Traduction d'un extrait de M. Bakonyi, H. Woerdeman, *Matrix Completions, Moments, and Sums of Hermitian Squares*, Princeton University Press, Princeton (2011)

1.1.2 Le cône $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$

On considère les polynômes trigonométriques $p(z) = \sum_{k=-n}^{k=n} p_k z^k$ avec le produit intérieur

$$\langle p, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta = \sum_{k=-n}^{n} p_k\overline{g_k},$$

où $g(z) = \sum_{k=-n}^{n} g_k z^k$. On s'intéresse particulièrement à l'espace de Hilbert $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n$ sur $\mathbb{R}$ constitué des polynômes trigonométriques $p(z)$ qui sont à valeurs réelles sur le cercle unité, c'est-à-dire que $p \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n$, si et seulement si p est de degré $\leq n$ et $p(z) \in \mathbb{R}$ pour $z \in \mathbb{T}$. Il n'est pas difficile de voir que la dernière condition est équivalente à $p_k = \overline{p_{-k}},\ k = 0, \ldots, n$. Pour de tels polynômes trigonométriques à valeurs réelles, on a que $\langle p, g\rangle = \sum_{k=-n}^{n} p_k g_{-k}$. Le cône auquel nous nous intéressons est formé par les polynômes trigonométriques qui sont non négatifs sur le cercle unité :

$$\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+ = \{p \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n \ : \ p(z) \geq 0 \ \text{ pour tout } z \in \mathbb{T}\}.$$

Une propriété cruciale de ces polynômes non négatifs est qu'ils se factorisent comme le module au carré d'un polynôme unique. Cette propriété établie dans le prochain théorème est connue sous le nom de propriété de factorisation de Fejér-Riesz ; cette propriété est en fait la clef pour déterminer le dual de $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$, et ses rayons extrêmes. On dit qu'un polynôme q est extérieur si toutes ses racines sont à l'extérieur du disque unité ouvert ; c'est-à-dire que q est extérieur quand $q(z) \neq 0$ pour $z \in \mathbb{D}$. Le polynôme $q(z) = \sum_{k=0}^{n} q_n z^n$ de degré n est dit co-extérieur si toutes ses racines sont à l'intérieur du disque unité fermé $q_n \neq 0$ (dans certains contextes, il est pratique d'interpréter $q_n \neq 0$ comme signifiant que ∞ n'est pas une racine de $q(z)$). On voit facilement que $q(z)$ est extérieur si et seulement si $z^n\overline{q(1/\overline{z})}$ est co-extérieur.

Théorème 1.1.5. *Le polynôme trigonométrique* $p(z) = \sum_{k=-n}^{n} p_k z^k, p_n \neq 0$, *est non-négatif sur le cercle unité* $\mathbb{T}$ *si et seulement s'il existe un polynôme* $q(z) = \sum_{k=0}^{n} q_k z^k$ *tel que*

$$p(z) = q(z)\overline{q(1/\overline{z})}, z \in \mathbb{C}, z \neq 0.$$

Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

En particulier, $p(z) = |q(z)|^2$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. Le polynôme q peut être choisi pour être extérieur (co-extérieur) et dans ce cas, q est unique à un facteur scalaire de module 1 près.

Quand le facteur q est extérieur (co-extérieur), on se réfère à l'égalité $p = |q|^2$ comme à une factorisation extérieure (co-extérieure). Pour rendre la factorisation extérieure unique, on peut insister sur le fait que $q_0 \geq 0$, auquel cas, on peut faire référence à q comme au facteur extérieur de p. De façon similaire, pour rendre la factorisation co-extérieure unique, on peut insister sur le fait que $q_n \geq 0$, auquel cas, on peut faire référence à q comme au facteur co-extérieur de p.

