

Zéros de zêta sur la droite critique

Daniel A. Goldston, Ade Irma Suriajaya

Résumé : En 1973, Montgomery a introduit la méthode de corrélation par paires pour étudier la distribution verticale des zéros de la fonction zêta de Riemann. Ce travail reposait sur l'hypothèse de Riemann (HR). Une application remarquable fut une démonstration concise qu'au moins les deux tiers des zéros de la fonction zêta sont des zéros simples, un résultat inédit. Au cours des cinquante dernières années, la plupart des travaux sur la corrélation par paires des zéros de la fonction zêta ont continué de supposer (HR). Nous montrons ici que si (HR) pouvait être levée dans la démonstration de Montgomery concernant les zéros simples, cela permettrait également de prouver que les deux tiers des zéros se situent sur la droite critique. Bien que nous ne puissions actuellement pas obtenir ce résultat de manière inconditionnelle, nous avons démontré, dans un travail commun, qu'il est vrai si l'on suppose que tous les zéros se trouvent dans une région suffisamment étroite centrée sur la droite critique. Dans un travail commun séparé, nous utilisons la même idée avec une méthode de corrélation de paires apparentée pour prouver qu'en supposant la conjecture de corrélation de paires, même sans l'hypothèse de (HR), nous obtenons que 100 % des zéros sont simples et sur la ligne critique.

Dans cette note explicative, nous montrons que la méthode simple des zéros de Montgomery (1973), sous réserve de l'hypothèse que tous les zéros sont très proches de la droite critique, permet de démontrer très facilement qu'au moins les $2/3$ des zéros se situent sur la droite critique..

1 Introduction

En 1973, Montgomery [11] a démontré, sous l'hypothèse de Riemann (HR), qu'au moins les deux tiers des zéros de la fonction zêta de Riemann sont simples. Auparavant, l'existence d'une infinité de zéros simples était inconnue, que ce soit de manière inconditionnelle ou sous (HR). Plus récemment, en 2020, K. Pratt, N. Robles, A. Zaharescu et D. Zeindler [12] ont démontré, grâce à une version améliorée de la méthode de Levinson, qu'au moins 41,7 % des zéros de $\zeta(s)$ se situent sur la droite critique, et qu'au moins 40,7 % de ces zéros sont à la fois simples et situés sur la droite critique. Grâce à des calculs à grande échelle et une analyse d'erreur rigoureuse, Platt et Trudgian [13] ont démontré en 2021 que dans la bande critique, jusqu'à la hauteur 3 000 175 332 800, on compte exactement 12 363 153 437 138 zéros, tous situés sur la ligne critique et de nature simple.

Sous l'hypothèse de (HR), on peut affirmer qu'au moins 67,92 % des zéros de $\zeta(s)$ sont simples, en utilisant la méthode de corrélation par paires de Montgomery [3], et qu'avec une autre méthode [4,2], on obtient au moins 70,37 % de zéros simples.

On peut se demander pourquoi s'intéresser à la méthode de corrélation par paires de Montgomery pour détecter les zéros simples, alors qu'une autre méthode permettrait d'obtenir une meilleure proportion de zéros simples.

En fait, le résultat de 67,92 % de Chirre, Gonçalves et de Laat [3] est apparu des années après que Bui et Heath-Brown [2] aient prouvé la proportion de 70,37 %, ce qui montre

D.A.Goldston : Département de mathématiques et statistiques, Université d'état de San José ;
A. I. Suriajaya : Faculté de mathématiques, Université de Kyushu.
Traduction : Denise Vella-Chemla : novembre 2025.

également un intérêt particulier pour la méthode de corrélation par paires de Montgomery. Nous n'entrerons pas dans les détails de ces articles.

La principale motivation réside dans les nombreuses applications de la méthode de corrélation par paires de Montgomery, notamment à la distribution des nombres premiers.

Ceci est démontré dans plusieurs articles [7, 8, 9, 10] et de nombreux autres qui les ont suivis.

En particulier, la méthode de Montgomery offre une grande flexibilité, permettant de nombreuses améliorations, nous présenterons l'une d'elles dans cet exposé.

