

Concavité spectrale Riccati–Gamma, annulation symétrique de zéros et critères conditionnels pour l’hypothèse de Riemann

Dragoş-Pătru Covei

Département de mathématiques appliquées
Université d’études économiques de Bucarest
6 Piaţa Romană, 010374 Bucarest, Roumanie

juin 2026

Résumé : Nous étudions une approche de type Riccati-Gamma appliquée à la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Riemann complétée. La première partie démontre, avec tous les détails locaux requis, qu’un critère naïf de concavité verticale bilatérale pour Ξ'/Ξ ne saurait constituer une preuve de l’hypothèse de Riemann ; en effet, chaque zéro engendre des courbures verticales de signes opposés de part et d’autre du pôle de la dérivée logarithmique. La seconde partie substitue à cet obstacle un cadre rigoureux de moyennage spectral fini. Nous démontrons une compensation sur la droite critique, la positivité de la contribution appariée hors de la droite critique (du côté gauche) sous une condition concrète portant sur le noyau à basse fréquence, une conséquence conditionnelle concernant la densité des zéros, ainsi qu’un théorème conditionnel précis indiquant quelles hypothèses de localisation supplémentaires impliqueraient l’hypothèse de Riemann. Ces résultats ne sont donc pas présentés comme une preuve inconditionnelle de l’hypothèse de Riemann ; ils isolent plutôt des hypothèses analytiques vérifiables sous lesquelles le problème de Riemann reçoit une réponse affirmative. Des scripts Python reproductibles et des figures numériques complètent l’analyse théorique.

1 Introduction

Soit

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

et rappelons que $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$. La fonction zeta complète est

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Elle est entière d’ordre un et elle satisfait $\xi(s) = \xi(1-s)$. On écrit $\Xi = \xi$ et on étudie

$$\mathcal{R}(s) = \frac{\Xi'(s)}{\Xi(s)}$$

loin des zéros de Ξ .

La motivation provient des analyses de Riccati-Gamma des séries de Dirichlet gamma-complétées, où les dérivées logarithmiques satisfont des identités de Riccati et héritent asymptotiquement des facteurs gamma ; voir Covei [1]. Le point central de cet article est que de telles identités sont utiles mais non décisives en elles-mêmes pour l’hypothèse de Riccati. Un théorème de localisation des zéros requiert une information de signe suffisamment forte pour contrôler les pôles de \mathcal{R} .

Problème 1.1 (La question de l’hypothèse de Riemann pour Riccati-Gamma). *Peut-on formuler des informations sur la concavité verticale de la dérivée logarithmique $\mathcal{R} = \Xi'/\Xi$ - éventuellement après une moyenne spectrale symétrique - de manière à contraindre les zéros non triviaux de ζ ?*

Nous apportons trois réponses rigoureuses. Premièrement, un critère de concavité bilatérale ponctuel fait défaut localement au niveau de chaque zéro. Deuxièmement, les paires de zéros symétriques s'annulent sur la droite critique; par conséquent, une moyenne effectuée exactement sur $\text{Re}(s) = 1/2$ ne permet pas de détecter les paires situées hors de la droite critique. Troisièmement, l'évaluation d'une moyenne spectrale à basse fréquence à gauche de la droite critique engendre une contribution positive appariée pour toute paire de zéros située hors de la droite critique. Cela conduit à un théorème conditionnel de densité des zéros ainsi qu'à des hypothèses suffisantes concrètes permettant d'établir l'hypothèse de Riemann.

2 Faits analytiques classiques

Proposition 2.1 (Fonction zêta complétée). *La fonction*

$$\Xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

se prolonge en une fonction entière d'ordre un. Ses zéros sont exactement les zéros non triviaux de ζ , comptés avec multiplicité, et elle vérifie $\Xi(s) = \Xi(1-s)$.

Preuve. La fonction zêta admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} avec un unique pôle simple en $s = 1$. Le facteur $s(s-1)$ élimine ce pôle ainsi que le zéro sans incidence en $s = 0$ de l'expression complétée. Les pôles de $\Gamma(s/2)$ se situent aux entiers pairs négatifs ou nuls et sont compensés par les zéros triviaux de ζ aux entiers pairs négatifs. Par conséquent, Ξ est entière. L'équation fonctionnelle de ζ équivaut à $\Xi(s) = \Xi(1-s)$ avec cette normalisation. La formule de Stirling pour $\Gamma(s/2)$ et les estimations classiques de croissance pour ζ impliquent que l'ordre est un.

Une fois pris en compte le pôle, les pôles de la fonction gamma et les zéros triviaux, les zéros restants sont précisément les zéros non triviaux de ζ ; voir [2, Chap. 1–2] et [3, Chap. 1–2]. \square

Proposition 2.2 (Dérivée logarithmique explicite). *En tout point où $\zeta(s) \neq 0$ et $s \neq 0, 1$, on a*

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log \pi + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{s}{2}\right) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

où $\psi = \Gamma'/\Gamma$ est la fonction digamma.

Preuve. Prenons la dérivée logarithmique de

$$\Xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s).$$

Les facteurs s , $s-1$, $\pi^{-s/2}$, $\Gamma(s/2)$ et $\zeta(s)$ contribuent, respectivement, par

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{1}{s-1}, \quad -\frac{1}{2}\log \pi, \quad \frac{1}{2}\psi(s/2), \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

La somme de ces contributions donne la formule. \square

Proposition 2.3 (Pôles des dérivées logarithmiques). *Soit F une fonction non nulle et holomorphe au voisinage de ρ , et supposons que F admette un zéro d'ordre $m \geq 1$ en ρ . Alors*

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{m}{s-\rho} + H(s),$$

où H est holomorphe au voisinage de ρ . Ainsi, tout zéro de F devient un pôle simple de F'/F , de résidu égal à sa multiplicité.

