

LOGIQUE PROPRE DANS L'ESPRIT DE GEORGE BOOLE

ZENO TOFFANO

Résumé : Ce travail présente une approche opérationnelle et géométrique de la logique. Il part de la décomposition élective multilinéaire des fonctions logiques binaires sous la forme originale introduite par George Boole. Une justification sur des bases historiques est présentée, reliant la théorie de Boole et l'utilisation de ses fonctions logiques arithmétiques avec les axiomes de l'algèbre booléenne utilisant des ensembles et la logique quantique. On montre que cette formulation polynomiale algébrique peut être naturellement étendue à des opérateurs dans des espaces vectoriels finis. Les opérateurs logiques apparaîtront comme des opérateurs de projection qui commutent et les valeurs de vérité, qui prennent les valeurs binaires (0, 1), sont les valeurs propres respectives. Dans cette optique, la solution d'une proposition logique résultant de l'opération sur une combinaison d'arguments apparaîtra comme une sélection dont le résultat ne peut être que l'une des valeurs propres. Ainsi la logique propositionnelle peut être formalisée en algèbre linéaire en utilisant des développements électifs qui correspondent ici à des combinaisons d'opérateurs de projection élémentaires tensoriels. La motivation originale et principale de ce travail, ce sont les applications dans le nouveau domaine de l'information quantique ; les différences sont soulignées avec des approches de logique quantique plus traditionnelles.

1. Introduction

L'année 2015 a célébré en toute discrétion le 200^e anniversaire de la naissance de George Boole (1815-1864). Son approche visionnaire de la logique a conduit à formaliser en langage mathématique simple ce qui était avant lui une discipline orientée vers le langage et la philosophie. Sa motivation initiale telle qu'elle apparaît clairement dans son premier ouvrage sur la logique en 1847, *Mathematical Analysis of Logic* [1], était de proposer une formulation algébrique capable de générer toutes les propositions logiques possibles, d'exprimer toute proposition logique par une équation, et de trouver les conséquences les plus générales de tout ensemble fini de propositions logiques par un raisonnement algébrique appliqué aux équations correspondantes. Il rédige ensuite la synthèse de toutes ses investigations en logique en 1854 avec *Les Lois de la pensée* [2].

En 1847, George Boole était déjà un mathématicien exceptionnel, il reçut la médaille d'or de la Royal Society en 1844 pour ses mémoires *On a General Method in Analysis*. Il était un expert dans la résolution des équations différentielles non linéaires et il a introduit de nombreuses nouvelles méthodes utilisant l'algèbre symbolique comme indiqué par Maria Panteki [3]. De toute évidence, George Boole s'est pris d'affection pour les opérateurs en raison de ses succès dans l'application de l'algèbre des opérateurs différentiels dans les années 1841-1845.

Son approche peut être considérée comme opérationnelle, cette caractéristique est rarement considérée de nos jours, comme le souligne Theodeore Hailperin [4, 5]. George Boole (voir [1] p. 16) utilise $X, Y, Z...$ pour représenter les éléments individuels de classes. Il introduit ensuite le symbole x , qu'il nomme le *symbole électif*, agissant sur tout objet comprenant des individus ou des classes en sélectionnant tous les X qu'il contient. Il s'ensuit que le produit des symboles électifs " xy représentera successivement la sélection de la classe Y , puis dans la sélection de la classe Y , des objets de la classe X que la sélection de la classe Y contient, le résultat étant la classe commune

Centrale-Supelec - Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S-UMR8506) - CNRS - Université Paris-Saclay,
3 rue Joliot-Curie, F-91190 Gif-sur-Yvette, FRANCE.

Référence : <https://arxiv.org/pdf/1512.06632.pdf>.

Traduction Denise Vella-Chemla : mars 2023.

aux X et aux Y ". En langage logique, c'est l'opération de conjonction AND.