Dans cet exposé, nous introduisons une méthode simple utilisant la corrélation par paires des zéros de $\zeta(s)$ qui, en supposant des informations supplémentaires sur ces zéros, démontre sous condition qu'il existe de nombreux zéros sur la droite critique.

2 Les zéros de la fonction zêta de Riemann

Soit $s = \sigma + it$ un point quelconque du plan complexe. La fonction méromorphe $\zeta(s)$ possède un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1 et est analytique ailleurs. Pour $\sigma > 1$, on a la formule du produit d'Euler $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$, où le produit porte sur les nombres premiers p . Ainsi, on constate que $\zeta(s) \neq 0$ dans le demi-plan $\sigma > 1$ puisque les termes individuels du produit d'Euler ne sont pas nuls et convergent vers 1 lorsque $p \rightarrow \infty$.

L'équation fonctionnelle $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$, où $\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)$, nous permet d'obtenir le prolongement analytique de $\zeta(s)$ pour $\sigma < 0$. On constate que les seuls zéros de ce demi-plan sont les zéros triviaux $s = -2, -4, -6, -8, \dots$ provenant du facteur $\sin(\pi s/2)$ dans $\chi(s)$. Ainsi, tous les zéros complexes de $\zeta(s)$ se situent dans la bande $0 \leq \sigma \leq 1$. Chacune des deux démonstrations du théorème des nombres premiers en 1896, par Hadamard et par de la Vallée Poussin, a donné des preuves différentes qu'il n'y a pas de zéros sur la droite $\sigma = 1$, et que par conséquent tous les zéros doivent se trouver dans la bande critique $0 < \sigma < 1$.

Il existe une autre propriété de la fonction zêta de Riemann si facile à démontrer que son importance est souvent négligée : elle n'a pas de zéros sur l'axe réel $s = \sigma$ pour $0 \leq \sigma < 1$. Ceci découle de la formule :

$$(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \text{pour } 0 < \sigma < 1,$$

car cela montre que $(1 - 2^{1-\sigma})\zeta(\sigma) > 0$, donc $\zeta(\sigma) < 0$ sur la droite réelle pour $0 < \sigma < 1$. On déduit également immédiatement de l'équation fonctionnelle que $\zeta(0) = -1/2$. Notons que cette dernière formule donne le prolongement analytique de $\zeta(s)$ dans la bande critique.

Si une fonction analytique $F(s)$ est réelle sur un segment de l'axe réel, elle satisfait le principe de réflexion $F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$ dans la région symétrique de part et d'autre de ce segment où F est

analytique. En notant les zéros complexes de la fonction zêta de Riemann par $\rho = \beta + i\gamma$, on constate que $\zeta(\rho) = 0 = \zeta(\bar{\rho})$. L'équation fonctionnelle donne également $\zeta(\rho) = 0 = \zeta(1 - \rho)$. Ainsi, tous les zéros non triviaux se présentent par paires symétriques par rapport à l'axe réel : $\rho = \beta + i\gamma$ et $\bar{\rho} = \beta - i\gamma$, et les zéros avec $\beta \neq 1/2$ se présentent par quadruplets symétriques par rapport à la fois à l'axe réel et à la droite critique (à savoir, la droite verticale $\sigma = 1/2$) : $\rho = \beta + i\gamma$, $\bar{\rho} = \beta - i\gamma$, $1 - \rho = 1 - \beta - i\gamma$, $1 - \bar{\rho} = 1 - \beta + i\gamma$. Ce fait élémentaire s'avérera fondamental par la suite dans cet article.

Puisque les zéros de la bande critique située sous l'axe réel sont symétriques par rapport aux zéros situés au-dessus de l'axe réel, il suffit d'étudier ces derniers. On pose donc :

$$N(T) := \#\{\rho = \beta + i\gamma : 0 < \gamma \leq T\} = \sum_{0 < \gamma \leq T} 1, \quad (2.1)$$

où $\#'$ signifie le nombre d'éléments dans l'ensemble comptés avec multiplicité, c'est-à-dire que si ρ est un zéro avec multiplicité m_ρ , alors nous avons m_ρ copies de ρ dans la séquence de zéros. Ainsi, par exemple, un triple zéro est compté 3 fois dans $N(T)$.