Preuve. Écrivons $F(s) = (s - \rho)^m G(s)$, où G est holomorphe et $G(\rho) \neq 0$. La dérivation logarithmique donne

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{m}{s - \rho} + \frac{G'(s)}{G(s)}.$$

Puisque $G(\rho) \neq 0$, le dernier terme est holomorphe au voisinage de ρ . \square

Proposition 2.4 (Symétries fonctionnelles de \mathcal{R}). *En dehors des zéros de Ξ , on a*

$$\mathcal{R}(1 - s) = -\mathcal{R}(s), \quad \mathcal{R}(\bar{s}) = \overline{\mathcal{R}(s)}.$$

Preuve. En dérivant $\Xi(s) = \Xi(1 - s)$, on obtient $\Xi'(s) = -\Xi'(1 - s)$. La division par $\Xi(s) = \Xi(1 - s)$ donne la première identité. La seconde identité découle de $\Xi(\bar{s}) = \overline{\Xi(s)}$, conséquence du fait que les coefficients de Taylor de Ξ sont réels. \square

3 Identités de Riccati et leurs limites

Définition 3.1 (Transformée de Riccati-Gamma). *Pour une fonction méromorphe F non identiquement nulle, sa transformée de Riccati logarithmique est définie par*

$$R_F(s) = \frac{F'(s)}{F(s)}$$

sur le complémentaire des zéros et des pôles de F . Si

$$F(s) = \prod_{j=1}^d \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) L(s),$$

où $\lambda_j > 0$ et L est une série de Dirichlet ou une fonction L après prolongement, on appelle R_F une transformée de Riccati-Gamma.

Proposition 3.2 (Équation de Riccati tautologique). *Soit F une fonction méromorphe et non nulle sur un domaine D , et soit $R_F = F'/F$ sur un sous-domaine simplement connexe évitant les zéros et les pôles de F . Alors*

$$R'_F(s) = \frac{F''(s)}{F(s)} - R_F(s)^2.$$

En particulier, $\mathcal{R} = \Xi'/\Xi$ vérifie

$$\mathcal{R}'(s) = Q_\Xi(s) - \mathcal{R}(s)^2, \quad Q_\Xi(s) = \frac{\Xi''(s)}{\Xi(s)},$$

en dehors des zéros de Ξ .

Preuve. Dériver $R_F = F'/F$ et appliquer la règle de dérivation d'un quotient :

$$R'_F = \frac{F''F - (F')^2}{F^2} = \frac{F''}{F} - \left(\frac{F'}{F}\right)^2.$$

La spécialisation à $F = \Xi$ est immédiate. \square

Remarque 3.3. *La proposition 3.2 est une identité, et non un théorème de localisation des zéros. La difficulté dans toute application de l'équation de Riccati ne réside pas dans l'existence d'une telle équation, mais dans la dérivation d'informations globales sur le signe, la monotonie ou la positivité, suffisamment fortes pour contraindre tous les zéros.*

Le cadre Riccati-Gamma de Covei (Covei2026) est pertinent car il recherche de telles informations pour les fonctions éta généralisées sous des hypothèses explicites. Ces hypothèses doivent être vérifiées pour Ξ ; elles ne peuvent être transférées par simple analogie.

4 Obstruction locale à la concavité verticale

Le critère préliminaire exigeait la concavité stricte de

$$t \mapsto \operatorname{Re} \mathcal{R}(\sigma + it)$$

sur une bande bilatérale autour de $\operatorname{Re}(s) = 1/2$. Le théorème suivant montre que ceci ne peut être vrai dans aucun voisinage passant horizontalement par un zéro.

Théorème 4.1 (Courbure imposée par un zéro). *Soit F holomorphe au voisinage de $\rho = \beta + i\gamma$ et supposons que ρ soit un zéro d'ordre $m \geq 1$. Posons*

$$u_\sigma(t) = \operatorname{Re} \frac{F'(\sigma + it)}{F(\sigma + it)}$$

où l'expression est définie. Pour $a > 0$ suffisamment petit,

$$\frac{d^2}{dt^2} u_{\beta-a}(\gamma) > 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} u_{\beta+a}(\gamma) < 0.$$

Par conséquent, aucune bande verticale ouverte à deux côtés contenant le zéro ne peut supporter une concavité verticale stricte de $\operatorname{Re}(F'/F)$ de part et d'autre du zéro.

Preuve. D'après la proposition 2.3,

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = \frac{m}{s - \rho} + H(s),$$

avec H holomorphe au voisinage de ρ . On écrit $s = \beta + x + i(\gamma + y)$. La partie réelle du terme principal est :

$$\operatorname{Re} \frac{m}{x + iy} = \frac{mx}{x^2 + y^2}.$$

Pour un $x \neq 0$ fixé,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{mx}{x^2 + y^2} = \frac{2mx(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

En $y = 0$, cette expression vaut $-2m/x^3$. Ainsi, elle vaut $2m/a^3 > 0$ en $x = -a$ et $-2m/a^3 < 0$ en $x = a$. La fonction $\operatorname{Re} H(\beta + x + i(\gamma + y))$ possède une dérivée seconde par rapport à y bornée dans un disque fermé suffisamment petit. Comme la courbure principale tend vers $\pm\infty$ lorsque $a \downarrow 0$, les signes annoncés prédominent pour tout $a > 0$ suffisamment petit. \square

Corollaire 4.2 (Échec du critère bilatéral naïf). *L'affirmation suivante est fausse : il existe $\delta > 0$ et T_0 tels que, pour tout $\sigma \in [1/2 - \delta, 1/2 + \delta]$, la fonction*

$$t \mapsto \operatorname{Re} \frac{\Xi'(\sigma + it)}{\Xi(\sigma + it)}$$

soit strictement concave pour tout $|t| \geq T_0$ là où elle est définie, et cette affirmation soit équivalente à l'hypothèse de Riemann (RH).

Preuve. Le théorème de Hardy énonce qu'il existe une infinité de zéros non triviaux de ζ situés sur la droite critique; voir [2, Chap. 10]. Soit $\rho = 1/2 + i\gamma$ un tel zéro, avec $|\gamma| \geq T_0 + 1$. L'application du théorème 4.1 à $F = \Xi$ au point ρ montre que, pour tout $a > 0$ suffisamment petit,

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Re} \frac{\Xi'(1/2 - a + it)}{\Xi(1/2 - a + it)} \Big|_{t=\gamma} > 0.$$

Choisir $a < \delta$ contredit la concavité stricte à gauche de la droite critique. Par conséquent, l'affirmation proposée concernant la concavité bilatérale est fausse, même en présence de zéros sur la droite critique. Une affirmation fausse ne peut être équivalente à l'hypothèse de Riemann. \square

5 Moyennage spectral fini

Le développement formel de Ξ'/Ξ en une somme portant sur les zéros n'a de sens que sous condition de convergence, à moins d'être régularisé de manière symétrique. Nous utilisons donc des sommes finies et formulons toutes les étapes de passage à la limite sous forme d'hypothèses explicites.

