’identité du côté des zéros, non le plancher lui-même. L’accord confirme la normalisation de (2) à l’échelle 10^{-20} , vingt chiffres au-delà de l’annulation dominante. Il relie aussi les deux moitiés de l’article : la même fonctionnelle du côté des zéros évaluée ici pour validation est celle dont l’infimum est certifié par le pipeline de bornes supérieures de la Section 11.

Lemme 2.5 (Terme archimédien exact dans le domaine temporel). *Soit g réelle, paire et continue avec $\text{supp } g \subseteq [-2L, 2L]$, supposons que la limite unilatérale*

$$c = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(0) - g(x)}{x} \quad (8)$$

existe, et supposons $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(t)| \log(2 + |t|) dt < \infty$. Alors, avec γ la constante d'Euler,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) \left[\operatorname{Re} \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \log \pi \right] dt &= -(\gamma + \log \pi + \log(1 - e^{-4L}))g(0) \\ &\quad + \int_0^{2L} \frac{2[e^{-2x}g(0) - e^{-x/2}g(x)]}{1 - e^{-2x}} dx, \end{aligned}$$

les deux membres convergeant absolument. L'intégrande de la dernière intégrale se prolonge continûment en $x = 0$ avec la valeur $c - \frac{3}{2}g(0)$, et elle hérite sur $[0, 2L]$ de la régularité que la restriction $g|_{[0, 2L]}$ y possède. Dans l'assemblée de la Section 2.1 cette restriction est un polynôme, donc l'intégrande prolongée est analytique réelle sur $[0, 2L]$; noter que $c \neq 0$ en général, le prolongement pair de g ayant un coin à l'origine.

Proof. Le noyau. La représentation de Gauss $\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-sz^{-1}}{1-s} ds$ est valide pour $\operatorname{Re} z > 0$, donc en $z = \frac{1}{4} + \frac{it}{2}$, où $s^{z-1} = s^{-3/4} e^{i(t/2)\log s}$. En prenant les parties réelles et en substituant $s = e^{-2x}$, de sorte que $ds = -2e^{-2x} dx$, $s^{-3/4} = e^{3x/2}$ et $\frac{t}{2} \log s = -tx$,

$$\operatorname{Re} \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) = -\gamma + \int_0^\infty k(x) [e^{-2x} - e^{-x/2} \cos(tx)] dx, \quad k(x) = \frac{2}{1 - e^{-2x}}. \quad (9)$$

Taille du noyau. Décomposons le crochet en $(e^{-2x} - e^{-x/2}) + e^{-x/2}(1 - \cos(tx))$. La première partie ne fait pas intervenir t ; comme $k(x) = x^{-1} + O(1)$ et $e^{-2x} - e^{-x/2} = -\frac{3}{2}x + O(x^2)$ quand $x \rightarrow 0^+$, tandis que k est bornée et $e^{-2x} - e^{-x/2} = O(e^{-x/2})$ quand $x \rightarrow \infty$, elle contribue $O(1)$. La seconde partie est non négative ; découpons-la en $x = 1/|t|$. Sur $(0, 1/|t|)$ utilisons $1 - \cos(tx) \leq t^2 x^2/2$ et $k(x) \leq Cx^{-1}$, ce qui donne $O(1)$; sur $(1/|t|, 1)$ utilisons $1 - \cos(tx) \leq 2$ et $k(x) \leq Cx^{-1}$, ce qui donne $O(\log(2 + |t|))$; sur $(1, \infty)$ utilisons $k = O(1)$ contre le facteur $e^{-x/2}$, ce qui donne $O(1)$. Par suite

$$\int_0^\infty k(x) |e^{-2x} - e^{-x/2} \cos(tx)| dx = O(\log(2 + |t|)). \quad (10)$$

En particulier (9) converge absolument et $\operatorname{Re} \psi(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}) - \log \pi = O(\log(2 + |t|))$, donc le membre de gauche du lemme converge absolument par l'hypothèse sur $\widehat{g}$.

Échange d'intégrales. Par (10) et cette même hypothèse,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(t)| \int_0^\infty k(x) |e^{-2x} - e^{-x/2} \cos(tx)| dx dt < \infty,$$

donc le théorème de Fubini s'applique. Comme $\widehat{g} \in L^1$ et g est continue, réelle et paire, l'inversion de Fourier donne $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) dt = g(0)$ et $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) \cos(tx) dt = g(x)$ en tout x . En substituant (9) et en échangeant l'ordre d'intégration on obtient donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t) \left[\operatorname{Re} \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \log \pi \right] dt = -(\gamma + \log \pi)g(0) + \int_0^\infty k(x) [e^{-2x}g(0) - e^{-x/2}g(x)] dx. \quad (11)$$

La queue sous forme close. Sur $[2L, \infty)$ on a $g \equiv 0$, donc l'intégrande de (11) y vaut $k(x)e^{-2x}g(0)$, et la substitution $u = e^{-2x}$ donne

$$\int_{2L}^\infty \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} dx = \int_0^{e^{-4L}} \frac{du}{1 - u} = -\log(1 - e^{-4L}).$$

En découpant (11) en $2L$ et en insérant cette valeur, on obtient l'identité du lemme.

Comportement à l'origine. Par (8), $g(x) = g(0) - cx + o(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$, donc

$$e^{-2x}g(0) - e^{-x/2}g(x) = g(0)(e^{-2x} - e^{-x/2}) + e^{-x/2}(g(0) - g(x)) = (c - \frac{3}{2}g(0))x + o(x),$$

tandis que $1 - e^{-2x} = 2x + O(x^2)$. Le quotient tend donc vers $c - \frac{3}{2}g(0)$. De plus $2[e^{-2x}g(0) - e^{-x/2}g(x)]$ et $1 - e^{-2x}$ sont, sur $[0, 2L]$, aussi réguliers que $g|_{[0, 2L]}$, et ce dernier a le zéro simple $2x + O(x^2)$ à l'origine, que le premier compense ; le quotient hérite donc de cette régularité, et est analytique réel quand $g|_{[0, 2L]}$ l'est. $\square$

Le Lemme 2.5 élimine toute intégrale oscillatoire ou singulière de l'assemblée de Q : les termes premiers sont des décalages $g(\pm \log n)$, le terme de pôle est un moment de rang un en cosh, et le terme archimédien est l'intégrale ci-dessus, dont l'intégrande devient analytique réelle sur $[0, 2L]$ une fois sa singularité amovible à l'origine remplie. Toutes les entrées de matrice convergent donc géométriquement sous quadrature de Gauss et sont certifiables à toute précision. Nous utilisons cette assemblée pour la validation et les courbes de plancher ; les certificats des Sections 5–7 utilisent l'assemblée du côté des fréquences, dont la certification est le Lemme 5.1.

3 Lemmes d'enveloppe

Lemme 3.1 (Enveloppe grossière). *Pour tout $t \geq \frac{15}{4}$,*

$$\operatorname{Re} \psi\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \log \pi \geq \log \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{t}, \quad \text{d'où} \quad \Psi_L(t) \geq \log \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{t} - A_L.$$

Proof. Par $\psi(z) = \psi(z+1) - 1/z$ il suffit de borner $\psi(\frac{5}{4} + \frac{it}{2})$. La seconde formule de Binet donne, pour $\operatorname{Re} z > 0$, $\psi(z) = \log z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{u du}{(u^2 + z^2)(e^{2\pi u} - 1)}$. En $z = \frac{5}{4} + \frac{it}{2}$ on a $|u^2 + z^2| \geq |\Im(z^2)| = \frac{5t}{4}$ pour tout $u \geq 0$, et $\int_0^\infty \frac{u du}{e^{2\pi u} - 1} = \frac{1}{24}$, donc le terme intégral est $\leq \frac{8}{5t} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{15t}$. De plus $\operatorname{Re} \log z \geq \log(t/2)$, $|\operatorname{Re} \frac{1}{2z}| \leq \frac{5}{2t^2}$, et le terme de décalage satisfait $|\operatorname{Re} \frac{1}{1/4 + it/2}| \leq \frac{1}{t^2}$. Le déficit total est $\leq \frac{1}{15t} + \frac{7}{2t^2} \leq \frac{1}{t}$ pour $t \geq \frac{15}{4}$. Pour le peigne, trivialement $|\sum c_{p,k} \cos(tk \log p)| \leq A_L$. $\square$

Lemme 3.2 (Optimalité de la constante grossière). *Écrivons $P_L(t) = \sum_{\log n < 2L} \frac{2\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \cos(t \log n)$ pour le peigne des nombres premiers. Alors*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} P_L(t) = A_L.$$

Par conséquent la constante grossière $C = A_L$ du Lemme 3.1 est déjà optimale parmi toutes les bornes ponctuelles $P_L(t) \leq C$ valides pour tout t , qui est la seule information sur le peigne utilisée par la réduction du Théorème 1.1.

Proof. $P_L(t) \leq A_L$ est trivial (chaque cosinus est ≤ 1 et les coefficients sont positifs), avec égalité en $t = 0$. Que le supremum soit aussi approché pour t arbitrairement grand découle de l'équidistribution de Weyl. Les nombres $\{\log p\}_p$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ par unicité de la factorisation, donc les phases $(t \log p_1, \dots, t \log p_r)$ s'équidistribuent modulo 2π sur le tore plein. On peut donc choisir t tel que chaque $\theta_p = t \log p$, et donc chaque $k\theta_p$, soit simultanément arbitrairement proche de 0, où tous les cosinus sont arbitrairement proches de +1. $\square$

Remarque 3.3 (Un affûtage tentant, et pourquoi il échoue). *En groupant le peigne par nombres premiers, avec $c_{p,k} = 2\Lambda(p^k)/p^{k/2}$, les quantités*

$$\mu_p = - \min_{\theta \in [0, \pi]} \sum_{k: k \log p < 2L} c_{p,k} \cos(k\theta), \quad A_{\text{eff}} = \sum_{p: \log p < 2L} \mu_p$$

satisfont $\inf_t P_L(t) = -A_{\text{eff}}$, par le même argument de Weyl avec les phases envoyées vers les minimiseurs de bloc par premier. Ici A_{eff} est souvent bien plus petit que A_L , parce que les puissances de p partagent la phase θ_p et ne peuvent pas toutes atteindre -1 ensemble ; à $L = 1.19$, par exemple, $A_{\text{eff}} = 4.6948$ contre $A_L = 7.0750$. Il est tentant de substituer A_{eff} à A_L dans le Lemme 3.1. C'est faux. L'inégalité $P_L \geq -A_{\text{eff}}$ borne le peigne par en dessous, donc le symbole $\Psi_L = H - P_L$ par au-dessus, alors que l'enveloppe a besoin d'une borne supérieure pour P_L ; et par le Lemme 3.2 aucune borne ponctuelle supérieure sous A_L n'existe, puisque en $\theta_p = 0$ tous les cosinus s'alignent à +1 et le groupement par premier n'apporte rien. Ce que A_{eff} mesure est la profondeur des puits de Ψ_L , non son plancher haute fréquence. Une version antérieure de ce

travail a fait exactement cette substitution ; la Section 7 discute l'affirmation retirée du support 2.38 qui en résultait et le coût corrigé, et la Section 15 consigne l'erreur. Les seuils sont :

L	A_L	$T_1 = 2\pi e^{A_L}$
0.8	2.9420	119
1.0	5.8525	2187
1.19	7.0750	7.4×10^3
1.2	8.5210	3.2×10^4
1.4	10.290	1.9×10^5
1.6	14.323	1.0×10^7
2.0	24.383	2.4×10^{11}

4 Preuve du Théorème 1.1

Découpons $\int_0^\infty = \int_0^{T^\sharp} + \int_{T^\sharp}^\infty$ dans (2) (pour f réelle paire, $\int_0^\infty |F|^2 = \pi \|f\|^2$ par Parseval). Sur $[T^\sharp, \infty)$, le Lemme 3.1 donne $\Psi_L(t) \geq \log \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{t} - A_L \geq \beta^*$, la dernière étape parce que l'expression du milieu croît en t . Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t| \geq T^\sharp} |F|^2 \Psi_L \geq \frac{\beta^*}{\pi} \int_{T^\sharp}^\infty |F|^2 = \beta^* \left(\|f\|^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^{T^\sharp} |F|^2 \right),$$

ce qui est (4). Pour la localisation : l'opérateur C de symbole $(\Psi_L - \beta^*)\chi_{[0, T^\sharp]}$ a des entrées $C_{nm} = \frac{1}{\pi} \int_0^{T^\sharp} (\Psi_L - \beta^*) \hat{T}_n \hat{T}_m dt$, et par (6) et la borne élémentaire

$$|j_n(x)| \leq \frac{x^n}{(2n+1)!!} \quad (x \geq 0), \quad (12)$$

chaque ligne satisfait $|C_{nm}| \leq \max_{[0, T^\sharp]} |\Psi_L - \beta^*| \cdot 2\sqrt{L\nu_n} \frac{(T^\sharp L)^n}{(2n+1)!!} \cdot 2\sqrt{L\nu_m}$, qui décroît super-exponentiellement dès que $n > eLT^\sharp/2$ par Stirling. Le vecteur de pôle décroît aussi super-exponentiellement (cosh est entière : ses coefficients de Legendre décroissent plus vite que tout taux géométrique).