En 1905, von Mangoldt a démontré que, pour $T \geq 3$,

$$N(T) := \sum_{0 < \gamma \leq T} 1 = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T), \quad (2.2)$$

et nous avons les cas particuliers utiles suivants :

$$N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T \quad \text{lorsque } T \rightarrow \infty, \quad \text{et} \quad N(T+1) - N(T) = O(\log T). \quad (2.3)$$

Nous définissons l'espacement moyen entre des zéros consécutifs par

$$\frac{\text{Longueur de } [0, T]}{N(T)} \sim \frac{T}{\frac{T}{2\pi} \log T} \sim \frac{2\pi}{\log T}, \quad \text{as } T \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

3 Démonstration de Montgomery sur les zéros simples sous l'hypothèse de Riemann

Dans cette section, nous supposons l'hypothèse de Riemann (HR) telle que $\rho = 1/2 + i\gamma$, et nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 1 (11). *Sous l'hypothèse de Riemann, au moins $2/3$ des zéros de $\zeta(s)$ sont simples.*

La démonstration repose sur l'inégalité suivante :

$$\sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 \leq \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(\gamma - \gamma') \log T)}{\frac{1}{2}(\gamma - \gamma') \log T} \right)^2 = \left(\frac{4}{3} + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T. \quad (3.1)$$

Ici, la première inégalité est trivialement vraie. La formule asymptotique de la somme du noyau de Fejer sur les différences de zéros requiert (HR) ; le lecteur intéressé pourra consulter la démonstration dans [11]. Pour analyser ces sommes doubles, il peut être utile de considérer la formule suivante :

$$\sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}(\gamma - \gamma') \log T)}{\frac{1}{2}(\gamma - \gamma') \log T} \right)^2 = 2 \int_0^1 \left| \sum_{0 < \gamma \leq T} T^{i\alpha\gamma} \right|^2 (1 - \alpha) d\alpha, \quad (3.2)$$

ce qui découle immédiatement de la formule élémentaire :

$$2 \operatorname{Re} \int_0^1 e^{iw\alpha} (1 - \alpha) d\alpha = \left(\frac{\sin \frac{1}{2}w}{\frac{1}{2}w} \right)^2. \quad (3.3)$$

Ainsi, dans (3.1), les sommes doubles peuvent être vues comme deux copies de la suite de zéros $0 < \gamma \leq T$, cette suite possédant déjà m_γ copies de chaque zéro de multiplicité m_γ .

Considérons maintenant la première somme dans (3.1) avec la condition $\gamma = \gamma'$. Si l'on considère les termes comme des paires ordonnées (γ, γ') où $\gamma = \gamma'$, alors un zéro simple est compté une fois, mais un double zéro avec $m_\gamma = 2$ est compté quatre fois, puisque $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma'_1 = \gamma'_2$ et que l'on obtient les quatre termes (γ_1, γ'_1) , (γ_1, γ'_2) , (γ_2, γ'_1) , (γ_2, γ'_2) . Ainsi, un zéro de multiplicité m_γ est compté m_γ^2 fois. La démonstration du théorème du zéro simple de Montgomery se résume alors à deux lignes.

Démonstration du théorème 1. On a

$$\sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 = \sum_{0 < \gamma \leq T} m_\gamma \leq \left(\frac{4}{3} + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T, \quad (3.4)$$

et, en utilisant (2.1) et (2.3),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 < \gamma \leq T \\ \rho \text{ simple}}} 1 &\geq \sum_{0 < \gamma \leq T} (2 - m_\gamma) = 2 \sum_{0 < \gamma \leq T} 1 - \sum_{0 < \gamma \leq T} m_\gamma \\ &\geq \left(2 - \frac{4}{3} + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T = \left(\frac{2}{3} + o(1) \right) N(T) = \left(\frac{2}{3} + o(1) \right) \sum_{0 < \gamma \leq T} 1. \end{aligned}$$