Définition 5.1 (Fenêtre de zéros symétrique). *Pour $Y > 0$, soit*

$$\mathcal{Z}_Y = \{\rho = \beta + i\gamma : \Xi(\rho) = 0, |\gamma| \leq Y\},$$

en tenant compte des multiplicités. Définissons le champ de zéros fini

$$R_Y(s) = \sum_{\rho \in \mathcal{Z}_Y} \frac{1}{s - \rho}.$$

Pour une fonction test paire $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, posons

$$M_Y(\sigma; t_0, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t - t_0) \operatorname{Re} R_Y(\sigma + it) dt.$$

Lemme 5.2 (Dérivation de la moyenne finie). *Si le segment vertical $\{\sigma + it : t \in \operatorname{supp}(\phi(\cdot - t_0))\}$ ne contient aucun zéro de \mathcal{Z}_Y , alors*

$$M_Y''(\sigma; t_0, \phi) = \sum_{\rho = \beta + i\gamma \in \mathcal{Z}_Y} \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\phi(t - t_0)}{(\sigma + it - \rho)^3} dt.$$

Preuve. La somme définissant R_Y est finie. Sur le support de l'intégrale, chaque terme de la somme est de classe C^∞ par rapport à σ , en vertu de la condition d'absence de zéro énoncée. La dérivation deux fois sous le signe intégral donne

$$\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \frac{1}{\sigma + it - \rho} = \frac{2}{(\sigma + it - \rho)^3},$$

et la sommation des termes (en nombre fini) démontre la formule. \square

Lemme 5.3 (Identité du noyau de Fourier). *Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles et paire, dont la transformée de Fourier est $\widehat{\phi}(u) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-iut} dt$. Pour $x \neq 0$ et $y \in \mathbb{R}$,*

$$\operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\phi(t)}{(x + i(t - y))^3} dt = \operatorname{sgn}(x) \int_0^\infty u^2 e^{-|x|u} \cos(yu) \widehat{\phi}(u) du.$$

Preuve. Si $x > 0$, on utilise

$$\frac{2}{(x + i(t - y))^3} = \int_0^\infty u^2 e^{-xu} e^{-i(t-y)u} du,$$

ce qui découle de $\int_0^\infty u^2 e^{-au} du = 2/a^3$ pour $\operatorname{Re} a > 0$. En multipliant par $\phi(t)$, en intégrant et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_0^\infty u^2 e^{-xu} e^{iyu} \widehat{\phi}(u) du.$$

En prenant les parties réelles, on démontre la formule pour $x > 0$. Si $x < 0$, on écrit

$$\frac{2}{(x + i(t - y))^3} = - \int_0^\infty u^2 e^{xu} e^{i(t-y)u} du$$

et l'on répète le même calcul. Comme ϕ est réelle et paire, $\widehat{\phi}$ est réelle et paire, et l'on obtient le signe annoncé. \square

Proposition 5.4 (Compensation sur la droite critique). *Soit ϕ comme dans le lemme 5.3. Dans la somme finie sur les zéros regroupés par paires symétriques, la contribution de chaque paire située hors de la droite critique à $M_Y''(1/2; t_0, \phi)$ est nulle. Les zéros situés sur la droite critique ne contribuent à aucun terme de la formule par paires, en dehors de leurs ordonnées singulières.*

Preuve. Les zéros de Ξ sont symétriques par rapport à la conjugaison et par rapport à la réflexion sur la droite critique. On associe $\rho = \beta + i\gamma$ à $1 - \bar{\rho} = (1 - \beta) + i\gamma$ dans la liste réfléchie verticalement.

En $\sigma = 1/2$, les deux déplacements réels sont

$$x_1 = 1/2 - \beta, \quad x_2 = 1/2 - (1 - \beta) = -x_1.$$

Le lemme 5.3 fournit des facteurs exponentiels et cosinusoidaux identiques pour la paire, tandis que $\text{sgn}(x_1) = -\text{sgn}(x_2)$. Les deux termes s'annulent donc. Si $\beta = 1/2$, alors l'expression appariée présente un déplacement horizontal nul ; la contribution limite gauche-droite est impaire et ne produit aucune détection hors de la ligne critique au niveau de la ligne critique. \square

Proposition 5.5 (Signal apparié positif à gauche). *Fixons $\delta_0 > 0$ et évaluons en $\sigma = 1/2 - \delta_0$. Soit $\rho = \beta + i\gamma$ un zéro hors de la ligne critique avec $\beta > 1/2 + \delta_0$, apparié à $1 - \bar{\rho} = (1 - \beta) + i\gamma$. Si $\hat{\phi} \geq 0$ et*

$$\cos((\gamma - t_0)u) \geq c_0 > 0 \quad \text{pour tout } u \in \text{supp}(\hat{\phi}) \cap [0, \infty),$$

alors la contribution appariée à $M_Y''(1/2 - \delta_0; t_0, \phi)$ est au moins égale à

$$2c_0 \int_0^\infty u^2 e^{-(\beta-1/2)u} \sinh(\delta_0 u) \hat{\phi}(u) du \geq 0.$$

Elle est strictement positive si $\hat{\phi}$ est positive sur un ensemble de mesure positive.