Une expression dans laquelle interviennent les symboles électifs, x, y, z, \dots , ne devient une fonction élective que si elle peut être considérée comme "interprétable" en logique. George Boole n'a pas donné une définition précise de ce qu'il entendait par une fonction élective, il semble probable qu'il voulait dire que toute fonction algébrique des symboles électifs x, y, z, \dots , serait une fonction élective. C'est le cas lorsque l'expression se résume aux deux valeurs possibles 0 et 1. En logique, les nombres 0 et 1 correspondent respectivement à faux et vrai. Ainsi, selon George Boole, toutes les quantités deviennent interprétables lorsqu'elles prennent les valeurs 0 et 1.

La logique de George Boole utilisant l'algèbre symbolique était différente et nouvelle parce qu'il était convaincu que la logique n'avait pas seulement à voir avec la "quantité", mais devait posséder un "système de relations plus profond" qui avait à voir avec l'activité de "raisonnement déductif". Or avec ces prémisses il était capable d'utiliser toutes les opérations courantes de l'algèbre ordinaire mais en introduisant une condition spéciale sur les symboles : la loi d'idempotence. Cette loi ne peut être satisfaite que par les nombres 0 et 1 et était par lui considérée comme la loi particulière de la logique. Dans son deuxième livre sur la logique [2], il donne à cette loi le statut de "loi fondamentale de la pensée".

Pour George Boole, tous les arguments et fonctions en logique peuvent être considérés comme des symboles électifs. Par exemple il déclare (p. 63 dans [1]) : "Il est évident que si le nombre de symboles électifs est n , le nombre des modules sera 2^n , et que leurs valeurs séparées seront obtenues en interchangeant de chaque manière possible les valeurs 1 et 0 à la place des symboles électifs de la fonction donnée. n représente le nombre de symboles électifs qui correspondent au nombre d'arguments du système logique ou en langage moderne son arité (la lettre m dans le texte original est ici remplacée par la lettre n). Les modules, pour George Boole, sont les cofacteurs du développement (p. 62 dans [1]). De ce qui a été dit ci-dessus, une conclusion évidente est qu'il y a 2^{2^n} extensions possibles des fonctions électives, mais curieusement George Boole ne tire pas explicitement cette conclusion.

Avec l'introduction des tables de vérité par Charles Sanders Peirce au début des années 1880 [6], peu remarquées à l'époque, comme l'affirme Karl Menger dans [9] et successivement, vers 1920, redécouvertes simultanément et indépendamment par Emil Post [7] et par Ludwig Wittgenstein (5,101 dans le *Tractatus* [8]), le comptage du nombre de propositions logiques élémentaires possibles (connectifs) est devenu une évidence. D'ailleurs, Emil Post dans [7] a étendu le comptage aux alphabets supérieurs au binaire ($m > 2$) conduisant au nombre combinatoire m^{m^n} de connecteurs logiques multivalués élémentaires avec m valeurs et n arguments.

L'aspect de la méthode de Boole qui a été beaucoup discuté était son interprétation donnée aux deux nombres particuliers : 1 et 0. Le nombre 1 représentait pour lui la classe de tous les objets concevables, c'est-à-dire l'univers entier, et naturellement le nombre 0 aurait dû représenter la classe vide. Mais il n'est pas clair de savoir dans [1, 2] si George Boole a jamais fait référence à 0 comme étant une classe, ou était-ce juste une partie de sa machinerie algébrique ? Quant à l'objection à l'usage de 1, c'est à l'exigence qu'il renvoie à l'univers entier par opposition à un *univers de discours* (étendue du champ dans lequel se trouvent tous les objets de notre discours) [10].

George Boole introduit un flou considérable dans [1] quant à savoir à quel moment on travaille dans une logique de classes, et à quel moment on travaille dans une logique de propositions. Dans son calcul propositionnel, il a limité son attention aux énoncés qui étaient toujours vrais ou toujours faux, ce qui réduit les propositions hypothétiques à des propositions catégoriques. En 1854 [2] George Boole remplace plus explicitement l’algèbre des opérateurs de sélection par l’algèbre des classes.