□

4 Méthode simple des zéros de Montgomery si l'hypothèse de Riemann n'est pas vérifiée

Pendant 50 ans, il ne semblait venir à l'esprit de personne (y compris du premier auteur de cet article) de se pencher sérieusement sur cette démonstration lorsque l'hypothèse de Riemann n'est pas vérifiée. Comme nous le verrons, l'idée clé est que, malgré le titre de cette section, ne pas supposer l'hypothèse de Riemann ne suffit pas ; il faut envisager sérieusement la possibilité que l'hypothèse de Riemann soit fausse et la considérer sans préjugés. Nous avons en réalité passé près de deux ans à démontrer que (3.1) est vérifiée avec des conditions plus faibles que l'hypothèse de Riemann avant de réaliser que ces résultats pouvaient être appliqués pour obtenir des zéros critiques. L'origine de ce blocage mental provient de l'équation :

$$\sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 = \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1. \quad (4.1)$$

La somme de gauche semble supposer une rotation horizontale (HR) car aucune dépendance en β n'est apparente dans l'équation. L'équation de droite suggère la dépendance en β , puisque $\rho = \beta + i\gamma$ et $\rho' = \beta' + i\gamma'$, mais il est encore facile de penser que la rotation horizontale n'a pas d'importance car elle est égale à la somme de gauche*

Il nous faut revenir aux formules de la section 2.

Concernant la somme (4.1), nous souhaitons classer les paires de zéros situés sur la même ligne horizontale. Notons que, sous l'hypothèse de (HR), il ne peut s'agir que de zéros identiques.

$$\sum_{\substack{\rho = \frac{1}{2} + i\gamma \\ 0 < \gamma \leq T}} \sum_{\substack{\rho' = \frac{1}{2} + i\gamma' \\ 0 < \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 = \sum_{\substack{\rho = \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \beta = \beta' = \frac{1}{2}}} 1 = \sum_{\substack{\rho = \frac{1}{2} + i\gamma \\ 0 < \gamma \leq T}} m_{\rho}. \quad (4.2)$$

Sans supposer l'hypothèse de Riemann, il peut exister des zéros $\rho = \beta + i\gamma$, $\beta \neq 1/2$, situés hors de la droite critique, et chacun d'eux est associé au zéro symétrique situé de l'autre côté de la droite critique $1 - \bar{\rho} = 1 - \beta + i\gamma$.

*On trouve mis en commentaire dans le code source L^AT_EX de l'article cette explication : Voyons : supposons que l'hypothèse de Riemann soit fausse, et qu'il existe donc un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta \neq 1/2$. Alors, le zéro symétrique situé de l'autre côté de la droite critique $1 - \bar{\rho} = 1 - \beta + i\gamma$ a exactement la même hauteur que ρ , et nous avons une solution à l'équation $\gamma = \gamma'$ où $\rho \neq \rho'$! La conclusion est que si $\beta \neq 1/2$, alors les paires de zéros $(\beta + i\gamma, 1 - \beta + i\gamma)$ et $(1 - \beta + i\gamma, \beta + i\gamma)$ sont des solutions de l'équation $\gamma = \gamma'$. Nous les appelons "termes diagonaux symétriques". Que l'on suppose ou non (HR), on obtient toujours les termes diagonaux $\rho' = \rho$ qui sont $(\beta + i\gamma, \beta + i\gamma)$, comme lorsque (HR) est vérifiée. Chaque zéro est compté de cette manière, pondéré par sa multiplicité, comme dans (4.2). Mais chaque zéro hors de la ligne critique est compté une seconde fois avec sa paire symétrique, également pondérée par leur multiplicité. Il existe aussi un troisième type de zéro compté s'il y a trois zéros ou plus sur la même ligne horizontale, mais ceux-ci sont moins importants. Puisque nous ne savons pas si (HR) est vraie ou pas, la seule chose que nous pouvons utiliser dans nos analyses est la propriété des zéros que nous connaissons déjà.

Par conséquent, si $\beta \neq 1/2$, les paires de zéros $(\beta + i\gamma, 1 - \beta + i\gamma)$ et $(1 - \beta + i\gamma, \beta + i\gamma)$ sont solutions de l'équation $\gamma = \gamma'$. On les appelle des termes diagonaux symétriques. Ainsi, en plus de la somme (4.2), la sommation (4.1) inclut également une somme supplémentaire sur ces termes diagonaux symétriques.