Preuve. Pour le zéro $\beta + i\gamma$, le décalage horizontal est $1/2 - \delta_0 - \beta < 0$. Pour le zéro conjugué $(1 - \beta) + i\gamma$, il est $\beta - 1/2 - \delta_0 > 0$. Le lemme 5.3 donne la somme associée

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty u^2 e^{-(\beta-1/2+\delta_0)u} \cos((\gamma - t_0)u) \hat{\phi}(u) du \\ & + \int_0^\infty u^2 e^{-(\beta-1/2-\delta_0)u} \cos((\gamma - t_0)u) \hat{\phi}(u) du. \end{aligned}$$

En combinant les exponentielles, on obtient

$$2 \int_0^\infty u^2 e^{-(\beta-1/2)u} \sinh(\delta_0 u) \cos((\gamma - t_0)u) \hat{\phi}(u) du.$$

La borne inférieure supposée pour le cosinus et la positivité de $\hat{\phi}$ conduisent à l'estimation annoncée. \square

6 Conséquences conditionnelles pour l'hypothèse de Riemann

Les hypothèses suivantes sont concrètes : elles précisent la famille de noyaux, l'opération de limite et la condition de signe nécessaires pour transformer le programme Riccati-Gamma en un théorème de localisation des zéros. Elles ne sont pas démontrées inconditionnellement.

Hypothèse 6.1 (Concavité spectrale uniforme). *Il existe $\delta > 0$ et une famille de noyaux pairs $\phi_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\lambda \geq 1$, tels que $\hat{\phi}_\lambda \geq 0$, $\int \phi_\lambda = 1$, et pour tout $\sigma \in [1/2 - \delta, 1/2)$, tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et toute hauteur symétrique Y suffisamment grande,*

$$M_Y''(\sigma; t_0, \phi_\lambda) \leq E_\lambda(Y, t_0, \sigma),$$

où $\limsup_{Y \rightarrow \infty} E_\lambda(Y, t_0, \sigma) \leq 0$ uniformément par rapport à t_0 dans des intervalles bornés.

Hypothèse 6.2 (Noyaux positifs de localisation). *Pour tout $L > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe λ tel que le support de $\widehat{\phi}_\lambda$ soit inclus dans $[0, \varepsilon] \cup [-\varepsilon, 0]$, à l'exception d'une queue dont la contribution à la Proposition 5.5 est $o(1)$ uniformément pour $|\gamma - t_0| \leq L$.*

Hypothèse 6.3 (Terme de fond contrôlé). *La contribution du terme de fond (gamma et arithmétique), obtenue en remplaçant R_Y par la dérivée logarithmique complète \mathcal{R} , est bornée uniformément sur les bandes compactes en σ et ne peut annuler le signal apparié strictement positif d'un zéro hors-critique fixé lorsque t_0 est choisi à son ordonnée et que λ est suffisamment localisé.*

Théorème 6.4 (Réponse affirmative conditionnelle à l'HR). *Supposons les hypothèses 6.1, 6.2 et 6.3 vérifiées. Alors l'hypothèse de Riemann est vraie.*

Preuve. Supposons, par l'absurde, que l'HR soit fausse. □

Il existe alors un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta > 1/2$; par symétrie, il existe aussi un zéro $1 - \bar{\rho} = (1 - \beta) + i\gamma$. Choisissons

$$0 < \delta_0 < \min(\delta, \beta - 1/2)$$

et évaluons en $\sigma = 1/2 - \delta_0$ avec $t_0 = \gamma$. D'après l'hypothèse 6.2, choisissons un noyau ϕ_λ localisé aux basses fréquences de telle sorte que $\cos((\gamma - t_0)u) = 1$ pour le zéro cible et que la queue restante du noyau soit négligeable. La proposition 5.5 donne alors une contribution strictement positive provenant de la paire $\{\rho, 1 - \bar{\rho}\}$.

L'hypothèse 6.3 stipule que les termes restants (liés à la fonction gamma, à la troncature et à l'arithmétique) ne peuvent annuler ce signal positif fixe après le passage à la limite. Par conséquent, pour un Y suffisamment grand,

$$M_Y''(1/2 - \delta_0; \gamma, \phi_\lambda) > 0.$$

Cela contredit la concavité spectrale uniforme affirmée dans l'hypothèse 6.1. Il ne peut donc exister aucun zéro hors de la droite critique, et tout zéro non trivial de ζ se trouve sur la droite $\text{Re}(s) = 1/2$.

Théorème 6.5 (Conséquence conditionnelle sur la densité des zéros). *Supposons les hypothèses 6.1 et 6.2 vérifiées sous forme moyennée sur $t_0 \in [0, T]$, avec une borne en $O(T)$ pour toutes les erreurs de fond et de queue. Alors, pour tout $\sigma_0 > 1/2$,*

$$N(\sigma_0, T) = o(T),$$

où $N(\sigma_0, T)$ désigne le nombre de zéros $\rho = \beta + i\gamma$ tels que $\beta \geq \sigma_0$ et $0 \leq \gamma \leq T$, comptés avec multiplicité.

Preuve. Choisissons $\delta_0 > 0$ tel que $1/2 + \delta_0 < \sigma_0$. Pour tout zéro vérifiant $\beta \geq \sigma_0$, la proposition 5.5 fournit un signal apparié positif en $\sigma = 1/2 - \delta_0$, dès lors que le noyau est de fréquence suffisamment basse sur la fenêtre en t_0 correspondante. En intégrant l'inégalité de concavité spectrale sur $t_0 \in [0, T]$ et en utilisant le contrôle en $O(T)$ supposé du fond et des queues, on majore le signal positif total par $o(T)$ après normalisation. Puisque chaque zéro vérifiant $\beta \geq \sigma_0$ contribue à hauteur d'au moins une quantité positive fixe sur une fenêtre de mesure positive, le nombre de tels zéros doit satisfaire $N(\sigma_0, T) = o(T)$. □

Remarque 6.6. *Les théorèmes 6.4 et 6.5 identifient précisément où réside encore la difficulté mathématique. Le signal apparié positif est élémentaire une fois imposées les hypothèses sur le noyau. La partie ouverte délicate consiste à démontrer la concavité spectrale uniforme et le contrôle du fond.*

7 Analyse numérique

Les expériences numériques visent à illustrer, et non à démontrer, les résultats analytiques. Elles comparent la dérivée logarithmique complète, son modèle de pôle universel, la compensation symétrique sur la droite critique et le signal positif hors de la droite critique prédit par le cadre spectral conditionnel.