Il reste à passer du bloc principal à tout H , et ici une estimation de couplage, petite mais non nulle, doit être énoncée explicitement. Fixons une coupure après N modes pairs, le premier ordre rejeté étant $2N \gtrsim eLT^\sharp/2$, et écrivons la matrice de R sous forme de blocs

$$M_R = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & D \end{pmatrix},$$

avec A le bloc principal $N \times N$, D le bloc de queue, et B le couplage principal-queue. La semi-définie positivité des deux blocs diagonaux seuls n'implique pas $M_R \succeq 0$; l'énoncé correct est la borne élémentaire à deux blocs

$$\lambda_{\min}(M_R) \geq \min(\lambda_{\min}(A), \lambda_{\min}(D)) - \|B\|, \quad (13)$$

qui découle de $x^\top Ax + 2x^\top By + y^\top Dy \geq \lambda_{\min}(A)|x|^2 - 2\|B\||x||y| + \lambda_{\min}(D)|y|^2$ et $2|x||y| \leq |x|^2 + |y|^2$. Les deux quantités de queue sont contrôlées par la décroissance ci-dessus : la borne de Gershgorin sur les lignes de D donne $\lambda_{\min}(D) \geq \beta^* - \varepsilon_D$, et la norme spectrale du bloc de couplage rectangulaire est bornée par le test de Schur $\|B\| \leq (\|B\|_1 \|B\|_\infty)^{1/2} = (\max_m \sum_{n \geq N} |B_{nm}| \cdot \max_{n \geq N} \sum_{m < N} |B_{nm}|)^{1/2} \leq \varepsilon_B$; les deux sommes de lignes (au plus N termes, chacun super-exponentiellement petit) et les sommes de colonnes (convergentes par la décroissance en n) sont des sommes explicites des bornes d'entrées sur les lignes $n \geq N$ (dans l'exécution certifiée de la Section 5, les deux constantes sont inférieures à 10^{-100}). Avec (13), $\lambda_{\min}(A) \geq \lambda_0$ implique $R \geq (\min(\lambda_0, \beta^* - \varepsilon_D) - \varepsilon_B) \|f\|^2$ sur tout H , ce qui est l'énoncé du théorème. $\square$

Remarque 4.1. La preuve rejette trois quantités, chacune avec un signe défini ou une borne explicite : l'excès de Ψ_L au-delà de β^* au-delà de $T^\sharp$, la déviation de queue ε_D , et la norme de couplage ε_B . Cette unilatéralité est ce qui rend le certificat robuste, puisqu'une quadrature plus fine ou un N plus grand ne peuvent qu'améliorer la constante certifiée, jamais l'invalider. La Section 8 mesure le coût du premier rejet : à $L = 0.8$ il est inférieur à un ordre de grandeur.

5 Le calcul certifié au support 1.6

Tous les calculs utilisent `mpmath` [23] avec le backend `gmpy2`.

5.1 Assemblée

$L = 0.8$, $T^\# = 200$, constante d'enveloppe $A_L = 2.9419735\dots$ (une somme finie, certifiée par évaluation multiprécision directe), donc $\beta^* = \log \frac{200}{2\pi} - \frac{1}{200} - A_L = 0.5134667\dots$; $N = 200$ ordres de Legendre pairs $0, 2, \dots, 398$; dps 50. La matrice C est intégrée sur $[0, 200]$ en 800 panneaux de largeur $\frac{1}{4}$ avec quadrature de Gauss–Legendre à 32 points ; les valeurs des fonctions de Bessel sphériques par récurrence arrière de Miller ; le vecteur de pôle par quadrature de Gauss d'ordre 320 (l'intégrande $\bar{P}_n(x/L) \cosh(x/2)$ est entière, non polynomiale, donc exact n'est pas revendiqué : le même argument d'ellipse de Bernstein que dans le Lemme 5.1 borne l'erreur de quadrature à cet ordre bien en dessous du niveau 10^{-40}). La matrice assemblée est archivée.

5.2 Certification de la quadrature

Lemme 5.1 (Borne par ellipse). *Sur chaque panneau l'intégrande de C_{nm} se prolonge analytiquement à l'ellipse de Bernstein de somme des demi-axes $\rho = 6.55$ relativement au panneau (les singularités les plus proches de Ψ_L sont les pôles de la digamma en $\Im t = \pm \frac{1}{2}$; nous utilisons la bande $|\Im t| \leq 0.4$). Ici prolongement analytique signifie que le terme digamma $\Re \psi(\frac{1}{4} + \frac{it}{2})$ est remplacé par sa demi-somme $\frac{1}{2}[\psi(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}) + \psi(\frac{1}{4} - \frac{it}{2})]$, qui est analytique en t et coïncide avec lui sur l'axe réel. Sur cette ellipse, par la représentation de Poisson $j_n(z) = \frac{(-i)^n}{2} \int_{-1}^1 P_n(s) e^{izs} ds$,*

$$|j_n(z)| \leq e^{|\Im z|} \Rightarrow |\hat{T}_n \hat{T}_m| \leq 4L \sqrt{\nu_n \nu_m} e^{2L \cdot 0.4},$$

et $|\Psi_L - \beta^*| \leq 20$ là ; donc l'erreur de Gauss à 32 points par panneau est au plus $4M\rho/((\rho-1)(\rho^{64}-1))$ avec $M \leq 4.9 \times 10^4$, c'est-à-dire $\leq 1.3 \times 10^{-47}$, et l'erreur de quadrature totale par entrée est $\varepsilon_Q \leq 1.03 \times 10^{-44}$. La matrice d'erreur a une norme spectrale $\leq c_{\text{err}} := N\varepsilon_Q \leq 2.06 \times 10^{-42}$.

5.3 Certification de la queue et du couplage

À l'ordre de coupure 400 : par (12), $\max_{t \leq 200} |\hat{T}_{400}(t)| \leq 4.3 \times 10^{-108}$ (à $T^\# = 150$: 4.5×10^{-158}), et la queue de pôle est $< 10^{-390}$. Les sommes de lignes et de colonnes construites à partir de ces bornes d'entrées donnent les deux constantes de queue de (13) : les diagonales de queue de Gershgorin dépassent $\beta^* - 10^{-100}$, c'est-à-dire $\varepsilon_D \leq 10^{-100}$, et les deux facteurs de la borne de Schur $\|B\| \leq (\|B\|_1 \|B\|_\infty)^{1/2}$ sont dominés par les mêmes bornes super-exponentielles, donnant $\varepsilon_B \leq 10^{-100}$. Les ordres au-delà de 400 coûtent donc un total de 2×10^{-100} contre la constante certifiée.

5.4 Semi-définie positivité vérifiée

Lemme 5.2 (Résidu de Cholesky). *Soit M' symétrique et supposons qu'une factorisation de Cholesky en virgule flottante produise $\tilde{L}$ avec $\|M' - \tilde{L}\tilde{L}^\top\|_\infty \leq r$ (résidu calculé dans la même arithmétique, avec une marge d'arrondi de produit s). Alors $\lambda_{\min}(M') \geq -(r + s)$.*

Proof. $\tilde{L}\tilde{L}^\top \succeq 0$ et l'inégalité de Weyl. □

Le budget d'erreur doit distinguer le bloc principal exact A , défini par les intégrales, de la matrice calculée $\tilde{A}$; le Lemme 5.1 donne $\|A - \tilde{A}\| \leq c_{\text{err}}$. En appliquant le Lemme 5.2 à $\tilde{A} - (\lambda_0 + c_{\text{err}})I$ avec $\lambda_0 = 9 \times 10^{-18}$: la factorisation réussit, avec $r = 1.06 \times 10^{-50}$ et $s = 3.6 \times 10^{-43}$, donc $\lambda_{\min}(\tilde{A}) \geq \lambda_0 + c_{\text{err}} - (r + s)$ et par conséquent, par l'inégalité de Weyl,

$$\lambda_{\min}(A) \geq \lambda_{\min}(\tilde{A}) - c_{\text{err}} \geq \lambda_0 - (r + s) \geq 9 \times 10^{-18} - 4 \times 10^{-43}.$$

En injectant ceci dans le Théorème 1.1 (avec $\varepsilon_D, \varepsilon_B \leq 10^{-100}$ de la sous-section précédente, et $\beta^* - \varepsilon_D \gg \lambda_0$) on obtient

$$Q(f) \geq (\lambda_0 - (r + s) - \varepsilon_B) \|f\|_2^2 \geq 8.9 \times 10^{-18} \|f\|_2^2,$$

ce qui prouve le Théorème 1.2 avec une marge positive explicite de 10^{-19} en réserve. $\square$

5.5 Vérifications indépendantes

(a) Une certification indépendante antérieure à $T^\sharp = 150$ ($\beta^* = 0.2241$) donne $\lambda_{\min} \geq 1.2 \times 10^{-18}$. (b) Monotonie : $R_{T^\sharp}$ croît ponctuellement en $T^\sharp$, et les constantes certifiées le respectent, ainsi que le plancher de fenêtre : $1.2 \times 10^{-18} \leq \lambda_{\min}(R_{150})$, $9 \times 10^{-18} \leq \lambda_{\min}(R_{200})$, et les deux sont inférieures à $\lambda_{\min}(Q|_{\text{window}}) = 1.656 \times 10^{-17}$, la dernière valeur provenant de l'assemblée exacte dans le domaine temporel de la Section 2.1. (c) Le spectre de référence (non certifié) de R_{150} a pour valeurs propres inférieures 1.356×10^{-18} , 2.32×10^{-12} , 2.9×10^{-7} , 2.1×10^{-3} , $\beta^*, \dots$ (les deux premières par itération inverse sur la matrice stockée, résidus 2.4×10^{-37} et 1.1×10^{-32} ; une version antérieure citait 1.78×10^{-18} pour la première, une valeur périmée qu'un échec de Cholesky au décalage 1.5×10^{-18} contredisait déjà) : quatre directions collectives presque nulles se situent au-dessus du plancher, et le vecteur propre inférieur se concentre sur les ordres de Legendre 0–10, portant une masse 5×10^{-76} aux ordres ≥ 300 , donc la troncature est convergée avec une très grande marge. (d) Extérieurement, la borne supérieure certifiée $\lambda^*(0.8) \leq 2.27 \times 10^{-17}$ du Tableau 3, obtenue inconditionnellement du côté géométrique par le pipeline de la Section 11.4, se situe de façon cohérente au-dessus de la borne inférieure certifiée et à 40% du plancher de fenêtre mesuré 1.656×10^{-17} (la différence résiduelle est attribuable à la condition aux limites $f(\pm L) = 0$ de la base sinusoidale utilisée là, inoffensive pour les bornes supérieures).

6 Parité de l'état fondamental de la fenêtre

Tout jusqu'ici concerne des fonctions test paires. Cette section résout le secteur impair au support 1.6 et, avec lui, une question spectrale récemment isolée par Connes–Consani–Moscovici [9]. Leur construction réalise des approximations des zéros de zêta à partir de l'état fondamental de la forme de Weil semilocale à l'échelle λ , et son fondement théorique, le théorème de localisation des zéros de Connes–van Suijlekom [8], s'applique sous l'hypothèse que le bas du spectre est une valeur propre *simple* dont la fonction propre est *paire* (invariante sous $u \mapsto u^{-1}$). Ils listent cela comme la première étape manquante du programme ; une reproduction indépendante l'a vérifié empiriquement à de nombreuses échelles, mais rigoureusement à aucune. Nous le certifions à $\lambda = e^{0.8}$, où la forme semilocale a un contenu premier $\{2, 3, 4\}$ et coïncide, place par place, avec la forme de fenêtre étudiée dans cet article (à la dictionnaire de normalisation près, dont la vérification ligne à ligne contre [9] n'a pas été effectuée ; les énoncés ci-dessous, étant des énoncés d'ordre, sont invariants sous remise à l'échelle positive de la forme).

6.1 Découplage de parité

Lemme 6.1 (Découpage de parité). *Soit $f = f_e + f_o$ réelle avec $\text{supp } f \subseteq [-L, L]$, décomposée en parties paire et impaire. Alors*

$$Q(f) = Q(f_e) + Q(f_o),$$

où $Q(f_e)$ a le terme de pôle $+2\left(\int f_e \cosh(x/2) dx\right)^2$ de (2), tandis que

$$Q(f_o) = -2\left(\int f_o \sinh(x/2) dx\right)^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |F_o(t)|^2 \Psi_L(t) dt :$$

le terme de pôle change de signe dans le secteur impair. De plus, pour f complexe, $Q(f) = Q(\text{Re } f) + Q(\text{Im } f)$.

Proof. Avec $g = f \star \tilde{f}$ on a $\hat{g}(z) = \hat{f}(z)\hat{f}(-z)$, donc le terme de pôle est $\hat{g}(i/2) + \hat{g}(-i/2) = 2\hat{f}(i/2)\hat{f}(-i/2)$. En écrivant $\hat{f}(\mp i/2) = \int f e^{\pm x/2} dx = c \pm s$ avec $c = \int f_e \cosh(x/2)$, $s = \int f_o \sinh(x/2)$ on obtient $2(c^2 - s^2)$

: pas de terme croisé, et les signes annoncés. Dans le terme multiplicateur, F_e est réelle paire et F_o est imaginaire impaire, donc $|F|^2 = |F_e|^2 + |F_o|^2$ ponctuellement. Pour l'énoncé complexe, le terme croisé du multiplicateur est $\text{Im}(\overline{F_r} F_i)$, impair en t , et s'intègre à zéro contre le symbole pair ; les termes croisés des deux pôles s'annulent par paires. $\square$

Le renversement de signe a été validé indépendamment de ce calcul : pour un polynôme impair aléatoire, le terme de pôle dans le domaine temporel $2 \int g(y) \cosh(y/2) dy$ calculé par autocorrélation directe s'accorde avec $-2(\int f \sinh(x/2) dx)^2$ à une erreur relative de 2×10^{-11} (script `pwl_parity_recon.py`).

La réduction en un seul coup (Théorème 1.1) vaut mot pour mot dans le secteur impair : l'inégalité (4) ne rejette que la queue positive du multiplicateur au-delà de $T^\sharp$, qui est aveugle à la parité, et le terme de pôle (de l'un ou l'autre signe) est à l'intérieur de la matrice retenue. Les bornes de queue et de couplage de la Section 4 sont inchangées (la queue de pôle impaire obéit à la même borne en région interdite, avec $\sinh$ majorée par $\cosh$).

6.2 Constantes certifiées

La matrice réduite du secteur impair à $T^\sharp = 150$ ($\beta^* = 0.2241\dots$, 200 modes de Legendre impairs 1, 3, $\dots$, 399, assemblée à 50 chiffres, budget de quadrature $c_{\text{err}} = 1.6 \times 10^{-42}$) a

$$\lambda_{\min}(M_{\text{odd}}) = 9.1183 \times 10^{-15} \quad (\text{itération inverse, résidu } 2.3 \times 10^{-30}),$$

et le résidu de Cholesky vérifié (Lemme 5.2) au décalage 8.2065×10^{-15} réussit avec $r = 7.9 \times 10^{-51}$, donc

$$Q(f) \geq 8.2065 \times 10^{-15} \|f\|_2^2 \quad \text{pour toute } f \text{ réelle impaire, } \text{supp } f \subseteq [-0.8, 0.8]. \quad (14)$$

Les bornes supérieures exigent la forme exacte plutôt que la forme réduite (la réduction rejette un terme positif). Les deux intégrales de l'assemblée exacte vivent sur des intervalles compacts : l'identité archimédienne de la Section 2.1 et les intégrandes de corrélation de décalage qui sont des polynômes de degré ≤ 239 , intégrés exactement par Gauss-160. En évaluant le quotient de Rayleigh exact aux vecteurs inférieurs (tronqués) des matrices réduites on obtient, pour les infima de fenêtre des deux secteurs,

$$\lambda_1^{\text{even}} \leq 2.5223 \times 10^{-16}, \quad \lambda_1^{\text{odd}} \leq 2.3470 \times 10^{-14}.$$

Comme vérification indépendante, les sommes partielles du côté des zéros $2 \sum_{\gamma \leq \gamma_{300}} F(\gamma)^2$ sur les mêmes vecteurs sont 1.767×10^{-16} et 2.071×10^{-14} : en dessous des valeurs de Rayleigh, comme elles doivent l'être, de 12–30%, la bonne taille pour la queue manquante au-dessus de $\gamma_{300} \approx 541$. (Les zéros n'entrent que dans cette vérification, pas dans les certificats.)