Dans cet article, les propositions hypothétiques ne seront pas considérées, l’analyse se limitera à ce qu’on appelle couramment la *logique propositionnelle* (aussi appelée *logique sententielle*) et ne traitera pas de la *logique des prédicats* (également appelée *logique du premier ordre*) qui utilise des quantificateurs (le quantificateur existentiel \exists et le quantificateur universel \forall) sur les propositions.

Comme l’a souligné Theodore Hailperin dans [4], les symboles et fonctions électives dénotent des opérateurs et il sera souligné dans ce travail que l’algèbre des symboles électifs peut également être interprétée comme une algèbre d’opérateurs de projection qui commutent et utilisée pour développer la logique propositionnelle dans un cadre d’algèbre linéaire par l’isomorphisme des symboles et fonctions électives de Boole avec les opérateurs de projection qui commutent.

2. Symboles et fonctions électifs

Idempotence et théorème de développement de Boole

Ici sont brièvement présentés les concepts de base qui sous-tendent la méthode de décomposition élective, à partir de la toute première intuition de George Boole concernant sa numérisation de la logique.

Les symboles électifs obéissent aux lois suivantes, celles-ci sont suffisantes pour construire une algèbre.

La loi (1) dit que les symboles électifs sont distributifs. Cela signifie, selon Boole, que “le résultat d’un acte d’élection est indépendant du groupement ou de la classification du sujet”.

$$x(u + v) = xu + xv \quad (1)$$

La loi (2) dit que les symboles électifs commutent, ceci parce que : “l’ordre dans lequel s’accomplissent deux actes successifs d’élection est indifférent.”.

$$xy = yx \quad (2)$$

La loi (3) appelée *loi d’indice* par George Boole représente l’idempotence d’un symbole électif, elle stipule : “le résultat d’un acte d’élection donné, effectué deux fois de suite, ou un nombre quelconque de fois de suite, est le résultat du même acte effectué une seule fois”.

$$x^n = x \quad (3)$$

En conséquence de cette loi, George Boole a formulé les deux équations équivalentes suivantes.

$$\begin{aligned} x^2 &= x \\ x(1 - x) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

L'équation (4) montre explicitement que les nombres 0 et 1 sont les seuls possibles. Il indique également l'orthogonalité entre le symbole électif x et $(1 - x)$, qui représente le complément ou la négation de x . Aussi:

$$x + (1 - x) = 1 \quad (5)$$

cette équation montre que le symbole x et son complément $(1 - x)$ forment la classe d'univers.

Maintenant, avec ces lois et ces symboles, les fonctions électives peuvent être calculées. Il est intéressant d'illustrer comment George Boole est arrivé à une expression générale d'une fonction élective en utilisant le développement de Mac Laurin de la fonction $f(x)$ autour du nombre 0 (voir [1] p. 60). Du fait de la loi d'indice (3) ou de la loi d'idempotence (4) le symbole x devient un facteur de la série commençant au deuxième terme dans le développement de Mac Laurin, cela donne :

$$f(x) = f(0) + x \left[f'(0) + \frac{1}{2!} f''(0) + \frac{1}{3!} f'''(0) + \dots \right] \quad (6)$$

Puis en calculant la fonction à la valeur 1, $f(x = 1)$, à l'aide de l'équation (6), on trouve une expression différente de la série. En remplaçant cette expression en retour dans l'équation (6) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x(f(1) - f(0)) \\ &= f(0)(1 - x) + f(1)x \end{aligned} \quad (7)$$

De façon plus simple ces expressions peuvent être obtenues directement par des méthodes d'interpolation classiques utilisant par exemple des polynômes d'interpolation de Lagrange pour un nombre fini m de points distincts x_i . Les polynômes de Lagrange sont alors de degré $m - 1$ et sont donnés par :

$$\pi_{x_i}(x) = \prod_{j (j \neq i)}^m \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (8)$$