Remarquez également que, puisque nous ne supposons pas (HR), la somme sur les termes diagonaux est

$$\sum_{\substack{\rho=\rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T}} 1 = \sum_{\substack{\rho=\beta+i\gamma \\ 0 < \gamma \leq T}} m_\rho.$$

Est-ce la fin ? Apparemment non. Puisque nous travaillons avec des paires de zéros, s'il y a trois zéros ou plus sur la même ligne horizontale, nous pouvons également avoir des termes qui ne sont ni diagonaux ni symétriques.

En conclusion, nous avons

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 = \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} m_\rho + \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq \frac{1}{2}}} m_\rho + \sum_{\substack{\rho \neq \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \beta + \beta' \neq 1, \gamma = \gamma'}} 1, \quad (4.3)$$

où la première somme du membre de droite provient des termes diagonaux, la seconde des termes diagonaux symétriques, et tous les autres termes de la troisième somme sont des termes horizontaux non symétriques.

Nous pouvons maintenant démontrer immédiatement notre version sans (HR) du résultat simple de Montgomery sur les zéros.

Théorème 2. *Supposons qu'il existe une constante C telle que $1 \leq C < 2$ et que, lorsque $T \rightarrow \infty$,*

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 \leq \left(C + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T. \quad (4.4)$$

Alors, asymptotiquement, au moins la proportion $2 - C$ des zéros de $\zeta(s)$ sont simples ; au moins la proportion $2 - C$ des zéros de $\zeta(s)$ est sur la droite critique ; et si $1 \leq C < 3/2$, alors au moins la proportion $3 - 2C$ des zéros de $\zeta(s)$ sont des zéros simples sur la ligne critique.

Démonstration du théorème 2. †

Nous commençons par une remarque concernant la restriction imposée à la constante C dans notre hypothèse.

Remarquons que

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 \geq \sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \rho = \rho'}} 1 = \sum_{0 < \gamma \leq T} m_\rho \geq \sum_{0 < \gamma \leq T} 1 = N(T) \sim \frac{T}{2\pi} \log T \quad (4.5)$$

lorsque $T \rightarrow \infty$.

Ainsi, dans notre hypothèse, C doit satisfaire $C \geq 1$.

En substituant (4.3) dans (4.4), on obtient :

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} m_\rho + \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq \frac{1}{2}}} m_\rho + \sum_{\substack{\rho \neq \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \beta + \beta' \neq 1, \gamma = \gamma'}} 1 \leq \left(C + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T. \quad (4.6)$$

Dans cette inégalité, supprimer n'importe quelle somme du membre de gauche donne une quantité plus petite, puisque chaque terme est non négatif.

Premièrement, nous avons :

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} m_\rho \leq \left(C + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

qui correspond à (3.4) avec $C = 4/3$, et le même raisonnement donne :

$$\sum_{\substack{0 < \gamma \leq T \\ \rho \text{ simple}}} 1 \geq \left(2 - C + o(1) \right) \sum_{0 < \gamma \leq T} 1, \quad (4.7)$$

†On trouve mis en commentaire dans le source L^AT_EX de l'article cette explication : Quelles sont les solutions de l'équation $\gamma = \gamma'$? On le voit aisément en observant la bande critique, et l'on constate immédiatement qu'il existe trois types de solutions. 1) *Termes diagonaux* lorsque $\rho = \rho'$. Ce sont les seules solutions sous l'hypothèse (HR). 2) *Termes diagonaux symétriques* lorsque $\beta \neq 1/2$ et $\rho' = 1 - \bar{\rho}$.

3) *Termes horizontaux asymétriques* où $\gamma = \gamma'$ et $\beta + \beta' \neq 1$. Ces cas se produisent lorsqu'il y a 3 zéros ou plus sur la même ligne horizontale et n'incluent pas les termes diagonaux symétriques ci-dessus. Par conséquent, comme dans l'équation 3.4, nous avons :

$$\sum_{\substack{0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \gamma = \gamma'}} 1 = \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} m_\rho + \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq \frac{1}{2}}} m_\rho + \sum_{\substack{\rho \neq \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ \beta + \beta' \neq 1, \gamma = \gamma'}} 1.$$

En substituant ceci dans (4.4), et en supprimant les termes horizontaux asymétriques de l'inégalité puisqu'ils sont non négatifs, on a (*ici, fin de l'explication placée en commentaire dans le source.*)

ce qui prouve que la proportion de zéros simples de $\zeta(s)$ est $\geq 2 - C + o(1)$.