Pour l'écart du secteur pair, appliquons le principe de Courant-Fischer : si la restriction de $M_{\text{even}} - s_2 I$ à *tout* sous-espace de codimension un est semi-définie positive, alors $\lambda_2(M_{\text{even}}) \geq s_2$. En prenant le complément orthogonal du vecteur fondamental approché (une trame de Householder explicite ; aucune orthogonalité de la trame calculée n'est supposée, le rang plein suffit) et en exécutant le Cholesky vérifié sur la matrice restreinte à $s_2 = 2.0857 \times 10^{-12}$, on réussit avec un résidu 1.1×10^{-50} et une marge de multiplication de trame 5.1×10^{-43} ; la valeur de référence par itération inverse déflatée est $\lambda_2(M_{\text{even}}) = 2.3175 \times 10^{-12}$ (résidu 1.1×10^{-32}). Le relèvement de la tête à 200 modes à la forme de fenêtre complète est l'argument de perturbation par blocs du Théorème 1.1, à un coût inférieur à 10^{-100} .

6.3 Le théorème de parité

Théorème 6.2 (État fondamental pair simple, support 1.6). *Soient $\lambda_1^{\text{even}}, \lambda_2^{\text{even}}$ les deux premières valeurs min-max de $Q(f)/\|f\|_2^2$ sur les f réelles paires avec $\text{supp } f \subseteq [-0.8, 0.8]$, et λ_1^{odd} l'infimum sur les f réelles impaires. Alors*

$$8.9 \times 10^{-18} \leq \lambda_1^{\text{even}} \leq 2.523 \times 10^{-16}, \quad \lambda_2^{\text{even}} \geq 2.085 \times 10^{-12},$$

$$8.206 \times 10^{-15} \leq \lambda_1^{\text{odd}} \leq 2.347 \times 10^{-14}.$$

En particulier le bas du spectre de fenêtre se situe dans le secteur pair avec une séparation d'au moins un facteur 32 contre le secteur impair et 8×10^3 contre la seconde valeur paire : l'état fondamental est simple, et pair.

Corollaire 6.3 (Positivité pour des fonctions test arbitraires). *Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ complexe avec $\text{supp } f \subseteq [-0.8, 0.8]$,*

$$Q(f) \geq 8.9 \times 10^{-18} \|f\|_2^2.$$

De façon équivalente, la fonctionnelle de Weil est non négative sur toutes les $g = f \star \tilde{f}^$ avec $\text{supp } g \subseteq [-1.6, 1.6]$, sans restriction de parité ou de réalité sur f .*

Proof. Lemme 6.1, Théorème 1.2 sur les parties paires, (14) sur les parties impaires. $\square$

Deux remarques. Premièrement, le certificat est purement du côté géométrique ; contrairement au pipeline de bornes supérieures de la Section 11, rien ici ne dépend de données de zéros. Deuxièmement, l'asymétrie de parité est systématique. Le Tableau 1 trace les deux planchers de secteur sur $L \in [0.5, 1.2]$ par assemblée exacte convergée (valeurs de référence, non des certificats ; obtenues dans la base de Legendre par secteur, avec une vérification de convergence à $(N-12)$ modes à chaque entrée). Trois caractéristiques ressortent. (i) Les planchers pairs se situent 20–40% en dessous des bornes supérieures certifiées de la base sinusoïdale du Tableau 3 à chaque L , comme ils le doivent. (ii) Le bas du spectre de fenêtre alterne en parité, $\lambda_1^{\text{even}} < \lambda_1^{\text{odd}} < \lambda_2^{\text{even}} < \lambda_2^{\text{odd}}$ à chaque L scanné, la même alternance que les fonctions propres prolates de la limitation temps–bande. (iii) Le rapport de secteur $\lambda_1^{\text{odd}}/\lambda_1^{\text{even}}$ croît presque exactement géométriquement, $\approx 10^{2.07L+1.32}$ sur la plage scannée (résidus de $\log_{10}$ inférieurs à 0.06). Son mécanisme n'est *pas* le signe du pôle, qui en fait favorise le secteur impair (le terme de pôle ajoute $+2c^2$ à la forme paire et $-2s^2$ à l'impair) ; du côté des zéros l'asymétrie doit plutôt refléter la contrainte $F_o(0) = 0$, qui prive les fonctions test impaires de l'intervalle de fréquences sans zéro $[0, \gamma_1)$ dans lequel les minimiseurs pairs parquent la plupart de leur masse. Nous laissons sa loi quantitative, et la question de savoir si le secteur impair obéit à une version décalée de (5), à une étude séparée. La seconde étape manquante de [9], la convergence des zéros de l'état fondamental approché vers les zéros de zêta quand l'échelle croît, n'est pas touchée par le présent certificat.

Table 1: Planchers de secteur de la forme de fenêtre par assemblée exacte convergée (valeurs de référence, non des certificats). À $L = 0.8$ les deux enceintes certifiées dans cette section, $\lambda_1^{\text{even}} \in [8.9 \times 10^{-18}, 2.52 \times 10^{-16}]$ et $\lambda_1^{\text{odd}} \in [8.21 \times 10^{-15}, 2.35 \times 10^{-14}]$, contiennent les entrées correspondantes. La dernière ligne n'est convergée qu'à un facteur ≈ 2 près (80 modes par secteur).

L	λ_1^{even}	λ_1^{odd}	ratio	λ_2^{even}
0.5	9.34×10^{-7}	1.94×10^{-4}	208	1.80×10^{-2}
0.6	1.61×10^{-9}	5.97×10^{-7}	371	1.03×10^{-4}
0.7	4.18×10^{-13}	2.56×10^{-10}	612	8.65×10^{-8}
0.8	1.65×10^{-17}	1.57×10^{-14}	949	8.38×10^{-12}
0.9	4.14×10^{-23}	7.22×10^{-20}	1746	7.25×10^{-17}
1.0	5.88×10^{-30}	1.49×10^{-26}	2535	2.18×10^{-23}
1.1	2.04×10^{-38}	7.68×10^{-35}	3769	1.54×10^{-31}
1.2	7.94×10^{-49}	4.76×10^{-45}	5997	1.46×10^{-41}

7 Un calcul exploratoire au support 2.38, et un retrait

Une version antérieure de ce travail affirmait un théorème de positivité certifié à $L = 1.19$ (support 2.38). L'affirmation reposait sur la substitution de la constante par premier $A_{\text{eff}}(1.19) = 4.6948$ à $A_L(1.19) = 7.0750$ dans l'enveloppe, ce qui abaissait le seuil apparent à $2\pi e^{A_{\text{eff}}} = 687$ et faisait paraître suffisante l'exécution

$T^\sharp = 1100$, $\beta^* = 0.46948$. Comme l'explique la Remarque 3.3, cette substitution borne le peigne dans la mauvaise direction et est invalide. Par le Lemme 3.2 le vrai seuil est $T_1 = 2\pi e^{A_L} \approx 7.4 \times 10^3$, et un β^* positif de même taille exige $T^\sharp \approx 1.2 \times 10^4$. Comme $\Psi_L \geq \beta^*$ n'est pas établi sur $[1100, 1.2 \times 10^4]$, l'inégalité $Q \geq R$ de (4) n'est pas prouvée pour cette exécution, et rien sur Q n'en découle. Nous retirons l'affirmation.

Nous rapportons néanmoins le calcul, pour deux raisons. La première est comme donnée. La matrice assemblée ($N = 950$ ordres pairs jusqu'à 1898, dps 70, Gauss-40 sur 2200 panneaux de largeur $\frac{1}{2}$, coupure adaptative en région interdite, 10 heures CPU) est vérifiée définie positive, avec une échelle de décalages de Cholesky passant à $10^{-60}, 10^{-55}, 10^{-52}, 10^{-50}, 10^{-48}$ et échouant à 10^{-46} , donc $\lambda_{\min} \in (10^{-48}, 10^{-46})$, avec des résidus $r = 1.7 \times 10^{-70}$ et $s = 2.9 \times 10^{-62}$ au décalage passant. Ceci est compatible avec la positivité de Weil au support 2.38, comme sous RH elle doit l'être, et l'échelle 10^{-48} s'accorde avec la loi (5), qui prédit $\lambda^*(1.19) \approx 10^{-47}$; mais cela ne certifie rien. La seconde raison est méthodologique. Une première tentative à dps 50 ne pouvait conclure que $\lambda_{\min} < 10^{-33}$, définie positive mais non résoluble, et c'est la loi de décroissance de la Section 12 qui a dicté la bonne réponse : élever la précision à dps 70, plutôt que de se méfier du signe.

Le coût corrigé du support 2.38. L'échec est réel, pas seulement technique-de-preuve. Un balayage direct de $\log \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{t} - P_L(t)$ (float64, pas 10^{-3}) montre que sur $[1100, 2\pi e^{A_L + \beta^*}]$ cette quantité tombe sous β^* sur un ensemble de mesure ≈ 18 , d'autant que 2.0 près de $t \approx 1550$. Le peigne a une constante de Lipschitz $\sum_n 2\Lambda(n) \log n / \sqrt{n} \leq 11$ ici, donc un pas de 10^{-3} peut manquer au plus 0.011 , et le creux dépasse cela d'un facteur presque deux cents. Les estimations de Binet derrière le Lemme 3.1 sont de plus bilatérales, le terme digamma égalant $\log \frac{t}{2\pi}$ à $2/t \leq 2 \times 10^{-3}$ près sur cette plage. Donc Ψ_L lui-même, et non seulement son enveloppe, plonge sous β^* d'environ 2 là, et $Q \geq R$ échoue réellement pour l'exécution ci-dessus. Le dernier tel creux se situe à $t_0 \approx 8.48 \times 10^3$, avec une marge ≥ 0.06 de là jusqu'à la prise en charge de l'enveloppe grossière à 1.19×10^4 . Un certificat valide en un seul coup à $L = 1.19$ exige donc $T^\sharp \gtrsim 8.5 \times 10^3$ si l'enveloppe ponctuelle sur $[T^\sharp, 2\pi e^{A_L + \beta^*}]$ est remplacée par une borne inférieure certifiée en arithmétique d'intervalles pour Ψ_L lui-même (le symbole est une expression finie explicite, donc $\min_{[a,b]} \Psi_L$ est certifiable par évaluation par intervalles adaptative), ou $T^\sharp \approx 1.2 \times 10^4$ avec l'enveloppe seule. Dans un cas comme dans l'autre il faut $N \approx eLT^\sharp/2 \approx 1.4\text{--}2 \times 10^4$ ordres de Legendre à une précision de travail proche de 90 chiffres, la loi plaçant le plancher près de 10^{-47} . C'est environ trois ordres de grandeur de plus que l'exécution ci-dessus, hors de portée d'un pipeline en pur Python mais pas d'une assemblée compilée en double-double. Nous ne l'avons pas effectuée.

8 Synthèse : l'enceinte bilatérale

Nous combinons ici les deux moitiés, avant de développer le pipeline des bornes supérieures en détail. À $L = 0.8$ l'enceinte est

$$\underbrace{8.9 \times 10^{-18}}_{\text{Thm. 1.2}} \leq \lambda^*(0.8) \leq \underbrace{2.27 \times 10^{-17}}_{\text{Tableau 3}},$$

une détermination bilatérale certifiée d'une quantité équivalente à RH à un facteur 2.6 près, *les deux inégalités étant inconditionnelles*. En particulier $\inf \sigma(K_{0.8}) \leq 2.27 \times 10^{-17}$ est un fait d'opérateur, non une observation sous RH. Deux conclusions s'ensuivent. Premièrement, la réduction en un seul coup perd peu. La forme réduite R de (4) rejette tout l'excès de Ψ_L au-delà de $T^\sharp$, mais atteint encore à un ordre de grandeur du plancher vrai de la fenêtre : $\lambda_{\min}(R_{150}) = 1.356 \times 10^{-18}$ contre la valeur de fenêtre 1.66×10^{-17} , un facteur 12. La perte est gouvernée par les puits artificiels créés par le découpage en fréquences, c'est-à-dire par l'ensemble $\{t \leq T^\sharp : \Psi_L(t) < \beta^*\}$. Deuxièmement, et réciproquement, la loi (5) calibre l'effort de certification : elle prédit l'échelle de la valeur propre inférieure d'une matrice de certificat planifiée, et donc la précision de travail requise, une interaction consignée à la Section 7.

9 La hauteur de résolution T^* et la loi attendue

Nous passons maintenant à la moitié des bornes supérieures : combien petit $\lambda^*(L)$ devient-il réellement ? Une fonction supportée dans $[-L, L]$ a une transformée de Fourier de type exponentiel L ; par l'inégalité de Jensen ses zéros réels ont une densité au plus L/π dans de longues fenêtres. Les zéros de ζ ont une densité $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi}$ à la hauteur t , qui atteint le budget L/π exactement à

$$T^*(L) = 2\pi e^{2L}.$$

En dessous de T^* la fonction test peut en principe interpoler, en plaçant un zéro de $\hat{f}$ sur chaque γ_j ; au-dessus de T^* les zéros de zêta surpassent les oscillations disponibles et $|\hat{f}|^2$ doit fuir sur eux. On s'attend donc à ce que le minimiseur de (1) supprime $|\hat{f}(\gamma)|$ pour $\gamma < T^*$ jusqu'au niveau de travail $\sqrt{\lambda^*}$ et paie son coût dans la région de transition autour de T^* . La Figure 4 confirme cette image en détail.