La fonction d'interpolation $f(x)$ d'une fonction donnée $g(x)$ s'exprime alors à l'aide du développement polynomial fini sur les m points distincts choisis x_i :

$$f(x) = \sum_{i=1}^m g(x_i) \pi_{x_i}(x) \quad (9)$$

Pour un système binaire ($m = 2$) de valeurs sur l'alphabet $\{0, 1\}$, les deux polynômes d'interpolation se calculent facilement à partir de (8), donnant respectivement : $\pi_{x_0=0}(x) = (1 - x)$ et $\pi_{x_1=1}(x) = x$, qui sont les mêmes qu'en (7), et pour cet alphabet, l'équation (9) est équivalente à l'équation (7) car bien entendu aux points d'interpolation $g(0) = f(0)$ et $g(1) = f(1)$. De cette manière, la démonstration du théorème de développement électif ne nécessite pas de séries de puissances polynomiales infinies, par exemple le développement de Maclaurin, comme cela a été fait avec la preuve en séries de puissances de George Boole dans [1].

Il faut souligner que les polynômes de Lagrange (8) sont par construction des fonctions idempotentes aux points d'interpolation, plus précisément : $\pi_{x_i}(x = x_i) = 1$ et $\pi_{x_i}(x = x_j \neq x_i) = 0$.

La même méthode d'interpolation peut être étendue à d'autres alphabets binaires, par exemple $\{+1, -1\}$, ainsi qu'aux systèmes multivalués avec $m > 2$ (pour les développements, voir [11]).

L'équation (7) montre qu'une fonction élective peut être développée de manière unique en utilisant les deux symboles électifs orthogonaux x et $(1 - x)$. Maintenant, si la fonction doit être "interprétable" en logique, elle ne doit prendre que les valeurs 0 et 1, ce qui signifie que les deux cofacteurs $f(0)$ et $f(1)$ (les *moduli* de George Boole) prennent également les valeurs 0 ou 1. Ces coefficients représentent les valeurs de vérité pour la fonction logique.

Combien de possibilités, ou exprimées en langage logique, combien de fonctions logiques différentes pouvons-nous construire en utilisant n arguments ? Nous avons déjà dit que les combinaisons possibles sont au nombre de 2^{2^n} . Considérant donc un symbole unique, $n = 1$, on obtient 4 fonctions électives distinctes. Celles-ci sont présentés dans le tableau 1.

Une procédure similaire peut être utilisée (voir p. 62 dans [1]) pour les fonctions électives de deux arguments $f(x, y)$, cela donne le développement multilinéaire suivant utilisant 4 polynômes orthogonaux et idempotents :

$$f(x, y) = f(0, 0)(1 - x)(1 - y) + f(0, 1)(1 - x)y + f(1, 0)x(1 - y) + f(1, 1)xy \quad (10)$$

Et ainsi de suite pour n croissant. Pour $n = 2$ on a $2^{2^{n=2}} = 16$ fonctions électives différentes (données dans le tableau 2) et pour $n = 3$, $2^{2^{n=3}} = 256$. Toutes les fonctions électives sont idempotentes : $f_{el}^2 = f_{el}$. Ici aussi, les méthodes d'interpolation finie pourraient être utilisées en utilisant cette fois-ci des fonctions à plusieurs variables.

L'équation (10) représente le développement électif canonique d'une fonction élective à deux arguments et a la même structure que la forme canonique de disjonction *minterme* en algèbre booléenne [4] qui représente la disjonction de conjonctions mutuellement exclusives (voir ci-après).

Ainsi à partir de l'équation (10) toutes les fonctions logiques peuvent être exprimées comme une combinaison de polynômes multilinéaire de degré 1. On peut montrer que cette décomposition est unique.