Preuve. L'implication dans un sens (partie "si") est triviale, on se focalise donc sur l'implication dans l'autre sens (la partie "seulement si"). Donc soit $p \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$. En utilisant le fait que $p_{-k} = \overline{p_k}$ pour $k = 0, \ldots, n$, on voit que le polynôme

$$g(z) = z^n p(z) = \overline{p}_n + \ldots + p_0 z^n + \ldots + p_n z^{2n}$$

satisfait la relation

$$g(z) = z^{2n} \overline{g(1/\overline{z})}, z \neq 0. \tag{1.1.1}$$

Soit $z_1, ..., z_{2n}$ l'ensemble de tous les zéros de g comptés selon leur multiplicité. Puisque tous les z_j sont différents de zéro, il découle de (1.1.1) que $1/\overline{z}_j$ est également un zéro de g avec la même multiplicité que z_j. On prouve que si $z_j \in \mathbb{T}$ auquel cas $z_j = 1/\overline{z}_j$, alors $z_j = e^{it_j}$ est de multiplicité paire. La fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(t) = p(e^{it})$ est différentiable et non négative sur $\mathbb{R}$. Cela implique que la multiplicité de t_j comme zéro de ϕ est paire puisque ϕ a un minimum local en t_j et par conséquent, z_j est un zéro de multiplicité paire de g. On peut donc renuméroter les zéros de g de telle façon que $z_1, \ldots, z_n, 1/\overline{z}_1, \ldots, 1/\overline{z}_n$ représente les $2n$ zéros de g. Notons qu'on peut choisir $z_1, ..., z_n$ de telle façon que $|z_k| \geq 1, \;\; k = 1, \ldots, n$ (ou, si on préfère, de telle façon que $|z_k| \leq 1, \;\; k = 1, \ldots, n$). Alors on a

$$g(z) = p_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \prod_{j=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z}_j} \right),$$

et donc

$$p(z) = z^{-n} g(z) = p_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{z \overline{z}_j} \right) \tag{1.1.2}$$

où $c = p_n (\prod_{j=1}^{n} (-\overline{z}_j))^{-1}$. Puisque p est non négatif sur $\mathbb{T}$ et positif quelque part, en $\alpha \in \mathbb{T}$ disons, on obtient que $c > 0$, $\left(\text{lorsque } c = \dfrac{\prod_j |\alpha - z_j|^2}{p(\alpha)} \right)$. Avec $q(z) = \sqrt{c} \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)$, (1.1.2) implique que $p(z) = q(z) \overline{q(1/\overline{z})}$. Notons que choisir $|z_k| \geq 1, \;\; k = 1, \ldots, n$, amène à une factorisation extérieure, et que choisir $|z_k| \leq 1, \;\; k = 1, \ldots, n$, amène à une factorisation co-extérieure. L'unicité du facteur (co-)extérieur à un facteur scalaire de module 1 près est laissée comme exercice (voir Exercice 1.6.5).

Pour obtenir une description du cône dual de $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$, il serait utile de réécrire le produit intérieur $\langle p, g\rangle$ en fonction de la factorisation $p = |q|^2$. Dans ce but, introduisons la matrice de Toeplitz

$$T_g := (g_{i-j})_{i,j=0}^n = \begin{pmatrix} g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{-n} \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{-n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 \end{pmatrix}$$

où $g(z) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} g_k z^k$.

C'est maintenant un calcul évident qui permet de voir que $p(z) = |q_0 + \ldots + q_n z^n|^2$, $z \in \mathbb{T}$, amène

$$\langle p, g\rangle = (\overline{q_0} \ldots \overline{q_n} \begin{pmatrix} g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{-n} \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{-n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & g_{n-1} & \cdots & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = x^* T_g x,$$

où $x = (q_0 \ldots q_n)^T$ et l'exposant T dénote le fait de prendre la transposée. À partir de là, il est évident de voir que le cône dual de $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ est constitué exactement de ces polynômes trigonométriques g pour lesquels la matrice de Toeplitz associée T_g est positive semi-définie (notation : $T_g \geq 0$).