Combien coûte la suppression ? Tuer $N = N(T^*)$ zéros avec un budget exactement épuisé est le régime du théorème de Landau–Widom [13] : pour une limitation temps–bande à une fenêtre d'aire K , le nombre de Shannon, les valeurs propres de l'opérateur de concentration plongent au taux $\lambda_{K+j} \approx \exp(-\pi^2 j / \ln K)$. En modélisant la suppression de N zéros à budget saturé comme une excursion d'ordre N au-delà du nombre de Shannon de la fenêtre, on suggère

$$-\ln \lambda^*(L) \asymp \frac{\pi^2 N(T^*)}{\ln N(T^*)} \times \text{const}, \quad (15)$$

une décroissance doublement exponentielle en L avec une correction logarithmique, plutôt que la conjecture naïve un nat par zéro tué $-\ln \lambda^* \asymp N(T^*)$. Nos données tranchent entre les deux : (15) tient avec une constante globale $2\pi^2$, reproduisant les quatre points asymptotiques à 2.7% près (Section 12).

Noter les deux hauteurs qui coexistent maintenant : la hauteur de résolution $T^* = 2\pi e^{2L}$, qui contrôle jusqu'où le minimiseur doit aller et donc combien petit λ^* devient, et le seuil d'alignement du peigne $T_1 = 2\pi e^{A_L}$ avec $A_L \sim 4e^L$, qui contrôle jusqu'où un certificat doit aller. Pour $L \gtrsim 1$ on a $T_1 \gg T^*$, donc certifier la positivité est exponentiellement plus coûteux que de la défaire. C'est le contenu quantitatif de la barrière (Théorème 1.4).

10 Trois générations d'expériences float64 et comment elles échouent

Nous résumons les modes d'échec rencontrés avant de passer au multiprécision ; les détails et scripts sont dans le dépôt (Section 17). Les trois générations discrétisent (1) par une base (φ_k) de fonctions supportées dans $[-L, L]$ et résolvent le problème aux valeurs propres généralisé $Mc = \lambda Gc$ avec $M_{jk} = Q(\varphi_j, \varphi_k)$ et G la matrice de Gram L^2 .

Génération 1 : fonctions chapeaux, côté géométrique. Des fonctions chapeaux linéaires par morceaux (nœuds uniformes, ou nœuds arithmétiques en $\log p^k$) assemblées via le côté géométrique. Deux artefacts sont apparus. D'abord, les demi-chapeaux de bord font $f(\pm L) \neq 0$, donc $|\hat{f}(r)|^2$ ne décroît que comme r^{-2} et l'intégrale archimédienne tronquée perd une masse positive, produisant des valeurs propres négatives parasites qui, à première vue, sont structurellement indiscernables d'un contre-exemple à RH. Ensuite, après avoir corrigé la condition aux limites, le balayage a produit une loi exponentielle convaincante $\lambda^*(L) \sim e^{-2.64L}$, qui s'est révélée plus tard être un artefact du plancher de bruit float64 : le taux apparent est la pente locale de la vraie courbe (beaucoup plus raide) au point où elle croise 10^{-16} .

Génération 2 : B-splines cubiques et extrapolation de Richardson. Remplacer les chapeaux par des splines cubiques C^2 améliore la décroissance spectrale de la base de r^{-2} à r^{-4} par facteur et abaisse démontrablement la borne variationnelle à dimension fixée ; une extrapolation de Richardson en l'espacement des nœuds a alors semblé converger vers une loi exponentielle plus propre de taux 1.52. L'extrapolation, cependant, convergeait vers le plancher de bruit de la discrétisation ambiante, non vers $\lambda^*(L)$: raffiner la grille à L fixé finissait par augmenter le minimum calculé, violant la monotonie variationnelle qu'un schéma

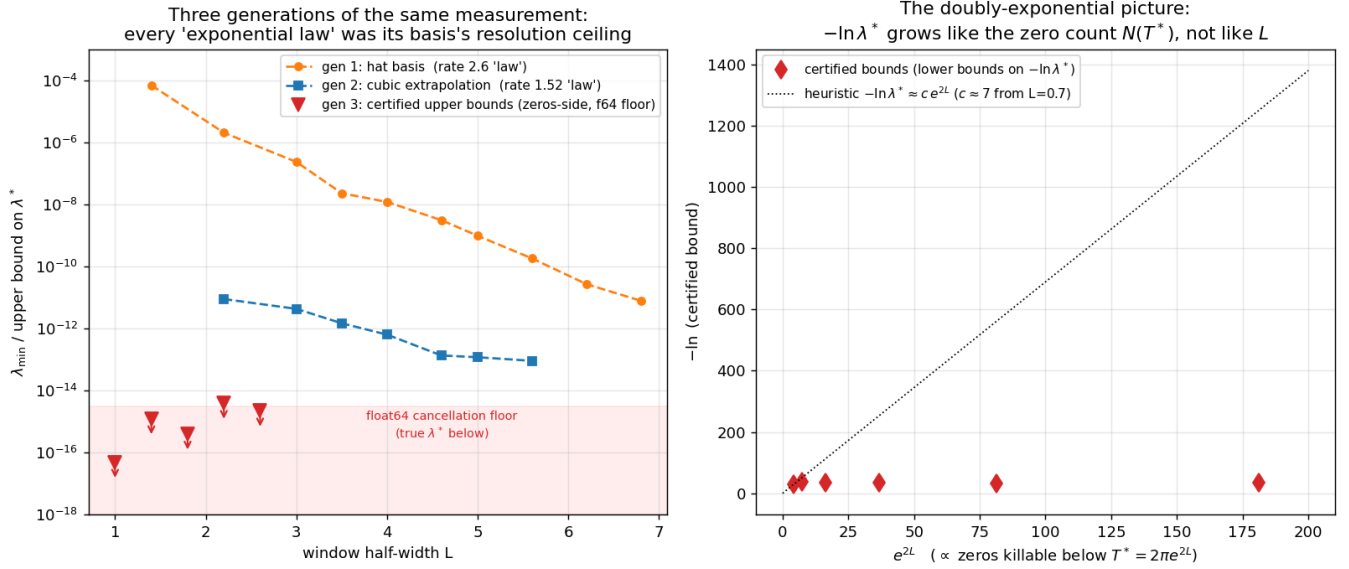


Figure 1: Les trois générations de mesures float64. Les lois exponentielles apparentes (taux 2.64 et 1.52) sont des artefacts de pente locale ; les bornes float64 certifiées (carrés) stagnent au plancher de bruit près de 10^{-16} .

de Galerkin doit respecter. Nous recommandons cette vérification de monotonie comme auto-diagnostic peu coûteux pour les calculs de formes quadratiques près du plancher de précision.

Génération 3 : côté des zéros en float64. Évaluer (7) terme à terme est sans annulation, et une réévaluation certifiée du minimiseur proposé donne de véritables bornes supérieures (par ex. $\lambda^*(0.7) \leq 5.5 \times 10^{-13}$, une borne valide à 10% de la valeur multiprécision ultérieure 5.00×10^{-13}). Mais pour $L \gtrsim 0.9$ les vraies valeurs sombrent sous 10^{-16} et les solveurs propres float64 retournent le plancher de bruit : les bornes certifiées stagnent près de 10^{-16} pour tout $L \in [1.0, 2.2]$. La Figure 1 montre les trois générations contre la courbe multiprécision.

11 Un pipeline multiprécision certifié pour les bornes supérieures

11.1 Base et structure en blocs

Fixons L et travaillons avec les modes orthogonaux

$$s_k(u) = \sin\left(\frac{k\pi(u+L)}{2L}\right), \quad u \in [-L, L], \quad k = 1, \dots, K,$$

qui s'annulent en $\pm L$ et satisfont $\int s_j s_k = L \delta_{jk}$, donc la matrice de Gram est exactement LI et le problème discrétisé est un problème aux valeurs propres symétrique ordinaire ; aucune matrice de masse mal conditionnée n'entre à aucune précision. Les transformées sont explicites : avec $\alpha_k = k\pi/(2L)$,

$$\hat{s}_k(r) = \frac{\alpha_k(e^{-irL} - (-1)^k e^{irL})}{\alpha_k^2 - r^2} = \begin{cases} \frac{2\alpha_k \cos(rL)}{\alpha_k^2 - r^2}, & k \text{ impair}, \\ \frac{-2i \alpha_k \sin(rL)}{\alpha_k^2 - r^2}, & k \text{ pair}, \end{cases} \quad (16)$$

donc la forme (7) se découpe exactement en deux blocs de parité (impair k : $\hat{f}$ réelle paire ; pair k : imaginaire impaire), réduisant la dimension de moitié. Dans toutes les exécutions le minimiseur se trouve

dans le bloc impair- k ($\hat{f}$ paire) ; nous l'avons vérifié en résolvant les deux blocs pour $L \leq 1.2$ et en vérifiant ponctuellement à $L = 1.4$. Nous prenons

$$K = \max(48, \lfloor 5LT^*/\pi \rfloor + 8)$$

et retenons les $k < K$ impairs, de sorte que $\alpha_{\max} \approx 2.5T^*$ une fois $L \geq 0.9$, le plancher de 48 étant actif (et la marge correspondante plus grande) pour $L \leq 0.8$. Cette règle reproduit la dimension de chacune des douze exécutions rapportées ci-dessous, de 24 modes impairs à $L = 0.5$ à 549 à $L = 2.0$. Doubler la marge change $-\ln \lambda^*$ de 0.03% à $L = 1.6$ (Tableau 2).

11.2 Assemblée et budget d'erreur

Pour le bloc impair la forme discrétisée s'écrit

$$A_{jk} = \sum_{0 < \gamma \leq \Gamma_0} 8 \cos^2(\gamma L) u_j(\gamma) u_k(\gamma) + T_{jk}, \quad u_k(\gamma) = \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 - \gamma^2},$$

avec $\Gamma_0 = 1419.8$ (les 1000 premiers zéros) et T le modèle de queue de la Définition 11.4. Chaque terme est non négatif comme forme quadratique ; l'assemblée est sans annulation par construction. Les trois sources d'erreur sont contrôlées comme suit.

Lemme 11.1 (Erreur de localisation des zéros). *Soit $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j + \delta_j$ avec $|\delta_j| \leq \delta$ les ordonnées utilisées dans l'assemblée, et soit M_j le supremum de $|\hat{f}'|$ sur le segment joignant γ_j à $\tilde{\gamma}_j$. Alors pour toute fonction test f ,*

$$\left| \sum_j 2|\hat{f}(\tilde{\gamma}_j)|^2 - \sum_j 2|\hat{f}(\gamma_j)|^2 \right| \leq \sum_j \left(4|\hat{f}(\gamma_j)| M_j \delta + 2 M_j^2 \delta^2 \right).$$

Proof. Fixons j et posons $a = |\hat{f}(\gamma_j)|$, $b = |\hat{f}(\tilde{\gamma}_j)|$. Le théorème de la moyenne donne $|b - a| \leq M_j \delta$, d'où

$$|b^2 - a^2| = |b - a| (b + a) \leq M_j \delta (2a + M_j \delta) = 2a M_j \delta + M_j^2 \delta^2.$$

En multipliant par 2 et en sommant sur j on obtient la borne annoncée. $\square$

Remarque 11.2 (Précision exigée des ordonnées). *Le Lemme 11.1 est ce qui fixe la précision de travail, par le dimensionnement suivant. À un quasi-minimiseur la transformée est supprimée aux basses ordonnées jusqu'au niveau de la valeur propre elle-même, $|\hat{f}(\gamma_j)| \approx \sqrt{\lambda^*}$, tandis que les dérivées M_j sont d'ordre un sur la plage qui compte ; les deux termes de la borne sont alors de tailles $\delta \sqrt{\lambda^*}$ et δ^2 . Exiger que les deux soient petits contre λ^* donne $\delta \lesssim \sqrt{\lambda^*}$: pour résoudre une valeur de taille λ^* les ordonnées doivent être connues à une précision d'environ $\sqrt{\lambda^*}$. C'est une estimation de dimensionnement plutôt qu'une borne à constantes explicites, puisque $|\hat{f}(\gamma_j)| \approx \sqrt{\lambda^*}$ est une caractéristique observée des minimiseurs calculés et non quelque chose de prouvé ici ; elle n'est utilisée que pour choisir δ , et comme le reste de cette sous-section elle n'entre pas dans les affirmations inconditionnelles (Remarque 11.3).*

En conséquence, les 1000 zéros ont été calculés à 115 chiffres significatifs avec `mpmath` ($\delta^2 \approx 10^{-220}$, suffisant pour $\lambda^* \geq 10^{-192}$, c'est-à-dire pour $L \leq 1.8$), et recalculés à 155 chiffres pour l'exécution $L = 2.0$ ($\delta^2 \approx 10^{-300}$) ; les précisions de travail étaient 60–330 chiffres selon L (Tableau 3).

Remarque 11.3 (Statut des données de zéros). *L'assemblée du côté des zéros de cette sous-section n'est utilisée que pour proposer des vecteurs d'essai et pour vérifier les certificats géométriques de la Section 11.4. Les valeurs de zéros elles-mêmes sont des calculs multiprécision de haute confiance (`mpmath.zetazero`), non des enceintes formellement vérifiées ; un certificat entièrement rigoureux du côté des zéros vérifierait en outre chaque enceinte (Newton par intervalles ou principe de l'argument) et certifierait la complétude en dessous de Γ_0 (méthode de Turing). Aucune des deux étapes n'est hors de portée : la vérification de Platt et Trudgian [22] place chaque zéro de hauteur au plus $3 \cdot 10^{12}$ sur la droite critique et, par la méthode*

de Turing, fixe le nombre de zéros en dessous d'une telle hauteur, donc la réalité de nos 1000 zéros et la complétude de la liste en dessous de $\Gamma_0 = 1419.8$ sont des faits de la littérature plutôt que des hypothèses ; ce qui reste est seulement de propager cette vérification en enceintes certifiées à notre précision de travail, et l'appel à RH proprement dit est confiné à la queue $\gamma > \Gamma_0$. Rien de tout cela n'entre dans les affirmations inconditionnelles du Tableau 3.