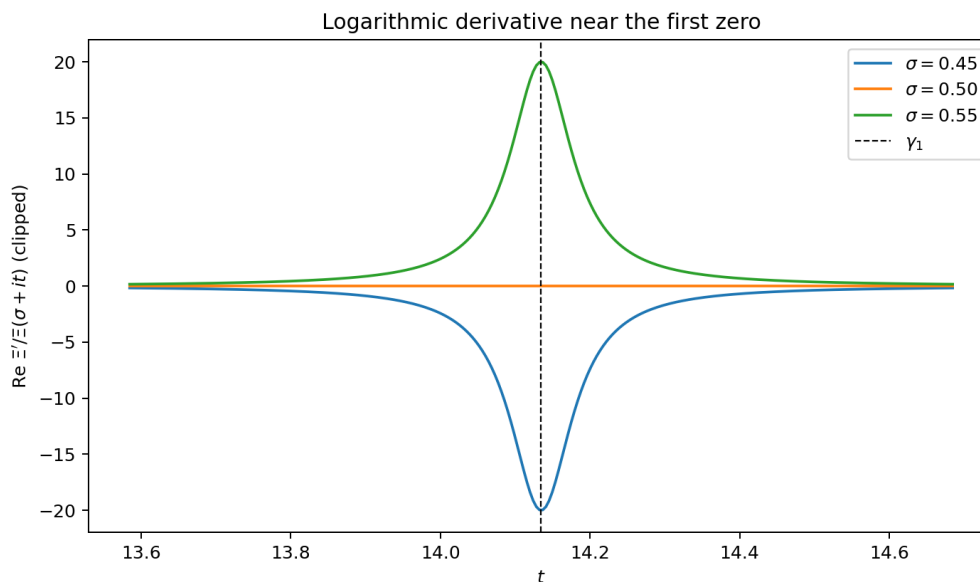


FIGURE 1 : Partie réelle de Ξ'/Ξ au voisinage du premier zéro sur trois droites verticales. Les droites latérales $\sigma = 0,45$ et $\sigma = 0,55$ montrent l'attraction et la répulsion de type pôle prédites par le terme local $(s - \rho_1)^{-1}$.

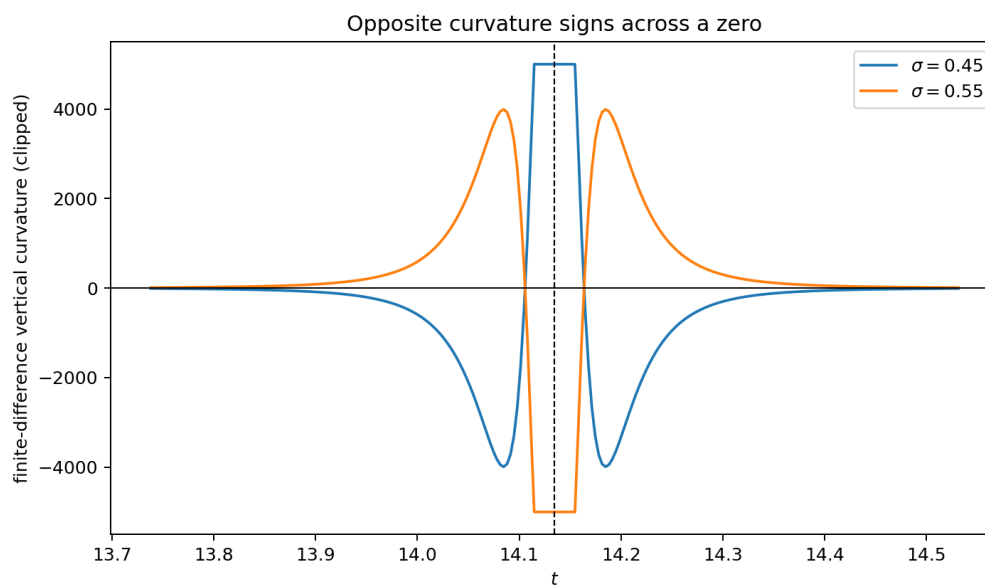


FIGURE 2 : Approximation par différences finies de la courbure verticale $d^2/dt^2 \operatorname{Re} \Xi'/\Xi$. La courbure est positive à gauche du zéro et négative à droite en $t = \gamma_1$, ce qui concorde avec le théorème 4.1.

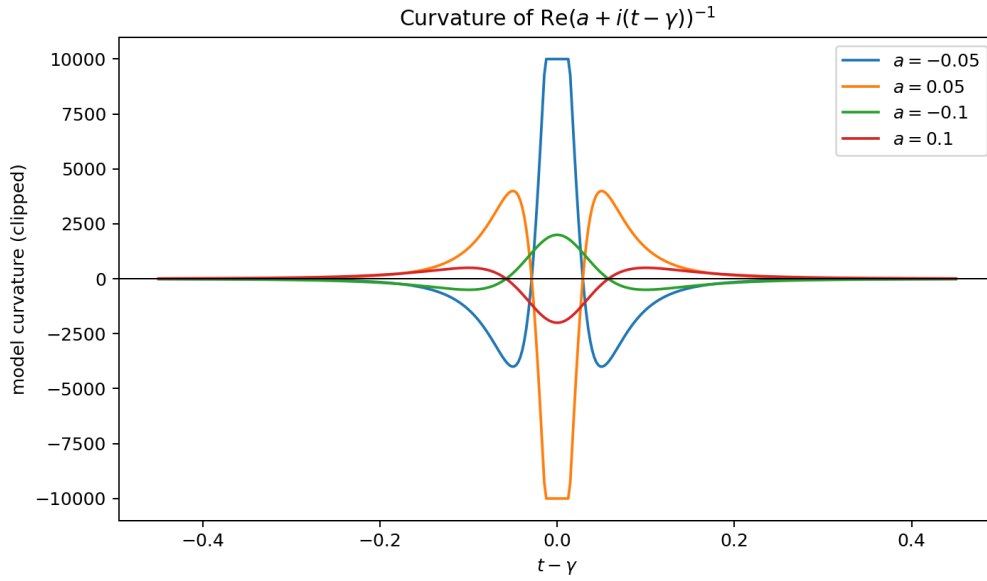


FIGURE 3 : Courbure du pôle modèle $\operatorname{Re}(a + i(t - \gamma))^{-1} = a/(a^2 + (t - \gamma)^2)$. Cela permet d'isoler le mécanisme local universel du contenu arithmétique de ζ .