George Boole a également développé une méthode de résolution de ce qu'il appelait les *équations électives* où par exemple, la question est : "pour quelles valeurs une fonction élective est-elle vraie ?" (voir [1] p. 70).

Une méthode très simple utilisée pour résoudre les équations électives utilise l'orthogonalité des différents polynômes électifs qui sont multipliés par les cofacteurs respectifs (*moduli*) $f^{[n]}(a, b, c, \dots)$ dans le développement, on appelle ces polynômes $\pi_{(a,b,c,\dots)}^{[n]}$ pour une combinaison donnée de valeurs fixes (a, b, c, \dots) . Cela donne l'équation suivante pour sélectionner les cofacteurs individuels pour une fonction élective à n symboles :

$$f^{[n]}(x, y, z, \dots) \cdot \pi_{(a,b,c,\dots)}^{[n]} = f^{[n]}(a, b, c, \dots) \pi_{(a,b,c,\dots)}^{[n]} \quad (11)$$

L'équation (11) peut être utilisée quel que soit le nombre de symboles et aussi lorsque les fonctions ne sont pas explicitement mises sous la forme canonique. Par exemple si l'on veut sélectionner le

coefficient $f(0, 1)$ parmi $f(x, y)$ dans l'équation (10), on multiplie simplement la fonction par le polynôme orthogonal correspondant $(1 - x)y$. Sans doute est-il la plupart du temps plus facile d'évaluer directement $f(0, 1)$.

3. Logique symbolique élective

3.1. Tables de vérité et fonctions électives

Dans cette section, le lien des fonctions électives avec la logique propositionnelle ordinaire est présenté. Les fonctions et les symboles prendront exclusivement les deux valeurs binaires 0 et 1 représentant respectivement le caractère faux (F) et vrai (T) d'une proposition donnée. Les fonctions logiques sont classées selon leurs tables de vérité.

En partant des propositions très simples dérivées du symbole électif unique x , selon le développement de la fonction dans l'équation (7), on voit qu'il y a 4 fonctions possibles selon les valeurs prises respectivement par $f(0)$ et $f(1)$. C'est ce que montre le tableau 1 :

fonction. $f_i^{[1]}$	proposition logique	valeur de vérité $f(0) f(1)$	forme canonique $(1 - x), x$	forme polynomiale
$f_0^{[1]}$	F	0 0	0	0
$f_1^{[1]}$	\bar{A}	1 0	$(1 - x)$	$1 - x$
$f_2^{[1]}$	A	0 1	x	x
$f_3^{[1]}$	V	1 1	$(1 - x) + x$	1

Table 1: Les 4 fonctions électives logique à un seul argument

Dans ce cas, les deux propositions non triviales sont la projection logique A et sa négation \bar{A} . Les deux autres donnent des sorties constantes : **Faux** (F) et **Vrai** (V) quelle que soit la valeur de l'argument.

Dans le tableau 2, on montre les 16 fonctions électives, $f_i^{[2]}$, pour $n = 2$ arguments. Les polynômes électifs correspondants peuvent être obtenus directement en substituant les valeurs de vérité respectives aux quatre termes polynomiaux dans l'équation (10). Selon la classification standard, donnée par exemple par Donald Knuth [12], les fonctions logiques sont ordonnées par nombre binaire croissant dans la table de vérité (l'ordre de comptage va de gauche à droite : le digit le plus bas est à gauche). La représentation utilisée ici correspond à ce que l'on appelle souvent le vecteur de vérité de la fonction : $(f(0, 0), f(0, 1), f(1, 0), f(1, 1))$.

Quelques précisions sur d'autres connecteurs logiques : l'expression $A \Rightarrow B$ signifie " A implique B ", et l'inverse $A \Leftarrow B$ signifie " B implique A "; le symbole \nRightarrow représente la non-implication. L'expression pour NAND qui est "not AND" est donnée selon les lois de de Morgan [12] par $\bar{A} \vee \bar{B}$. Il en est de même pour NOR, "non OR", donné par $\bar{A} \wedge \bar{B}$.