Définition 11.4 (Modèle de queue). Pour $r > \Gamma_0 > \alpha_{\max}$ développons $\hat{f}(r) = -2 \cos(rL) \sum_{j \geq 0} M_j r^{-2j-2}$ avec les moments $M_j = \sum_k a_k \alpha_k^{2j+1}$. L'assemblée remplace la queue $\sum_{\gamma > \Gamma_0} 2|\hat{f}(\gamma)|^2$ par la valeur du modèle

$$T_{\text{modèle}} = \left(\sum_{j,j' \leq J} M_j M_{j'} C_{j+j'} \right) (1 + \varepsilon_J), \quad C_m = \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma_0^{-(2m+3)}}{2m+3} \left(\ln \frac{\Gamma_0}{2\pi} + \frac{1}{2m+3} \right),$$

obtenue en bornant $\cos^2 \leq 1$, en remplaçant les zéros au-delà de Γ_0 par la densité lisse $\nu(t) dt$, et en tronquant le développement en moments à la profondeur J (avec reste géométrique $\varepsilon_J \leq (\alpha_{\max}/\Gamma_0)^{2J+2}/(1 - (\alpha_{\max}/\Gamma_0)^2)$).

La Définition 11.4 est un modèle, non un lemme : remplacer la mesure de comptage des zéros dN par la densité lisse νdt n'est pas une inégalité, parce que $N(t)$ fluctue autour de sa partie lisse. Le modèle n'est utilisé que pour assembler la matrice dont le vecteur propre inférieur sert de vecteur d'essai, et aucune affirmation certifiée n'en dépend. Dans l'étape de certification (Section 11.3) la queue est bornée par une véritable inégalité qui porte explicitement la borne de Backlund sur $N(t) - \bar{N}(t)$. Le choix de la profondeur J est délicat, non pour le certificat, qui est valide pour tout J , mais pour la qualité du vecteur d'essai ; voir la Remarque 11.6. Nous utilisons J de 12 à petit L jusqu'à 80 à $L = 2.0$, validé en doublant J et en vérifiant la stabilité de la valeur certifiée.

Remarque 11.5 (Proposition versus certificat). La valeur propre minimale de A/L est une proposition, contaminée par le modèle de queue et l'arrondi du solveur. La borne supérieure certifiée pour $\lambda^*(L)$ n'est produite que par la réévaluation par intervalles de son vecteur propre à la Section 11.3, qui utilise des transformées exactes en dessous de Γ_0 et l'inégalité rigoureuse de queue au-dessus. Par la Remarque 2.2 cette réévaluation est valide pour tout vecteur de coefficients quelconque, donc aucune propriété de la proposition n'a besoin d'être crue.

11.3 Fermeture par arithmétique d'intervalles

L'assemblée et la résolution propre tournent en multiprécision ordinaire (non par intervalles) ; leurs erreurs d'arrondi sont des dizaines de chiffres de garde en dessous de l'échelle cible, mais bien en dessous n'est pas certifié. Nous fermons donc la boucle comme suit. Le vecteur propre a retourné par le solveur est traité comme une simple proposition, puisque par la Remarque 2.2 tout vecteur de coefficients quelconque fournit une borne supérieure valide, et le quotient de Rayleigh $R(a) = Q(f_a)/(L\|a\|^2)$ est réévalué de zéro en arithmétique d'intervalles (`mpmath.iv`) :

1. chaque zéro entre comme un intervalle englobant $[\gamma_j - \delta_j, \gamma_j + \delta_j]$ couvrant à la fois la précision des chiffres stockés et l'arrondi d'analyse ;
2. la somme finie sur les 1000 premiers zéros n'utilise que les transformées explicites (16), donc chaque opération est une opération d'intervalle sur des entrées exactes ;
3. la queue $\sum_{\gamma > \Gamma_0} 2|\hat{f}(\gamma)|^2$ est bornée via la série signée $S(t) = \sum_{j \geq 0} M_j t^{-2j-2}$, de sorte que $2\hat{f}(t)^2 \leq 8S(t)^2$ avec le facteur trigonométrique borné par un. En écrivant $B(t) = 1 + \ln t$, qui domine $|N(t) - \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi e} - \frac{7}{8}|$ sur la plage utilisée (Backlund ; voir [19, §9.4]), l'intégration par parties contre dN donne

$$\sum_{\gamma > \Gamma_0} 8S(\gamma)^2 \leq 8 \int_{\Gamma_0}^{\infty} S^2 \nu dt + 8S(\Gamma_0)^2 B(\Gamma_0) + 16 \left(\int_{\Gamma_0}^{\infty} S^2 B \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_0}^{\infty} S'^2 B \right)^{1/2},$$

le dernier facteur par Cauchy–Schwarz appliqué à $\int 16|SS'|B$. Chaque intégrale est une double somme signée finie sur les moments avec des noyaux explicites. Garder les signes importe : l’annulation croisée en j dans ces sommes court sur des dizaines d’ordres de grandeur de profondeur, donc toute borne passant par $\sum_j |M_j|$ serait inutile. La troncature de la série à J porte un reste géométrique, dimensionné (adaptativement en J) en dessous de 10^{-12} de la valeur cible.

L’extrémité supérieure de l’intervalle résultant est une borne variationnelle supérieure rigoureuse pour $\lambda^*(L)$, conditionnelle à RH et à l’exactitude des valeurs de zéros. Nous conservons ces enceintes du côté des zéros comme vérifications croisées ; les certificats inconditionnels du Tableau 3 sont les enceintes du côté géométrique de la sous-section suivante.

Remarque 11.6 (La fermeture a attrapé une vraie erreur). *La réévaluation par intervalles n’est pas une formalité ; pour $L \geq 1.8$ elle a corrigé le record dans les deux sens. Avec la queue en moments de la Définition 11.4 tronquée à $J \approx 10\text{--}14$, ce qui est amplement suffisant pour $L \leq 1.6$, le vecteur propre $L = 2.0$ a dérivé dans des directions dont la pénalité de queue est sous-estimée par le modèle tronqué, la marge relative étant d’ordre z^{J+1} avec $z = (\alpha_{\max}/\Gamma_0)^2 \approx 0.37$ à $L = 2.0$. La réévaluation certifiée a exposé la proposition résultante 8.2×10^{-281} comme inatteignable : la vraie valeur de ce quotient de Rayleigh est 2.5×10^{-276} , quatre ordres de grandeur plus grande. Réciproquement, à $L = 1.8$ le modèle superficiel cachait des directions réellement meilleures, et approfondir à $J = 40$ a amélioré la borne certifiée de 5.2×10^{-184} à 9.0×10^{-186} ; à $L = 2.0$, approfondir à $J = 80$ l’a fixée à 4.2×10^{-283} , et doubler J à nouveau reproduit chaque chiffre affiché. Le mécanisme derrière tout cela est que la valeur propre recherchée se situe des centaines d’ordres de grandeur en dessous de la norme de la matrice, donc une erreur de modèle même au niveau relatif 10^{-11} recâble complètement le bas du spectre. C’est l’analogie multiprécision des pathologies float64 de la Section 10 : un solveur propre exploitera toute direction non pénalisée de son modèle, et seule une borne re-dérivée indépendamment du modèle mérite confiance.*

Remarque 11.7 (Portée de la certification). *Ce qui est certifié est précisément ceci : chaque nombre affiché est une borne supérieure pour l’infimum de dimension infinie $\lambda^*(L)$. Ce qui n’est pas certifié est l’inégalité inverse, la proximité de la borne à $\lambda^*(L)$. La preuve de proximité est structurelle plutôt que rigoureuse : le système sinusoïdal est une base orthogonale complète de $L^2(-L, L)$, donc les valeurs de Galerkin décroissent monotonement vers $\lambda^*(L)$ quand $K \rightarrow \infty$, et la stabilisation observée sous raffinement de dimension (Tableau 2) indique que la limite a été atteinte à la précision affichée ; de plus, à $L = 0.8$ la borne inférieure inconditionnelle du Théorème 1.2 confirme la proximité à un facteur 2.6 près (Section 8). La loi empirique de la Section 12 est donc établie pour les bornes certifiées ; son identification avec les asymptotiques de λ^* lui-même fait partie de la Conjecture 12.1.*

11.4 Certification du côté géométrique

Le certificat inconditionnel évalue le quotient de Rayleigh du même vecteur d’essai $f_a = \sum_k a_k s_k$ entièrement du côté géométrique de la formule explicite. En écrivant $g = f_a \star \tilde{f}_a$ et $N_2 = \|f_a\|_2^2 = L \sum a_k^2$,

$$\begin{aligned} Q(f_a) = & 2 \left(\int_{-L}^L f_a \cosh \frac{x}{2} dx \right)^2 - (\gamma_E + \log \pi + \log(1 - e^{-4L})) N_2 \\ & + \int_0^{2L} \frac{2(e^{-2x} N_2 - e^{-x/2} g(x))}{1 - e^{-2x}} dx - \sum_{\log n < 2L} \frac{2\Lambda(n)}{\sqrt{n}} g(\log n). \end{aligned} \quad (17)$$

Chaque terme est une somme finie ou une intégrale sur un intervalle compact ; aucun zéro et aucune RH n’entrent. L’autocorrélation des modes cosinus impairs- k admet une forme explicite, donc la somme sur les nombres premiers est exacte (à l’arrondi d’intervalle près). L’intégrale archimédienne est découpée en un morceau explicite et un reste analytique à l’origine ; le reste est intégré par Gauss–Legendre à panneaux dyadiques avec restes rigoureux d’ellipse de Bernstein. L’extrémité supérieure de l’enceinte d’intervalle résultante de $Q(f_a)/N_2$ est la borne inconditionnelle rapportée dans le Tableau 3.

vérification	résultat	note
borne float64 à $L = 0.7$	5.0×10^{-13} vs 5.5×10^{-13}	méthode indépendante, 10%
réexécution $L = 1.2$, zéros à 115 chiffres	110.49 vs 110.49	insensibilité à la précision des zéros
parité à $L = 1.4$	impair 176.61 vs pair 167.04	le minimiseur est $\hat{f}$ paire
$K \rightarrow K + 32$ à $L = 1.6$	276.38 vs 276.45	0.03%
$K \rightarrow K + 24$ à $L = 0.9$	51.18 vs 51.32	0.3%
fermeture par intervalles, tous L	valeurs du Tableau 3	Remarque 11.6
borne inférieure à $L = 0.8$	$8.9 \times 10^{-18} \leq 2.27 \times 10^{-17}$	Thm. 1.2

Table 2: Vérifications de cohérence internes du pipeline de bornes supérieures.

L	n	dps	$\lambda^*(L) \leq$	$-\ln \lambda^*$	$N(T^*)$	$\frac{-\ln \lambda^* \cdot \ln N}{N}$
0.5	24	90	1.05×10^{-6}	13.76	1	—
0.6	24	90	1.82×10^{-9}	20.13	1	—
0.7	24	90	4.99×10^{-13}	28.33	3	10.37
0.8	24	90	2.27×10^{-17}	38.32	4	13.28
0.9	31	95	5.91×10^{-23}	51.18	6	15.28
1.0	40	110	8.08×10^{-30}	66.99	8	17.42
1.1	53	110	2.78×10^{-38}	86.48	12	17.90
1.2	70	125	9.98×10^{-49}	110.53	16	19.16
1.4	119	155	1.91×10^{-77}	176.65	30	20.02
1.6	200	260	8.61×10^{-121}	276.46	55	20.15
1.8	333	420	7.86×10^{-186}	426.22	96	20.27
2.0	549	560	3.19×10^{-283}	650.47	165	20.13

Table 3: Bornes supérieures certifiées inconditionnelles pour $\lambda^*(L)$, par évaluation par intervalles du côté géométrique de $Q(f_L)/\|f_L\|_2^2$ (Section 11.4). Ici n est le nombre de modes sinusoidaux impairs retenus, dps est la précision de travail géométrique, $N(T^*)$ est le nombre exact de zéros en dessous de $T^* = 2\pi e^{2L}$, et la dernière colonne est le coût normalisé par zéro, qui plafonne à $20.1 \approx 2\pi^2 = 19.74$. La dimension constante $n = 24$ pour $L \leq 0.8$ est le plancher de 48 dans la règle de la Section 11.

À chaque $L \in [0.5, 2.0]$ l’enceinte géométrique s’accorde avec la proposition du côté des zéros à une précision relative bien en dessous des chiffres affichés, et est typiquement quelques pour cent plus précise (le pipeline du côté des zéros porte un majorant de queue positif dont l’évaluation géométrique n’a pas besoin). Les largeurs relatives d’enceinte vont de 10^{-61} à $L = 0.5$ à 10^{-37} à $L = 2.0$; l’annulation entre les blocs $O(1)$ de (17), qui à $L = 2$ atteint quelque 280 chiffres, est entièrement résolue par la précision de travail de la Section 11.

11.5 Vérifications de cohérence

Les vérifications sont rassemblées dans le Tableau 2. Le coût du calcul entier est modeste : la plus grande exécution ($L = 2.0$: 549 modes impairs, arithmétique à 330 chiffres, 1000 zéros à 155 chiffres, vecteurs propres et fermeture par intervalles inclus) prend moins de deux heures sur un cœur de bureau avec le backend gmpy2.

12 Résultats : la loi de Landau–Widom

Le Tableau 3 liste les bornes certifiées ; les Figures 2–4 les affichent. Dans cette section λ^* désigne ces bornes supérieures certifiées ; par la Remarque 11.7, chaque énoncé ci-dessous est établi pour les bornes et conjectural pour l’infimum lui-même. Trois observations.

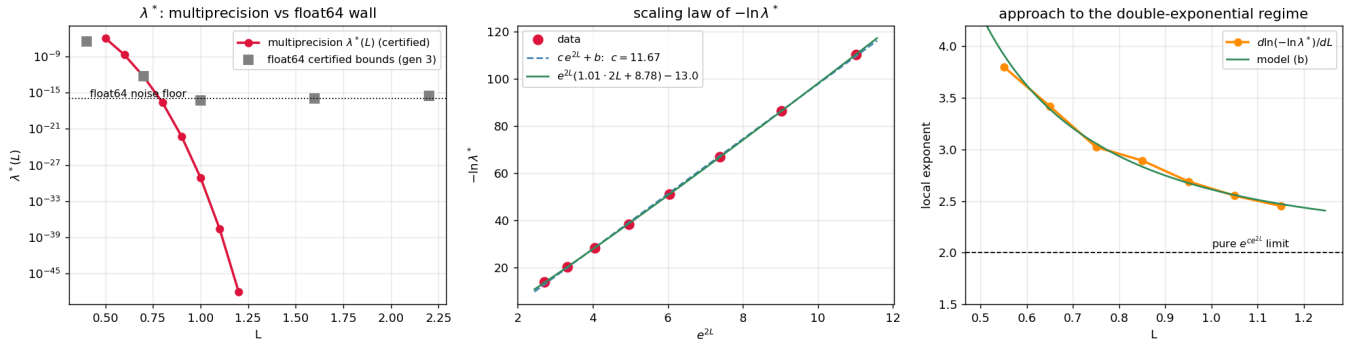


Figure 2: Résultats multiprécision pour $L \leq 1.2$: les bornes certifiées (à gauche) tombent à travers le mur float64 ; $-\ln \lambda^*$ contre e^{2L} (au centre) ; l'exposant local $d \ln(-\ln \lambda^*)/dL$ décroissant vers son asymptote (à droite).