Lemme 1.1.6. *Le cône dual de* $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ *est donné par*

$$(\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+)^* = \{g \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n \ : \ T_g \geq 0\}. \tag{1.1.4}$$

Preuve. Clairement, si $p = |q|^2 \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ et $g \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n$ est tel que $T_g \geq 0$, on obtient par (1.1.3) que $\langle p, g\rangle \geq 0$. Cela donne $\supseteq$ dans (1.1.4). Pour l'inverse, supposons que $g \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n$ est tel que T_g n'est pas positif semi-défini. Alors, choisissons $x = (q_0 \ldots q_n)^T$ tel que $x_g^T x < 0$, et soit $p \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n$ donné via $p(z) = |q_0 + \ldots + q_n z^n|^2$, $z \in \mathbb{T}$. Alors, (1.1.3) amène que $\langle p, g\rangle < 0$, et par conséquent, $g \notin (\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+)^*$. Cela amène $\subseteq$ dans (1.1.4).

Ensuite, on montre que les rayons extrêmes de $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ sont générés exactement par les polynômes trigonométriques non négatifs qui ont $2n$ racines (en comptant les multiplicités) sur le cercle unité.

Proposition 1.1.7. *Le polynôme trigonométrique* $q(z) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} q_k z^k$ *dans* $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ *génère un rayon extrême de* $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ *si et seulement si* $q_n \neq 0$ *et toutes les racines de* q *sont sur le cercle unité ; de façon équivalente,* $q(z)$ *est de la forme*

$$q(z) = c \prod_{k=1}^{n} (z - e^{it_k}) \left(\frac{1}{z} - e^{-it_k}\right), \tag{1.1.5}$$

pour un certain $c > 0$ *et* $t_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$.

Preuve. Supposons d'abord que $q(z)$ est de la forme (1.1.5) et notons $q = g + h$ avec $g, h \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$. Lorsque $q(e^{it_k}) = 0, \;\; k = 1, \ldots, n$, et g et h sont non négatifs sur le cercle unité, on obtient que $g(e^{it_k}) = h(e^{it_k}) = 0, \;\; k = 1, \ldots, n$. Remarquons que $q \geq g$ sur $\mathbb{T}$ implique que la multiplicité d'une racine sur $\mathbb{T}$ de g doit être au moins aussi grande que la multiplicité de la même racine de q (il faut utiliser la construction de la fonction ϕ dans la preuve du théorème 1.1.5). En utilisant cela, on obtient que g et h doivent être des multiples de q.

Ensuite, supposons que q a moins de $2n$ racines sur le cercle unité (en comptant les multiplicités). En utilisant la construction dans la preuve du théorème 1.1.5, on peut factoriser q comme $q = gh$ où $g \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_m^+, \;\; m < n$ a toutes ses racines sur le cercle unité, $h \in \mathbb{T}\mathrm{Pol}_k^+$ n'a aucune de ses racines sur le cercle unité, et $k + m \leq n$. Si h n'est pas une constante, on peut soustraire une constante positive ϵ, disons, de h tout en restant dans $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_k^+$ (par exemple, on peut prendre $\epsilon = \min_{z \in \mathbb{T}} h(z) > 0$). Alors $q = \epsilon g + (h - \epsilon) g$ donne une manière d'écrire q comme une somme d'éléments dans $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ qui ne sont pas des multiples scalaires de q (lorsque h n'est pas une fonction constante). Dans le cas où $h \equiv c$ est une fonction constante, on peut écrire

$$q(z) = g(z)h(z) = g(z)\left(\frac{1}{2}c - \delta z - \frac{\delta}{z}\right) + g(z)\left(\frac{1}{2}c + \delta z + \frac{\delta}{z}\right),$$

ce qui, pour $0 < \delta < \frac{c}{4}$ donne une manière d'écrire q comme une somme d'éléments appartenant à $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_{m+1}^+ \subseteq \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ qui ne sont pas des multiples scalaires de q. Cela prouve que q ne génère pas un rayon extrême de $\mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$.

Notons que si l'on considère le cône des polynômes trigonométriques non négatifs sans aucune restriction sur le degré, l'argument dans la preuve de la proposition 1.1.7 montre qu'aucun de ses éléments ne génère de rayon extrême. En d'autres termes, le cône $\mathbb{T}\mathrm{Pol}^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{T}\mathrm{Pol}_n^+$ n'a aucun rayon extrême.