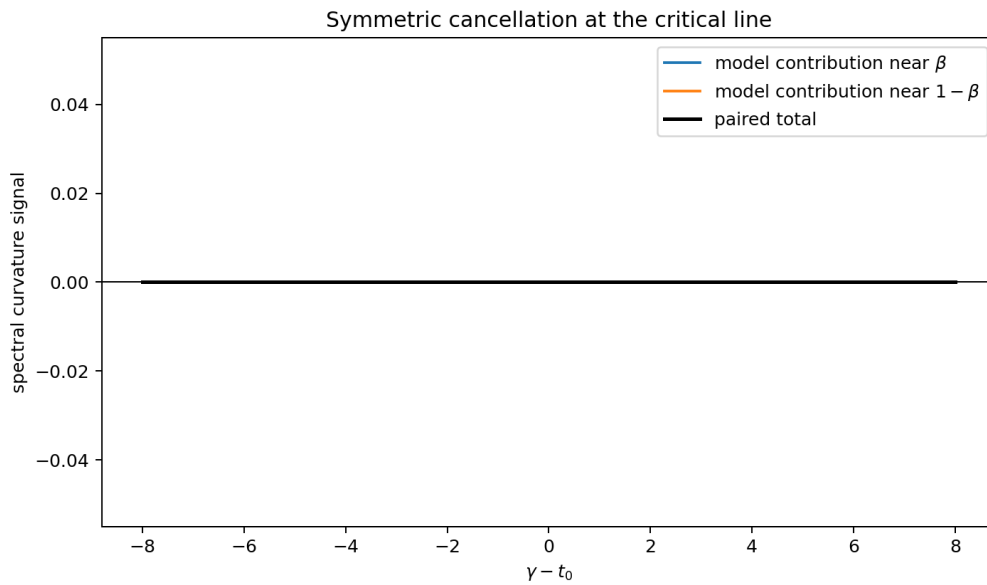


FIGURE 4 : Contribution modèle d'une paire symétrique hors de la droite critique à $\sigma = 1/2$. Les contributions des zéros de gauche et de droite se compensent, illustrant la proposition 5.4.

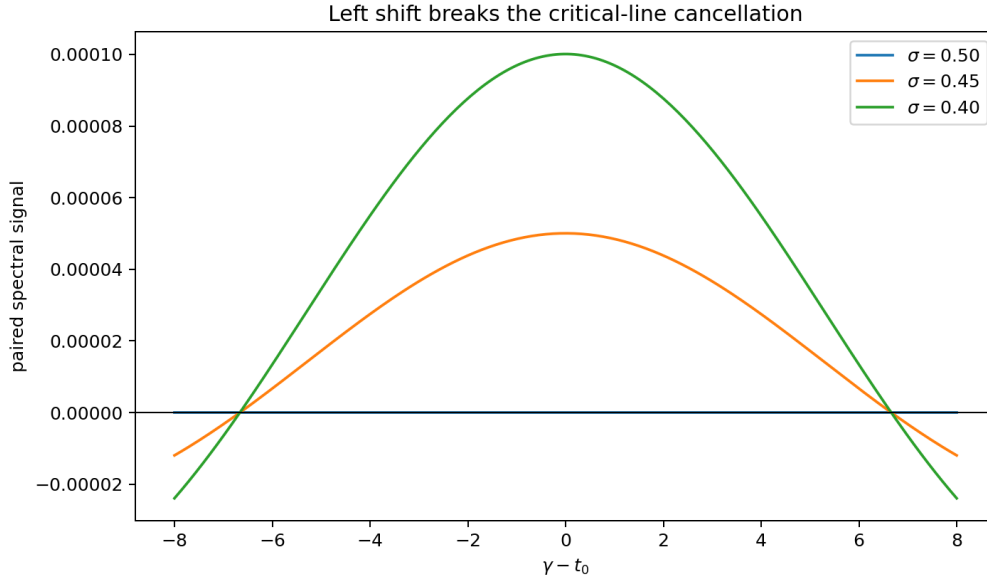


FIGURE 5 : La même paire symétrique évaluée en $\sigma = 1/2 - \delta_0$. La compensation est rompue et le signal apparié est positif sous l'action d'un noyau basse fréquence non négatif, comme dans la proposition 5.5.

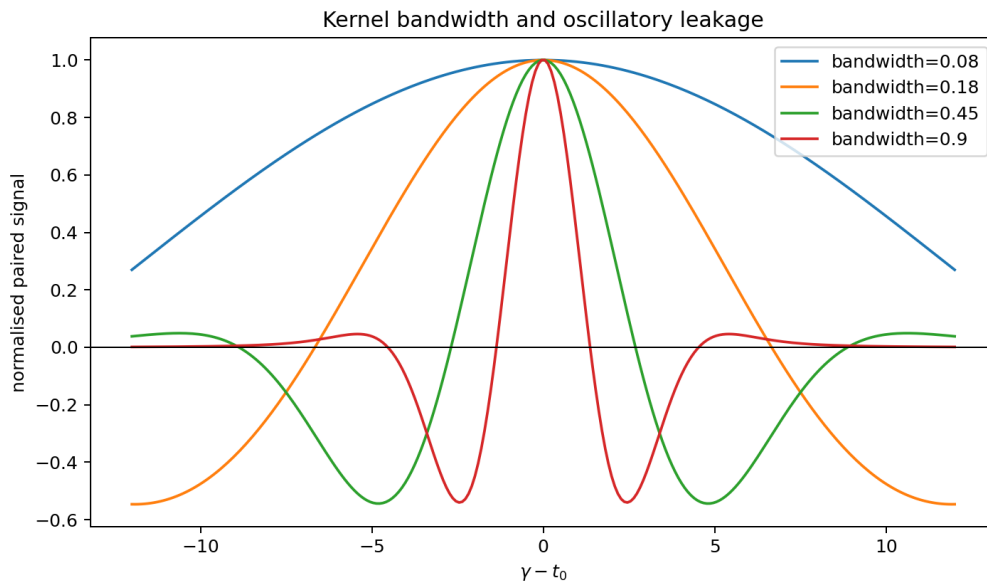


FIGURE 6 : Dépendance du signal apparié vis-à-vis de la largeur de bande spectrale. Les noyaux basse fréquence plus étroits suppriment l'oscillation en cosinus et préservent mieux la positivité; les noyaux plus larges présentent une fuite oscillatoire.