Discrimination verdict: $-\ln \lambda^*(L) \approx 2\pi^2 N(T^*)/\ln N(T^*)$ — the Landau-Widom law wins

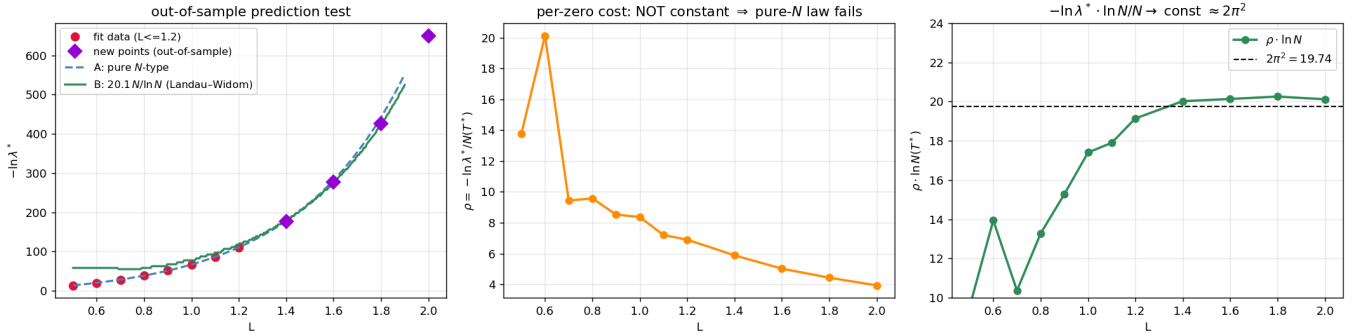


Figure 3: Discrimination de modèles. À gauche : prédiction hors échantillon des nouveaux points $L = 1.4, 1.6, 1.8$ par les deux lois calibrées sur $L \leq 1.2$. Au centre : le coût par zéro $-\ln \lambda^*/N(T^*)$ n'est pas constant, ce qui exclut la loi pure en N . À droite : multiplié par $\ln N(T^*)$ il plafonne à $20.1 \approx 2\pi^2$.

(i) *La loi.* Le coût par zéro $-\ln \lambda^*/N(T^*)$ décroît régulièrement (de 9.4 à $L = 0.7$ à 3.9 à $L = 2.0$), ce qui exclut une loi proportionnelle à $N(T^*)$; multiplié par $\ln N(T^*)$ il plafonne : 20.02, 20.14, 20.26, 20.12 aux quatre derniers points, environ 2% au-dessus de $2\pi^2 = 19.74$. Un ajustement à une constante unique sur les quatre points asymptotiques donne

$$-\ln \lambda^*(L) = (20.13 \pm 0.10) \frac{N(T^*)}{\ln N(T^*)}, \quad \frac{20.13}{2\pi^2} = 1.020,$$

avec des résidus en échantillon inférieurs à 0.7% ; la valeur sans paramètre $C = 2\pi^2$ reproduit les mêmes quatre points à 1.4%–2.6% près. Ce sont des résidus d'ajustement, et ils doivent être distingués du test hors échantillon de la Section 1.3. Parce que la constante du plateau dérive encore sur la plage de calibration (19.15 à $L = 1.2$ dans la dernière colonne, contre 20.02–20.26 au-delà), toute constante unique calibrée sur $L \leq 1.2$ sous-prédit nécessairement les nouveaux points, ici d'environ 5%. Ce qui discrimine les deux lois est que ces résidus ne portent aucune tendance, tandis que ceux du modèle pur en N croissent monotonement. Nous lisons le décalage résiduel par rapport à $2\pi^2$, entre 1.4% et 2.6% sur le plateau et sans tendance visible à ces tailles, comme une correction de taille finie $O(\ln \ln N / \ln N)$ des asymptotiques de Landau–Widom.

(ii) *Le modèle rejeté.* Le modèle à trois paramètres $-\ln \lambda^* = e^{2L}(\alpha \cdot 2L + \beta) + \delta_0$ ajuste la plage $L \leq 1.2$ avec un résidu maximal 0.2, et son coefficient dominant $\alpha = 1.01$ semblait identifier une loi un nat par zéro

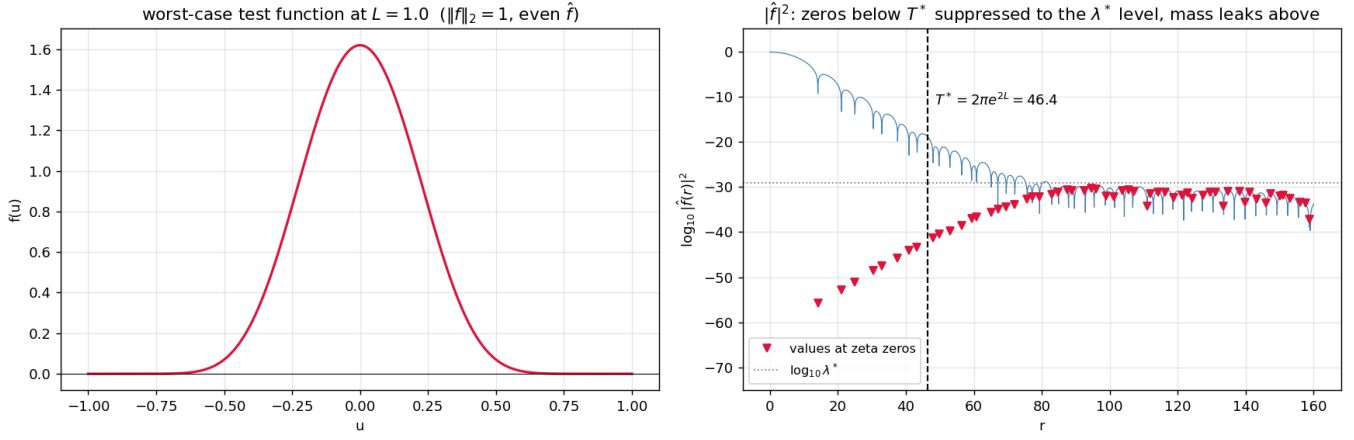


Figure 4: Portrait du minimiseur à $L = 1.0$. À gauche : la fonction test du pire cas. À droite : $|\hat{f}|^2$ à l'échelle logarithmique ; les valeurs aux zéros de zêta en dessous de T^* sont supprimées au niveau λ^* , et le coût est payé dans la région de transition autour de T^* .

. Le test hors échantillon le rejette : son erreur de prédiction croît monotonement (+0.8%, +2.0%, +3.7%, +5.8%), tandis que la forme de Landau–Widom à un paramètre, calibrée sur la même plage, se trompe de −4.4%, −4.9%, −5.5%, −4.8%, plus grande en taille mais sans tendance et avec deux paramètres de moins. Nous consignons la comparaison parce que la lecture naïve va dans l'autre sens : un modèle à plusieurs paramètres ajustant une courte plage avec une grande précision est une preuve plus faible qu'une loi à un paramètre avec une constante identifiable qui prédit de nouvelles données.

(iii) *Le minimiseur.* La Figure 4 montre la fonction test minimisante à $L = 1.0$: $|\hat{f}|^2$ plonge au niveau de travail à chaque zéro en dessous de $T^* \approx 46$, et libère sa masse juste au-dessus de T^* , en accord quantitatif avec l'image d'interpolation de la Section 9.

Conjecture 12.1. *Quand $L \rightarrow \infty$,*

$$-\ln \lambda^*(L) = 2\pi^2 \frac{N(T^*)}{\ln N(T^*)} (1 + o(1)), \quad T^* = 2\pi e^{2L}, \quad N(T^*) = e^{2L}(2L - 1) + O(L).$$

Remarque 12.2 (la constante est ajustée). *La forme $N/\ln N$ est ce que les données ci-dessus discriminent ; la constante $2\pi^2$ est lue sur le plateau et n'est pas dérivée ici. En écrivant $R_1 = -\ln \lambda^*/(2\pi^2 N/\ln N)$, les nombres du Tableau 3 donnent*

$$R_1 = 1.015, 1.020, 1.027, 1.020 \quad (L = 1.4, 1.6, 1.8, 2.0),$$

plat à 1.3% près, ce qui est la preuve de la Conjecture 12.1 à ces tailles. Mais R_1 a dépassé 1 et dérive lentement vers le haut, et le décalage résiduel par rapport à 1, que l'observation (i) lit comme une correction de taille finie $O(\ln \ln N/\ln N)$, est aussi ce que produirait une loi avec une constante asymptotique légèrement plus grande, ou un facteur à variation lente différent. Quatre points à $L \leq 2$ ne peuvent séparer ces lectures ; nous énonçons la Conjecture 12.1 comme la lecture des données présentes.

13 Une borne supérieure conditionnelle doublement exponentielle

Nous prouvons maintenant le Théorème 1.3. Sa portée est limitée : le théorème ne capture que le contenu qualitatif de la loi empirique, à savoir une décroissance plus rapide qu'exponentielle, au moins doublement exponentielle avec exposant e^L . Ni l'échelle $T^* = 2\pi e^{2L}$ ni la constante $2\pi^2$ n'en découlent ; les deux restent conjecturales. Partout, RH est supposée, de sorte que (7) tient, et nous écrivons $T = 2\pi e^L$ et $\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi}$, de sorte que $\nu(T) = \frac{L}{2\pi}$, la moitié du budget de type L/π . La construction opère donc à demi-saturation, et c'est ce qui limite l'exposant à e^L .

13.1 Faits standard

Nous utilisons deux faits inconditionnels et une constante classique. Écrivons

$$N(t) = \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi e} + \frac{7}{8} + R(t), \quad |R(t)| \leq C_0 \ln(t+2) \quad (t \geq 0), \quad (18)$$

la formule de Riemann–von Mangoldt avec la borne de Backlund sur le reste [19, §9.3–9.4]. Noter que $\frac{d}{dt} \left(\frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi e} \right) = \nu(t)$. Deuxièmement, de $\sum_{\rho} \rho^{-1} (1-\rho)^{-1} = 2 + \gamma_E - \ln 4\pi$ [21, Ch. 12] et $\rho(1-\rho) = \gamma^2 + \frac{1}{4}$ sous RH,

$$\sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma^2} \leq \left(1 + \frac{1}{4\gamma_1^2}\right) \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma^2 + \frac{1}{4}} = \left(1 + \frac{1}{4\gamma_1^2}\right) \frac{2 + \gamma_E - \ln 4\pi}{2} < 0.0232. \quad (19)$$

Troisièmement, comme les $\leq C_1 L$ zéros situés dans $[T, T+1]$ coupent cet intervalle en au plus $C_1 L + 1$ lacunes, l'une des lacunes a une longueur $\geq 1/(C_1 L + 1)$; remplacer T par le milieu de cette lacune déplace T d'au plus 1 (changeant $N(T)$, $\nu(T)$ et LT de $O(L)$, ce qui est absorbé dans chaque terme d'erreur ci-dessous) et assure

$$\text{dist}(T, \{\gamma_j\}) \geq \frac{c_0}{L} \quad (20)$$

pour un $c_0 > 0$ absolu. Nous supposons (20) à partir de maintenant.

13.2 Construction

Posons

$$\hat{f}_0(r) = B(r) h(r), \quad B(r) = \prod_{0 < \gamma_j \leq T} \left(1 - \frac{r^2}{\gamma_j^2}\right), \quad h(r) = \left(\frac{\sin(Lr/m)}{Lr/m}\right)^m, \quad m = \left\lceil \frac{LT}{e} \right\rceil.$$

B est un polynôme pair de degré $2N(T)$ (type exponentiel 0) s'annulant à chaque zéro jusqu'à T ; h est paire, entière de type exponentiel exactement $m \cdot (L/m) = L$, avec $|h(r)| \leq \min\{1, (m/L|r|)^m\}$ sur $\mathbb{R}$. Par (18), $N(T) = e^L(L-1) + O(L)$, tandis que $m \geq LT/e = (2\pi/e)Le^L > 2.31 Le^L$, donc $m > 2N(T) + 2$ pour tout L grand ; par suite $\hat{f}_0(r) = O(|r|^{2N(T)-m}) = O(|r|^{-2})$ et $\hat{f}_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$. Par le théorème de Paley–Wiener, $f_0 = \mathcal{F}^{-1} \hat{f}_0$ est réelle, paire, continue et supportée dans $[-L, L]$; la décroissance polynomiale de $\hat{f}_0$ place f_0 dans la classe admissible pour la formule explicite (voir [4, §2]), de sorte que, sous RH,

$$Q(f_0) = \sum_{\gamma > 0} 2 \hat{f}_0(\gamma)^2 = \sum_{\gamma > T} 2 \hat{f}_0(\gamma)^2,$$

les zéros jusqu'à T étant annihilés par B .

13.3 La borne potentielle pour le produit

Lemme 13.1 (Borne potentielle). *Soit $x \geq 1 + c_0/(LT)$. Alors*

$$\ln B(xT) \leq \nu(T) T \bar{g}(x) + C L (L + \ln 2x), \quad \bar{g}(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{x^2 - u^2}{u^2} \right)_+ du,$$

avec une constante absolue C . Le profil $\bar{g}$ a les formes closes

$$\bar{g}(x) = x \ln(3 + 2\sqrt{2}) \quad (1 \leq x \leq \sqrt{2}), \quad \bar{g}(x) = (x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1) \quad (x \geq \sqrt{2}),$$

et satisfait $\bar{g}(x) \leq 2 + 2 \ln x$ pour $x \geq \sqrt{2}$.