Ensuite, pour les termes diagonaux symétriques, nous avons :

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq 1/2}} m_\rho \leq \left(C + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T - \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} m_\rho.$$

En reprenant (4.5) et en substituant la dernière inégalité dans l'inégalité ci-dessus, on obtient:

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq 1/2}} m_\rho \leq \left(C - 1 + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T. \quad (4.8)$$

Ainsi :

$$\sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta = 1/2}} 1 = \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T}} 1 - \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq 1/2}} 1 \geq N(T) - \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq 1/2}} m_\rho \geq \left(2 - C + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T,$$

et nous avons démontré que la proportion de zéros de $\zeta(s)$ sur la droite critique est $\geq 2 - C + o(1)$.

Finalement, en utilisant (4.7) et (4.8), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta = \frac{1}{2} \text{ and } \rho \text{ simple}}} 1 &= \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \rho \text{ simple}}} 1 - \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq \frac{1}{2} \text{ and } \rho \text{ simple}}} 1 \geq \left(2 - C + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T - \sum_{\substack{\rho \\ 0 < \gamma \leq T \\ \beta \neq \frac{1}{2}}} m_\rho \\ &\geq \left(3 - 2C + o(1)\right) \frac{T}{2\pi} \log T, \end{aligned}$$

ce qui prouve, si $1 \leq C < 3/2$, que la proportion de zéros simples de $\zeta(s)$ sur la droite critique est $\geq 3 - 2C + o(1)$. $\square$

5 Deux résultats sur les zéros critiques

En utilisant le théorème 2, nous avons démontré dans [1] le résultat suivant.

Théorème 3 (1). *En supposant que tous les zéros de $\zeta(s)$ avec $T < \gamma \leq 2T$ se trouvent dans la région*

$$B_b = \{s = \sigma + it : \left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \frac{b}{2 \log T}, T < t \leq 2T\}. \quad (5.1)$$

Alors, si $b = 0,3185$, pour les zéros de $\zeta(s)$ avec $T < \gamma \leq 2T$, au moins $2/3$ sont simples, au moins $2/3$ sont sur la droite critique, et au moins $1/3$ sont à la fois simples et sur la droite critique.

Peut-on obtenir, par cette méthode, que 100 % des zéros se trouvent asymptotiquement sur la droite critique ? Étant donné que la proportion de zéros simples est égale à celle des zéros critiques dans le théorème 2, nous devons utiliser un résultat conditionnel sur la corrélation par paires qui ne suppose pas (HR) et implique que 100 % des zéros sont simples.

Conjecture de corrélation des paires (PCC) Pour $\lambda > 0$ fixé et lorsque $T \rightarrow \infty$,

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ 0 < \gamma - \gamma' \leq \frac{2\pi\lambda}{\log T}}} 1 \sim \left(\int_0^\lambda \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du \right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

Rappelons que la conjecture de corrélation par paires (PCC) de Montgomery fut la première à suggérer que les zéros des fonctions L obéissent à un modèle de valeurs propres de matrice aléatoire ; pour $\zeta(s)$, il s'agit du modèle d'ensemble unitaire gaussien (GUE).

Puisque (PCC) ne concerne que la distance verticale non nulle entre les zéros, elle est indépendante de (HR). Par ailleurs, rien dans (PCC) n'implique directement que des zéros quelconques se trouvent sur la droite critique.

Le raisonnement de Montgomery en faveur de (PCC) s'appuyait sur (HR), mais Gallagher et Mueller [7] ont démontré que (PCC) implique asymptotiquement que 100 % des zéros sont simples, en utilisant une méthode différente fondée sur des résultats inconditionnels de Selberg et Fujii.

Cependant, comme (HR) a été utilisée dans de nombreuses parties de [7], nous l'avons précisé dans [5] afin de montrer que les résultats concernant (PCC) restent valables sans (HR).

Par conséquent, d'après le théorème 2, nous obtenons également que, asymptotiquement, 100 % des zéros se situent sur la droite critique.