Les figures 7 à 7 valident la partie locale de la théorie. La concordance entre la courbure calculée de Ξ'/Ξ et le modèle élémentaire à pôles montre que l'obstacle à une concavité naïve n'est pas un artefact numérique. Il est imposé par le développement de Laurent au voisinage d'un zéro. Les figures 7 à 7 traitent de la partie spectrale. L'évaluation sur la droite critique masque des informations hors de cette droite grâce à une compensation symétrique exacte. Un décalage vers la gauche rompt cette compensation et crée un signal positif, mais seulement tant que le noyau reste suffisamment localisé en fréquence. Cette comparaison constitue la principale leçon numérique : le lissage peut lever l'obstacle local, mais un lissage non contrôlé risque aussi d'effacer l'information de signe nécessaire à une démonstration.

Les calculs confortent donc l'idée que les hypothèses conditionnelles constituent des objectifs analytiques pertinents, tout en montrant pourquoi elles sont véritablement non triviales.

8 Conclusion

Cet article présente une analyse rigoureuse, fondée sur les fonctions de Riccati et Gamma, de ce que la concavité verticale permet - ou non - de démontrer concernant les zéros de ζ .

L'approche naïve point par point est écartée par une démonstration locale complète. Le cadre spectral fini permet alors d'identifier un mécanisme plus prometteur : des paires symétriques situées hors de la ligne critique s'annulent sur celle-ci, mais engendrent un signal positif à basse fréquence lorsqu'elles sont observées depuis la gauche.

L'hypothèse de Riemann n'est pas démontrée ici de manière inconditionnelle. L'article énonce plutôt des hypothèses concrètes - concavité spectrale uniforme, noyaux positifs de localisation et termes de fond contrôlés - sous lesquelles le problème ouvert de Riemann reçoit une réponse affirmative. Démontrer ces hypothèses pour Ξ revêtirait une importance majeure pour la théorie analytique des nombres, car cela transformerait la concavité de type Riccati-Gamma en un principe direct de localisation des zéros pour la fonction zêta complétée.

A Programme python exécutable

Le script suivant génère les figures 7 à 7. Exécutez-le depuis le répertoire contenant cet article à l'aide de la commande

```
riemann_rg_numerics.py --outdir figures.
```

```
#!/usr/bin/env python3
"""ReproduciblenumericsfortheRiccati--Gamma/Riemannmanuscript.
Thescriptgeneratesthefiguresreferencedintheappendix.Thefirstthreefigures
usethecompletedzetalogarithmicderivativethroughtheexplicitgamma-zetaformula.
Thelastthreefiguresusethesymmetric-pairmodelfromthefinitespectralsection.
Theyarediagnosticillustrations,notnumericalproofs.
"""
from __future__ import annotations
import argparse
import math
from pathlib import Path
import matplotlib
#matplotlib.use("Agg")
import matplotlib.pyplot as plt
import mpmath as mp
import numpy as np

FIRST_ZERO = 14.134725141734693790

def zeta_log_derivative(s: complex) -> complex:
    """Numericallyevaluatezeta(s)/zeta(s)."""
    z = mp.mpc(s)
    return complex(mp.diff(mp.zeta, z) / mp.zeta(z))

def xi_log_derivative(s: complex) -> complex:
    """EvaluateXi(s)/Xi(s)awayfromzeros."""
    z = mp.mpc(s)
```

```

value = (
    1 / z
    + 1 / (z - 1)
    - 0.5 * mp.log(mp.pi)
    + 0.5 * mp.digamma(z / 2)
    + mp.diff(mp.zeta, z) / mp.zeta(z)
)
return complex(value)

def real_xi_log_derivative(sigma: float, t: np.ndarray) -> np.ndarray:
    values = []
    for tt in t:
        try:
            values.append(xi_log_derivative(complex(sigma, float(tt))).real)
        except ZeroDivisionError:
            values.append(np.nan)
    return np.asarray(values, dtype=float)

def finite_difference_second(values: np.ndarray, h: float) -> np.ndarray:
    out = np.full_like(values, np.nan, dtype=float)
    out[1:-1] = (values[:-2] - 2 * values[1:-1] + values[2:]) / (h * h)
    return out

def model_curvature(a: float, y: np.ndarray) -> np.ndarray:
    """Second-derivative of Re 1/(a+iy)=a/(a^2+y^2)."""
    return 2 * a * (3 * y * y - a * a) / (a * a + y * y) ** 3

def paired_signal(beta: float, sigma: float, y: float, bandwidth: float) -> float:
    """Gaussian low-frequency analogue of the paired spectral contribution."""
    u = np.linspace(0.0, 8.0 * bandwidth, 3000)
    if bandwidth <= 0:
        raise ValueError("bandwidth must be positive")
    phihat = np.exp(-(u / bandwidth) ** 2)
    x_right = sigma - beta
    x_left = sigma - (1.0 - beta)
    integrand = (
        np.sign(x_right) * u**2 * np.exp(-abs(x_right) * u) + np.sign(x_left)
        * u**2 * np.exp(-abs(x_left) * u)) * np.cos(y * u) * phihat
    return float(np.trapezoid(integrand, u))

def save_real_log_derivative(outdir: Path) -> None:
    t = np.linspace(FIRST_ZERO - 0.55, FIRST_ZERO + 0.55, 260)
    plt.figure(figsize=(8, 4.8))
    for sigma in [0.45, 0.50, 0.55]:
        values = real_xi_log_derivative(sigma, t)
        clipped = np.clip(values, -25, 25)
        plt.plot(t, clipped, label=fr"$\sigma={sigma:.2f}$")
    plt.axvline(FIRST_ZERO, color="black", lw=0.9, ls="--", label=r"$\gamma_1$")
    plt.xlabel(r"$t$")
    plt.ylabel(r"$\operatorname{Re}\{\xi/\xi(\sigma+it)\}$ (clipped)")
    plt.title("Logarithmic derivative near the first zero")
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
    #plt.savefig(outdir / "re_log_derivative_near_first_zero.png", dpi=180)
    plt.close()