Proof. Écrivons $r = xT$ et $\varphi(t) = \ln \frac{r^2 - t^2}{t^2}$ pour $0 < t \leq T < r$, de sorte que $\ln B(r) = \int_0^T \varphi(t) dN(t)$ comme intégrale de Stieltjes. Soit $\tilde{R}(t) = N(t) - \frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi e}$; par (18), $|\tilde{R}(t)| \leq C_0 \ln(t+2)+1$, et $\tilde{R}(t) = -\frac{t}{2\pi} \ln \frac{t}{2\pi e} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$. Alors

$$\ln B(r) = \int_0^T \varphi(t) \nu(t) dt + \int_0^T \varphi(t) d\tilde{R}(t). \quad (21)$$

Partie lisse. Nous affirmons $\varphi(t)\nu(t) \leq \varphi(t)_+ \nu(T)$ ponctuellement sur $(0, T]$. En effet, ν est croissante avec $\nu(t) \leq \nu(T)$; si $\varphi(t) \geq 0$ l'affirmation suit immédiatement (aussi quand $\nu(t) < 0$, c'est-à-dire $t < 2\pi$); et $\varphi(t) < 0$ force $t > r/\sqrt{2} \geq T/\sqrt{2} > 2\pi$, où $\nu(t) > 0$, rendant le membre de gauche négatif. Donc, en substituant $t = uT$ et en utilisant $r = xT$,

$$\int_0^T \varphi \nu dt \leq \nu(T) \int_0^T \varphi(t)_+ dt = \nu(T) T \int_0^1 \left(\ln \frac{x^2 - u^2}{u^2} \right)_+ du = \nu(T) T \bar{g}(x).$$

Reste. En intégrant par parties (le terme de bord en 0 s'annule puisque $\tilde{R}(t) = O(t \ln \frac{1}{t})$ tandis que $\varphi(t) = O(\ln \frac{1}{t})$ là),

$$\int_0^T \varphi d\tilde{R} = \varphi(T) \tilde{R}(T) - \int_0^T \varphi'(t) \tilde{R}(t) dt.$$

Pour le terme de bord, $\varphi(T) = \ln(x^2 - 1)$; par l'hypothèse $x - 1 \geq c_0/(LT)$ on obtient $|\ln(x^2 - 1)| \leq \ln(LT/c_0) + \ln 2x + C = O(L + \ln 2x)$, et $|\tilde{R}(T)| = O(\ln T) = O(L)$. Pour l'intégrale, $\varphi'(t) = -\frac{2t}{r^2 - t^2} - \frac{2}{t}$ a un signe constant, et

$$\int_0^T \frac{2t}{r^2 - t^2} dt = \ln \frac{x^2}{x^2 - 1} = O(L + \ln 2x), \quad \int_{\gamma_1}^T \frac{2}{t} dt = O(L),$$

tandis que sur $(0, \gamma_1)$ on a $\frac{2}{t} |\tilde{R}(t)| \leq \frac{1}{\pi} (\ln \frac{2\pi}{t} + 1)$, qui est intégrable d'intégrale $O(1)$. En multipliant par $\sup_{t \leq T} |\tilde{R}(t)| = O(L)$ où approprié, le reste est $O(L(L + \ln 2x))$, ce qui prouve la borne.

Formes closes. L'intégrande de $\bar{g}$ est positive exactement pour $u < x/\sqrt{2}$. Si $x \geq \sqrt{2}$ c'est tout $[0, 1]$ et un calcul direct donne $\int_0^1 \ln(x^2 - u^2) du = (x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1) - 2$ et $-2 \int_0^1 \ln u du = 2$. Si $1 \leq x \leq \sqrt{2}$, la substitution $u = xv$ donne $\bar{g}(x) = x \int_0^{1/\sqrt{2}} (\ln(1 - v^2) - 2 \ln v) dv = x \bar{g}(1)$, et en évaluant la primitive $v \ln(1 - v^2) + \ln \frac{1+v}{1-v} - 2v \ln v$ en $v = 1/\sqrt{2}$ (les deux termes en $\ln 2$ s'annulent) on obtient $\bar{g}(1) = \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(3 + 2\sqrt{2})$; les deux formes closes coïncident en $x = \sqrt{2}$ parce que $\ln(\sqrt{2}+1) = -\ln(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2})$. Enfin, $\psi(x) := 2 + 2 \ln x - \bar{g}(x)$ satisfait $\psi'(x) = \frac{2}{x} - \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{x} - 2 \operatorname{artanh} \frac{1}{x} < 0$ et $\psi(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$, donc $\psi > 0$ sur $[\sqrt{2}, \infty)$. $\square$

13.4 Masse du candidat

Lemme 13.2 (Masse). *Pour tout L grand, $\int_0^1 \hat{f}_0(r)^2 dr \geq 0.9$, et donc $\|f_0\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_0^2 \geq \frac{0.9}{\pi} \geq \frac{1}{4}$.*

Proof. Soit $0 \leq r \leq 1$. Comme $\gamma_1 > 14$, chaque facteur de B satisfait $0 < 1 - r^2/\gamma_j^2 < 1$, et par $\ln(1 - y) \geq -\frac{y}{1-y}$ pour $0 \leq y < 1$, avec (19),

$$\ln B(r) \geq -\frac{r^2}{1 - \gamma_1^{-2}} \sum_{\gamma > 0} \frac{1}{\gamma^2} \geq -0.0234,$$

donc $B(r)^2 \geq e^{-0.047} \geq 0.953$. Pour la fenêtre, posons $z = Lr/m \leq L/m \rightarrow 0$; de $\frac{\sin z}{z} \geq 1 - \frac{z^2}{6} \geq e^{-z^2/4}$ (valable pour $0 \leq z \leq 1.6$) on obtient $h(r) \geq e^{-mz^2/4} \geq e^{-L^2/(4m)} \rightarrow 1$. Donc $\int_0^1 \hat{f}_0^2 \geq 0.953(1 - o(1)) \geq 0.9$ pour L grand, et l'énoncé L^2 découle de Plancherel et de la parité. $\square$

13.5 Décroissance ponctuelle et le profil F

Lemme 13.3 (Borne ponctuelle de queue). *Pour tout zéro $\gamma = xT > T$,*

$$\ln |\hat{f}_0(\gamma)| \leq LT F(x) + CL(L + \ln 2x), \quad F(x) = \frac{\bar{g}(x)}{2\pi} - \frac{1}{e} \ln(ex).$$

Proof. Par (20), $x - 1 = (\gamma - T)/T \geq c_0/(LT)$, donc le Lemme 13.1 s'applique et donne, avec $\nu(T)T = LT/2\pi$, $\ln B(xT) \leq \frac{LT}{2\pi} \bar{g}(x) + O(L(L + \ln 2x))$. Pour la fenêtre, $LxT/m \geq ex/(1 + e/LT) > 1$, donc $|h(xT)| \leq (m/LxT)^m$ et

$$\ln |h(xT)| \leq -m \ln \frac{LxT}{m} \leq -m \left(\ln(ex) - \frac{e}{LT} \right) \leq -\frac{LT}{e} \ln(ex) + 2,$$

en utilisant $LT/e \leq m \leq LT/e + 1$ et $\ln(ex) \geq 1$. En ajoutant les deux bornes on prouve le lemme. $\square$

Lemme 13.4 (Le profil est uniformément négatif). $\sup_{x \geq 1} F(x) = F(1) = \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{2\pi} - \frac{1}{e} = -0.0873\dots$, et

$$F(x) \leq -\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{\pi}\right)(1 + \ln x) \leq -0.0495(1 + \ln x) \quad (x \geq \sqrt{2}).$$

Proof. Sur $[1, \sqrt{2}]$. Ici $F(x) = \frac{\kappa}{2\pi}x - \frac{1+\ln x}{e}$ avec $\kappa = \ln(3+2\sqrt{2})$, donc $F''(x) = 1/(ex^2) > 0$: F est convexe et atteint son maximum en un point extrême. Numériquement $F(1) = -0.08733\dots$ et $F(\sqrt{2}) = -0.09862\dots$, donc le maximum est $F(1)$.

Sur $[\sqrt{2}, \infty)$. Maintenant $F'(x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{ex} = \frac{H(x)-2\pi}{2\pi ex}$ avec $H(x) = 2ex \operatorname{artanh} \frac{1}{x}$. Comme $\operatorname{artanh} \frac{1}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{-2k-1}}{2k+1} < \sum_{k \geq 0} x^{-2k-1} = \frac{x}{x^2-1}$, on obtient $H'(x) = 2e \left(\operatorname{artanh} \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-1} \right) < 0$: H est strictement décroissante, de $H(\sqrt{2}) = e\sqrt{2}\kappa = 6.776 > 2\pi$ à $\lim_{x \rightarrow \infty} H = 2e = 5.437 < 2\pi$. Donc F croît jusqu'au point unique x_1 avec $H(x_1) = 2\pi$ et décroît ensuite. De $H(1.6) = 6.377 > 2\pi > 6.238 = H(1.7)$ on obtient $x_1 \in (1.6, 1.7)$. Comme $\bar{g}$ et $\ln$ sont croissantes, sur tout sous-intervalle $[a, b]$ on a $F \leq \bar{g}(b)/2\pi - (1 + \ln a)/e$; en appliquant ceci sur $[1.6, 1.625]$, $[1.625, 1.65]$, $[1.65, 1.675]$, $[1.675, 1.7]$ on obtient les quatre bornes -0.0908 , -0.0909 , -0.0910 , -0.0911 , donc $F(x_1) \leq -0.0908 < F(1)$. Avec la monotonie sur $[\sqrt{2}, 1.6]$ et $[1.7, \infty)$ ceci prouve $\sup_{x \geq 1} F = F(1)$.

Décroissance logarithmique. Pour $x \geq \sqrt{2}$, le Lemme 13.1 donne $\bar{g}(x) \leq 2 + 2\ln x$, d'où $F(x) \leq \frac{2+2\ln x}{2\pi} - \frac{1+\ln x}{e} = -\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{\pi}\right)(1 + \ln x)$, et $\frac{1}{e} - \frac{1}{\pi} = 0.04957\dots > 0.0495$. $\square$

13.6 Preuve du théorème

Preuve du Théorème 1.3. Écrivons $\theta = -2F(1) = 0.1746\dots$, de sorte que $2LTF(1) = -\theta LT$. Découpons les zéros $\gamma = x_\gamma T > T$ en $x_\gamma = e$.

Zone proche ($1 < x_\gamma \leq e$). Par les Lemmes 13.3–13.4, chaque terme satisfait $2\ln |\hat{f}_0(\gamma)| \leq 2LTF(1) + O(L^2)$, et par (18) le nombre de tels zéros est $N(eT) = O(T \ln T) = e^{O(L)}$. Donc

$$\sum_{T < \gamma \leq eT} 2\hat{f}_0(\gamma)^2 \leq e^{-\theta LT + O(L^2)}.$$

Zone éloignée ($x_\gamma > e$). Par le Lemme 13.4 et $1 + \ln x \geq 2$ là,

$$2LTF(x) + CL(L + \ln 2x) \leq -0.099 LT(1 + \ln x) + CL(L + \ln 2x) \leq -\theta LT - \frac{1}{50} LT \ln x$$

pour tout L grand, parce que $0.099(1 + \ln x) \geq 0.198 \geq \theta + 0.02$ et $LT \gg L$ absorbe le terme d'erreur. En sommant sur les blocs dyadiques $e^{2^k T} < \gamma \leq e^{2^{k+1} T}$, qui contiennent $O(2^k T(L + k))$ zéros chacun,

$$\sum_{\gamma > eT} 2\hat{f}_0(\gamma)^2 \leq 2e^{-\theta LT} \sum_{k \geq 0} O(2^k T(L + k)) e^{-\frac{1}{50} LT(1+k \ln 2)} \leq e^{-\theta LT + O(L)}.$$

En combinant les deux zones, $Q(f_0) \leq e^{-\theta LT + O(L^2)}$. Avec le Lemme 13.2,

$$\lambda^*(L) \leq \frac{Q(f_0)}{\|f_0\|_2^2} \leq 4e^{-\theta LT + O(L^2)} = \exp\left(-\left(\frac{4\pi}{e} - 2\ln(3 + 2\sqrt{2})\right)L e^L + O(L^2)\right),$$

où $\theta \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{e} - 2\ln(3 + 2\sqrt{2}) = 1.0974\dots > 1$. Donc $\lambda^*(L) \leq \exp(-Le^L)$ pour tout $L \geq L_0$. $\square$

Remarque 13.5 (Forme fine de la borne). *La preuve donne l'énoncé légèrement plus fort*

$$-\ln \lambda^*(L) \geq \left(\frac{4\pi}{e} - 2\ln(3 + 2\sqrt{2})\right)L e^L (1 + O(L e^{-L})), \quad \frac{4\pi}{e} - 2\ln(3 + 2\sqrt{2}) = 1.0974\dots$$

Les deux constantes $\ln(3 + 2\sqrt{2})$ (le coût potentiel du produit au bord, Lemme 13.1) et $1/e$ (le taux de décroissance optimal d'une fenêtre en puissance de sinc par unité de type) sont toutes deux forcées par la construction ; améliorer l'une ou l'autre exige une fenêtre véritablement différente, cf. Remarque 13.6.

Remarque 13.6 (L'obstruction à saturation complète). *En reprenant le même calcul avec $T = 2\pi e^{2aL}$ on montre que la construction ne se referme que pour $a \lesssim 0.65$: à $a = 1$ le taux de décroissance requis de la fenêtre sur $[T, 2T]$ dépasse ce que les puissances de sinc réalisent, d'un facteur d'environ 1.5. Atteindre le vrai exposant e^{2L} exige le compromis optimal entre suppression et décroissance pour les fonctions à bande limitée, qui est exactement le régime décrit par les asymptotiques de Landau–Widom, et dont le taux de plongement $\pi^2/\ln$ apparaît comme la constante de la Conjecture 12.1. Transformer cette conjecture en théorème apparaît donc comme un problème sur les opérateurs de concentration sur des réunions de nombreux intervalles, que nous laissons ouvert. Dans la direction inverse, une borne inférieure de la forme $\lambda^*(L) \geq e^{-CN(T^*)}$ valide inconditionnellement pour tout L impliquerait RH, donc l'objectif réaliste est l'énoncé conditionnel.*

14 La barrière

Nous pouvons maintenant prouver le Théorème 1.4 et étayer les Remarques 1.5 et 1.6.