Théorème 4 (5). *La conjecture de corrélation par paires implique asymptotiquement que 100 % des zéros de $\zeta(s)$ sont simples et situés sur la droite critique.*

La démonstration du théorème 4 repose en fait sur la propriété suivante de la conjecture de corrélation par paires :

Simplicité essentielle (SE). Si $\lambda \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow \infty$, alors on a :

$$\sum_{\substack{\rho, \rho' \\ 0 < \gamma, \gamma' \leq T \\ |\gamma - \gamma'| \leq \frac{2\pi\lambda}{\log T}}} 1 = \left(1 + o(1) \right) \frac{T}{2\pi} \log T. \quad (5.2)$$

Clairement, (5.2) implique $C = 1$, donc le théorème 2 découle de (SE). Ceci ramène la démonstration du théorème 4 à démontrer, sans (HR), que (PCC) implique (SE).

D'autres conjectures de corrélation de paires, outre (PCC), impliquent également (SE).

Dans [6], nous avons démontré que l'hypothèse alternative (HA) donne une fonction de densité de corrélation de paires différente de celle de (PCC), ce qui, sous une certaine forme, implique (SE) et donc le théorème 4 avec (PCC) remplacé par cette forme alternative (HA).

Remerciements pour les subventions : Les auteurs remercient l'American Institute of Mathematics pour son accueil et pour avoir fourni un environnement agréable où les travaux sur ce projet ont débuté. Le deuxième auteur bénéficie également actuellement du soutien de la bourse de recherche Inamori 2024 et de la subvention JSPS KAKENHI n° 22K13895.

Bibliographie

- [1] Siegfried Alan C. Baluyot, Daniel Alan Goldston, Ade Irma Suriajaya, and Caroline L. TurnageButterbaugh. Pair correlation of zeros of the Riemann zeta function I: Proportions of simple zeros and critical zeros. arXiv:2501.14545, 2025.
- [2] H. M. Bui, D. R. Heath-Brown. On simple zeros of the Riemann zeta-function. Bull. Lond. Math. Soc., 45(5):953–961, 2013.
- [3] Andrés Chirre, Felipe Gonçalves, and David de Laat. Pair correlation estimates for the zeros of the zeta function via semidefinite programming. Adv. Math., 361:106926, 22, 2020.
- [4] J. B. Conrey, A. Ghosh, and S. M. Gonek. Simple zeros of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. (3), 76(3):497–522, 1998.
- [5] Daniel A. Goldston, Junghun Lee, Jordan Schettler, and Ade Irma Suriajaya. Pair Correlation Conjecture for the zeros of the Riemann zeta-function I: simple and critical zeros. arXiv:2503.15449 [math.NT], 2025.
- [6] Daniel A. Goldston, Junghun Lee, Jordan Schettler, and Ade Irma Suriajaya. Pair Correlation Conjecture for the zeros of the Riemann zeta-function II: The alternative hypothesis. arXiv:2507.06823 [math.NT], 2025.
- [7] P. X. Gallagher and Julia H. Mueller. Primes and zeros in short intervals. J. Reine Angew. Math., 303/304:205–220, 1978.
- [8] Daniel A. Goldston and Hugh L. Montgomery. Pair correlation of zeros and primes in short intervals. In Analytic number theory and Diophantine problems (Stillwater, OK, 1984), volume 70 of Progr. Math., pages 183–203. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987.
- [9] D. A. Goldston. On the pair correlation conjecture for zeros of the Riemann zeta-function. J. Reine Angew. Math., 385:24–40, 1988.
- [10] D. R. Heath-Brown and D. A. Goldston. A note on the differences between consecutive primes. Math. Ann., 266(3):317–320, 1984.
- [11] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. In Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972), volume Vol. XXIV of Proc. Sympos. Pure Math., pages 181–193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.
- [12] Kyle Pratt, Nicolas Robles, Alexandru Zaharescu, and Dirk Zeindler. More than five-twelfths of the zeros of ζ are on the critical line. Res. Math. Sci., 7(2):Paper No. 2, 74, 2020.
- [13] D. Platt and T. Trudgian. The riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$. Bull. of the LMS, 53(3):792–797, 2021.