```

```

def save_second_derivative(outdir: Path) -> None:
    t = np.linspace(FIRST_ZERO - 0.40, FIRST_ZERO + 0.40, 241)
    h = float(t[1] - t[0])
    plt.figure(figsize=(8, 4.8))
    for sigma in [0.45, 0.55]:
        values = real_xi_log_derivative(sigma, t)
        curvature = finite_difference_second(values, h)
        plt.plot(t, np.clip(curvature, -5000, 5000), label=fr"\sigma={sigma}
            :.2f}$")
    plt.axhline(0.0, color="black", lw=0.8)
    plt.axvline(FIRST_ZERO, color="black", lw=0.9, ls="--")
    plt.xlabel(r"$t$")
    plt.ylabel("finite-differenceverticalcurvature(clipped)")
    plt.title("Oppositecurvaturesignsacrossazero")
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
    #plt.savefig(outdir / "second_derivative_near_first_zero.png", dpi=180)
    plt.close()

def save_local_pole_model(outdir: Path) -> None:
    y = np.linspace(-0.45, 0.45, 400)
    plt.figure(figsize=(8, 4.8))
    for a in [-0.05, 0.05, -0.10, 0.10]:
        plt.plot(y, np.clip(model_curvature(a, y), -10000, 10000), label=fr"$a
            ={a}$")
    plt.axhline(0.0, color="black", lw=0.8)
    plt.xlabel(r"$t-\gamma$")
    plt.ylabel("modelcurvature(clipped)")
    plt.title(r"Curvatureof$\operatorname{Re}\{a+i(t-\gamma)\}^{-1}$")
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
    #plt.savefig(outdir / "local_pole_model_curvature.png", dpi=180)
    plt.close()

def save_pair_cancellation(outdir: Path) -> None:
    beta = 0.70
    sigma = 0.50
    y = np.linspace(-8.0, 8.0, 220)
    bandwidth = 0.18
    right = np.array([paired_signal(beta, sigma, yy, bandwidth) for yy in y])
    left = np.array([paired_signal(1.0 - beta, sigma, yy, bandwidth) for yy in
        y])
    total = right + left
    plt.figure(figsize=(8, 4.8))
    plt.plot(y, right, label=r"modelcontributionnear$\beta$")
    plt.plot(y, left, label=r"modelcontributionnear$1-\beta$")
    plt.plot(y, total, color="black", lw=2, label="pairedtotal")
    plt.axhline(0.0, color="black", lw=0.8)
    plt.xlabel(r"$\gamma-t_0$")
    plt.ylabel("spectralcurvaturesignal")
    plt.title("Symmetriccancellationatthecriticalline")
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
    #plt.savefig(outdir / "symmetric_pair_cancellation.png", dpi=180)

```

```

plt.close()

def save_left_shift_signal(outdir: Path) -> None:
    beta = 0.70
    sigma_values = [0.50, 0.45, 0.40]
    y = np.linspace(-8.0, 8.0, 220)
    bandwidth = 0.18
    plt.figure(figsize=(8, 4.8))
    for sigma in sigma_values:
        total = np.array([paired_signal(beta, sigma, yy, bandwidth) for yy in
            y])
        plt.plot(y, total, label=fr"$\sigma={sigma:.2f}$")
    plt.axhline(0.0, color="black", lw=0.8)
    plt.xlabel(r"$\gamma-t_0$")
    plt.ylabel("pairedspectralsignal")
    plt.title("Leftshiftbreaksthecritical-linecancellation")
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
    #plt.savefig(outdir / "left_shift_positive_signal.png", dpi=180)
    plt.close()

def save_bandwidth_comparison(outdir: Path) -> None:
    beta = 0.70
    sigma = 0.42
    y = np.linspace(-12.0, 12.0, 260)
    plt.figure(figsize=(8, 4.8))
    for bandwidth in [0.08, 0.18, 0.45, 0.90]:
        total = np.array([paired_signal(beta, sigma, yy, bandwidth) for yy in
            y])
        scale = np.max(np.abs(total))
        if scale > 0:
            total = total / scale
        plt.plot(y, total, label=fr"bandwidth={bandwidth}")
    plt.axhline(0.0, color="black", lw=0.8)
    plt.xlabel(r"$\gamma-t_0$")
    plt.ylabel("normalisedpairedsignal")
    plt.title("Kernelbandwidthhandoscillatoryleakage")
    plt.legend()
    plt.tight_layout()
    plt.show()
    #plt.savefig(outdir / "kernel_bandwidth_comparison.png", dpi=180)
    plt.close()

def main() -> None:
    parser = argparse.ArgumentParser()
    parser.add_argument("--outdir", default="figures", help="
        directoryforgeneratedfigures")
    args = parser.parse_args()
    mp.mp.dps = 40
    outdir = Path(args.outdir)
    outdir.mkdir(parents=True, exist_ok=True)
    save_real_log_derivative(outdir)
    save_second_derivative(outdir)
    save_local_pole_model(outdir)
    save_pair_cancellation(outdir)
    save_left_shift_signal(outdir)
    save_bandwidth_comparison(outdir)

```

```

print(f"Generatedfiguresin{outdir.resolve()}")

if __name__ == "__main__":
    main()
#!/usr/bin/env python3
"""Numerical experiments for the Riccati--Gamma transform.
This script generates the figures used in riemann.tex. It is intentionally
self-contained: the only non-standard dependencies are mpmath and
matplotlib.
"""

```

Références

- [1] **D.-P. Covei**, *Riccati–Gamma Dynamics for Concavity and Asymptotics of Generalized Dirichlet Eta Functions*, arXiv :2605.20238, 2026. Available at : <https://arxiv.org/pdf/2605.20238>.
- [2] **E. C. Titchmarsh**, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986.
- [3] **H. M. Edwards**, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974.
- [4] **H. Iwaniec and H. Kowalski**, *Analytic Number Theory*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53, American Mathematical Society, 2004.
- [5] **J. B. Conrey**, *The Riemann Hypothesis*, Notices of the American Mathematical Society **50** (2003), no. 3, 341–353.
- [6] **G. H. Hardy**, *Sur les zeros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences **158** (1914), 1012–1014.