14.1 Preuve du Théorème 1.4

$T^\sharp > T_1 = 2\pi e^{A_L}$ est forcé dans le Théorème 1.1 parce que $\beta^* > 0$ l'exige. Par le Lemme 3.2 le supremum du peigne vaut exactement A_L , donc aucune borne ponctuelle sur le peigne ne peut faire mieux. Par le PNT, $A_L = \sum_{n < e^{2L}} \frac{2\Lambda(n)}{\sqrt{n}} \sim 4e^L$, donc $T_1 = 2\pi \exp((4 + o(1))e^L)$: la taille du certificat est doublement exponentielle en le support. Cette partie est inconditionnelle.

14.2 La marge mesurée (Remarque 1.5)

La marge que tout certificat doit résoudre est le plancher lui-même, et sa décroissance est maintenant une loi mesurée plutôt qu'un folklore : par le Tableau 3 et (5), le plancher de fenêtre s'effondre au taux de Landau–Widom $\exp(-2\pi^2 N(T^*)/\ln N(T^*))$ avec $T^* = 2\pi e^{2L}$, tombant à travers 17 ordres de grandeur à $L = 0.8$, 48 à $L = 1.2$ et 283 à $L = 2$. La forme réduite R suit de près le plancher de fenêtre (Section 8). L'écart entre $\lambda_{\min}(R)$ et λ^* est gouverné par l'ensemble de puits artificiels $W_{T^\sharp} = \{t \leq T^\sharp : \Psi_L(t) < \beta^*\}$ créé par le découpage : les fonctions à bande limitée peuvent se concentrer sur $W_{T^\sharp}$, et chaque mode de Shannon $\frac{2L|W_{T^\sharp}|}{2\pi}$ de l'ensemble de puits coûte une fraction définie d'une décade de plancher. À $L = 0.8$ nous mesurons une charge de Shannon ~ 5 contre un écart d'une décade, donc environ 0.2 décade par mode ; la charge est ~ 20 –25 dans l'exécution exploratoire $L = 1.19$ de la Section 7. Le statut logique ici est que la loi (5) n'est établie que pour les bornes supérieures certifiées. La convertir en une borne inférieure prouvée du coût de tout certificat de positivité exigerait la théorie d'échantillonnage des bas zéros de zêta, le plancher de fenêtre étant deux fois le carré de la plus petite valeur singulière d'un opérateur d'échantillonnage des bas zéros, et cela reste ouvert.

14.3 Interprétation (Remarque 1.6)

Les deux échelles exponentielles se rencontrent de plein fouet. Un certificat du type en un seul coup doit atteindre le seuil d'alignement du peigne $T_1 = 2\pi e^{(4+o(1))e^L}$, parce qu'à t légèrement au-delà de T_1 l'enveloppe inférieure du symbole est à peine positive et le certificat doit vérifier que les fonctions à bande limitée ne peuvent exploiter les quasi-alignements de $(t \log p)_p$. En dessous de T_1 de tels alignements annulent le symbole ; au-dessus de T_1 ils ne le peuvent pas. Mais prouver un seuil plus fin que T_1 , c'est-à-dire prouver quantitativement que les phases du peigne évitent l'alignement simultané, est un énoncé sur les formes linéaires en $\{\log p\}$, et c'est la même espèce d'information que celle encodée par les estimations de densité des zéros. Pendant ce temps la quantité à certifier s'effondre au taux de Landau–Widom dans la hauteur de résolution $T^* = 2\pi e^{2L}$. Certifier la positivité au-delà du support ≈ 3.2 ($T_1 \approx 10^7$) par n'importe quelle méthode à enveloppe ponctuelle est donc computationalement vain. En ce sens la voie de la positivité, poursuivie au-delà du mur, revient dans l'arithmétique des zéros qu'elle cherchait à contourner.

15 Routes échouées (pour mémoire)

Trois alternatives naturelles au Théorème 1.1 ont été implémentées et abandonnées ; nous les consignons parce que leurs modes d'échec motivent la formulation en espace de fréquences. (Ce sont les pendants du côté géométrique des pathologies float64 de la Section 10.) (1) *Lemmes de résolution par Galerkin* (certifier $Q \geq 0$ sur une fenêtre, relever en résolvant $Gx = \varphi$) : les inverses sont rugueux dans $L^2[-L, L]$, les résidus de Galerkin ne décroissent que polynomialement, et les tolérances 10^{-80} requises sont inatteignables. (2) *Plafonnement du symbole* (remplacer Ψ_L au-delà de T_δ par un minorant constant) : fatal de façon démontrable, puisqu'une fois que la fenêtre résout le plafond la forme devient indéfinie ($\lambda_{\min} \approx -2.7$ mesuré). Plafonner le symbole revient à admettre de faux zéros. (3) *Certificats par blocs en espace d'ordre* (bloc de fenêtre exact + bornes de queue + couplage de Schur) : les termes premiers sont des opérateurs de décalage, donc toute coupure dure dans l'espace d'ordre de Legendre laisse un couplage $O(1)$ à travers l'interface ; les directions collectives de bord perdent ≈ -2.4 contre une réserve qui ne croît que logarithmiquement. (4) *Affûtage de l'enveloppe par premier* : grouper le peigne par nombres premiers affine son minimum mais ne peut abaisser son maximum, qui vaut exactement A_L (Lemme 3.2). Une version antérieure a utilisé la constante affûtée dans l'enveloppe, ce qui est la mauvaise direction, et l'affirmation résultante du support 2.38 est retirée à la Section 7. L'erreur est facile à commettre, puisque les profondeurs de puits de Ψ_L , gouvernées par A_{eff} , et son plancher haute fréquence, gouverné par A_L , sont deux extrêmes différents du même peigne. Le découpage en fréquences, en revanche, n'a pas d'interface et seulement un couplage super-exponentiellement petit. Il semble être la bonne formulation, et nous soupçonnons, sans le prouver, qu'il est essentiellement unique à cet égard.

16 Discussion

Interprétation. Le profil $\lambda^*(L)$ quantifie la difficulté d'approcher RH par des fonctions test à support compact, et cet article le détermine des deux côtés. Un certificat inconditionnel pousse la frontière du côté positif de $\log 2$ à 1.6, tandis que les bornes variationnelles certifiées montrent que la marge ne se contente pas de se réduire exponentiellement mais s'effondre au taux de Landau–Widom $\exp(-2\pi^2 N / \ln N)$ en le nombre N de zéros résolus par la fenêtre. Tout argument de positivité en dimension finie qui opère dans une fenêtre $[-L, L]$, en particulier toute troncature dans le programme prolate de Connes–Consani [6], doit certifier une quantité aussi petite. Réciproquement, une construction spectrale dont la marge de positivité décroîtrait plus lentement que (5) sur des fenêtres contredirait nos bornes variationnelles supérieures.

La constante $2\pi^2$. Son apparition relie le problème variationnel arithmétique (1) à la théorie spectrale de la limitation temps–bande d'une manière quantitative qui, à notre connaissance, est nouvelle. Il est tentant de lire (5) comme disant que près de la hauteur de résolution les zéros de ζ se comportent, pour ce qui est de la suppression à bande limitée, comme un ensemble d'échantillonnage saturé générique, l'arithmétique n'entrant que par la densité ν et donc par $N(T^*)$, la constante étant universelle.

Les deux hauteurs. La synthèse des deux moitiés isole une asymétrie structurelle de la forme de Weil sur les fenêtres. Défaire la positivité, c’est-à-dire trouver de petits quotients de Rayleigh, est gouverné par la hauteur de résolution $T^* = 2\pi e^{2L}$, simplement exponentielle, parce que le minimiseur n’a besoin d’interpoler que les zéros qu’il peut résoudre. Certifier la positivité par le côté géométrique est gouverné par le seuil d’alignement $T_1 = 2\pi e^{(4+o(1))e^L}$, doublement exponentiel, parce que le certificat doit exclure le pire cas d’alignement de phase du peigne des nombres premiers, et par le Lemme 3.2 aucune enveloppe ponctuelle ne peut faire mieux. L’écart entre e^{2L} et e^{4e^L} est l’écart entre savoir où sont les zéros et prouver que les nombres premiers ne peuvent pas conspirer. Le combler est un problème arithmétique, concernant les propriétés diophantiennes simultanées de $\{\log p\}$, et non un problème de calcul.

Problèmes ouverts. (i) Prouver la Conjecture 12.1, conditionnellement à RH, probablement via les asymptotiques de Landau–Widom multi-intervalles ; la moitié des bornes supérieures avec une certaine constante suit si l’obstruction de fenêtre de la Remarque 13.6 peut être résolue. (ii) Identifier la correction $O(1/\ln N)$, pour laquelle nos données à $L = 1.4\text{--}2.0$ fournissent déjà des contraintes, la dernière colonne du Tableau 3 y lisant 20.02, 20.14, 20.26, 20.12. (iii) Prouver une borne inférieure sur le coût de tout certificat de positivité de fenêtre, pas seulement des certificats à enveloppe ponctuelle, via la théorie d’échantillonnage des bas zéros de zêta. (iv) Répéter les deux expériences pour les fonctions L de Dirichlet : la loi (5) devrait tenir avec la fonction de comptage des zéros correspondante si le mécanisme est universel, et la réduction en un seul coup s’applique mot pour mot avec le peigne du conducteur correspondant. (v) Étendre les certificats. Un certificat valide au support 2.38 exige $T^\sharp \approx 1.2 \times 10^4$ et $N \approx 2 \times 10^4$ (Section 7), ce qui est du territoire double-double compilé, à moins que la voie par intervalles esquissée là, certifiant $\min \Psi_L$ directement sur la plage finie où l’enveloppe est pessimiste, ne ramène $T^\sharp$ vers l’échelle de résolution. (vi) Du côté des bornes supérieures, à $L = 2.4$ la borne prédite est $-\ln \lambda^* \approx 1.5 \times 10^3$ (précision ~ 800 chiffres, dimension $\sim 2 \times 10^3$), à portée de quelques jours-cœur avec l’arithmétique GMP.

17 Reproductibilité

Les deux pipelines tournent sur une seule machine en Python 3 avec `mpmath` [23] (avec le backend `gmpy2` pour les plus grandes exécutions). La certification des bornes inférieures représente ≈ 40 heures CPU au total, plus environ deux heures CPU pour les exécutions des secteurs de parité de la Section 6. Du côté des bornes supérieures, le certificat géométrique à $L \leq 1.4$ finit en moins de deux minutes par point ; l’exécution $L = 2.0$ (arithmétique géométrique à 365 chiffres, 549 modes impairs) est le goulot d’étranglement.

Pour les affirmations certifiées, les fichiers accompagnants font partie de la preuve plutôt que de la courtoisie. Le code source des deux pipelines, les versions logicielles, les données de zéros, les matrices certifiées et les facteurs de Cholesky, les journaux d’exécution, les budgets d’erreur et les hachages SHA-256 sont fournis comme matériel supplémentaire, avec un vérificateur indépendant (`verify_certificate.py`, dépendant uniquement de `mpmath`) qui re-factorise une matrice archivée, recalcule le résidu de Cholesky en précision doublée, et redérive le budget de quadrature c_{err} et les constantes de queue $\varepsilon_D, \varepsilon_B$ de (13). Sur le M_{200} archivé il retourne $Q(f) \geq 9.0 \times 10^{-18} \|f\|_2^2$ (le 8.9×10^{-18} du Théorème 1.2 arrondit les budgets vers le bas).

References

- [1] A. Weil, *Sur les “formules explicites” de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, Tome Supplémentaire (1952), 252–265.
- [2] K. Barner, *On A. Weil’s explicit formula*, J. reine angew. Math. **323** (1981), 139–152.
- [3] H. Yoshida, *On Hermitian forms attached to zeta functions*, in: Zeta Functions in Geometry, Adv. Stud. Pure Math. **21**, 1992, 281–325.
- [4] E. Bombieri, *Remarks on Weil’s quadratic functional in the theory of prime numbers, I*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **11** (2000), 183–233.
- [5] A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), 29–106.

- [6] A. Connes and C. Consani, *Weil positivity and trace formula, the archimedean place*, Selecta Math. (N.S.) **27** (2021), no. 4, Paper No. 77.
- [7] A. Connes and H. Moscovici, *The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **119** (2022), no. 22, e2123174119.
- [8] A. Connes and W. D. van Suijlekom, *Quadratic forms, real zeros and echoes of the spectral action*, preprint, arXiv:2511.23257 (2025).
- [9] A. Connes, C. Consani and H. Moscovici, *Zeta spectral triples*, preprint, arXiv:2511.22755 (2025).
- [10] M. Suzuki, *Weil’s quadratic form via the screw function*, preprint, arXiv:2606.09096 (2026).
- [11] A. Groskin, *A finite Guinand–Weil dictionary and archimedean tail order for the truncated Weil quadratic form*, preprint, arXiv:2607.02828 (2026).
- [12] D. Slepian and H. O. Pollak, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty, I*, Bell System Tech. J. **40** (1961), 43–63.
- [13] H. J. Landau and H. Widom, *Eigenvalue distribution of time and frequency limiting*, J. Math. Anal. Appl. **77** (1980), 469–481.
- [14] B. Rodgers and T. Tao, *The de Bruijn–Newman constant is non-negative*, Forum Math. Pi **8** (2020), e6.
- [15] D. H. J. Polymath, *Effective approximation of heat flow evolution of the Riemann ξ function, and a new upper bound for the de Bruijn–Newman constant*, Res. Math. Sci. **6** (2019), no. 31.
- [16] E. Carneiro, V. Chandee and M. B. Milinovich, *Bounding $S(t)$ and $S_1(t)$ on the Riemann Hypothesis*, Math. Ann. **356** (2013), 939–968.
- [17] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, AMS Colloq. Publ. **53**, 2004.
- [18] S. M. Rump, *Verification methods: rigorous results using floating-point arithmetic*, Acta Numerica **19** (2010), 287–449.
- [19] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
- [20] K. Seip, *Interpolation and Sampling in Spaces of Analytic Functions*, University Lecture Series **33**, American Mathematical Society, 2004.
- [21] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*, 3rd ed., revised by H. L. Montgomery, Graduate Texts in Mathematics **74**, Springer, 2000.
- [22] D. Platt and T. Trudgian, *The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$* , Bull. Lond. Math. Soc. **53** (2021), 792–797.
- [23] F. Johansson et al., *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic*, <https://mpmath.org>.