La négation s'obtient en complémentant la fonction en soustrayant du nombre 1.

fonct. $f_i^{[2]}$	connecteur logique pour A et B	valeur de vérité $f(0,0) f(0,1) f(1,0) f(1,1)$	forme canonique $(1-x)(1-y), (1-x)y, x(1-y), xy$	forme polynomiale
$f_0^{[2]}$	F	0 0 0 0	0	0
$f_1^{[2]}$	NOR , $\bar{A} \wedge \bar{B}$	1 0 0 0	$(1-x)(1-y)$	$1-x-y+xy$
$f_2^{[2]}$	$A \nleftrightarrow B$	0 1 0 0	$(1-x)y$	$y-xy$
$f_3^{[2]}$	\bar{A}	1 1 0 0	$(1-x)(1-y) + (1-x)y$	$1-x$
$f_4^{[2]}$	$A \nrightarrow B$	0 0 1 0	$x(1-y)$	$x-xy$
$f_5^{[2]}$	\bar{B}	1 0 1 0	$(1-x)(1-y) + x(1-y)$	$1-y$
$f_6^{[2]}$	XOR , $A \oplus B$	0 1 1 0	$(1-x)y + x(1-y)$	$x+y-2xy$
$f_7^{[2]}$	NAND , $\bar{A} \vee \bar{B}$	1 1 1 0	$(1-x)(1-y) + (1-x)y + x(1-y)$	$1-xy$
$f_8^{[2]}$	AND , $A \wedge B$	0 0 0 1	xy	xy
$f_9^{[2]}$	$A \equiv B$	1 0 0 1	$(1-x)(1-y) + xy$	$1-x-y+2xy$
$f_{10}^{[2]}$	B	0 1 0 1	$(1-x)y + xy$	y
$f_{11}^{[2]}$	$A \Rightarrow B$	1 1 0 1	$(1-x)(1-y) + (1-x)y + xy$	$1-x+xy$
$f_{12}^{[2]}$	A	0 0 1 1	$x(1-y) + xy$	x
$f_{13}^{[2]}$	$A \leftarrow B$	1 0 1 1	$(1-x)(1-y) + x(1-y) + xy$	$1-y+xy$
$f_{14}^{[2]}$	OR , $A \vee B$	0 1 1 1	$(1-x)y + x(1-y) + xy$	$x+y-xy$
$f_{15}^{[2]}$	V	1 1 1 1	$(1-x)(1-y) + (1-x)y + x(1-y) + xy$	1

Table 2: Les seize fonctions électives logiques à deux arguments

La conjonction, AND, correspond à la fonction élective suivante :

$$f_8^{[2]}(x, y) = f_{\text{AND}}^{[2]}(x, y) = xy \quad (12)$$

et sa négation NAND est simplement :

$$f_7^{[2]}(x, y) = 1 - xy = 1 - f_{\text{AND}}^{[2]}(x, y) = f_{\text{NAND}}^{[2]}(x, y) \quad (13)$$

$f_0^{[2]}$ a les valeurs de vérité (0,0,0,0) et représente la contradiction, $f_1^{[2]}$ est NOR avec les valeurs de vérité (1,0,0,0) et etc... Par exemple la fonction (AND, \wedge) est $f_8^{[2]}$ avec (0,0,0,1), la disjonction (OR, \vee) est $f_{14}^{[2]}$ avec (0,1,1,1) et la disjonction exclusive (XOR, \oplus) est $f_6^{[2]}$ avec (0,1,1,0).

Dans le tableau 2 sont également présentées les formes polynomiales canoniques issues directement de l'éq. (10) et les expressions polynomiales respectives simplifiées.

En complémentant les symboles en entrée, i.e. en remplaçant les symboles x et y par $1-x$ et $1-y$ respectivement, on obtient d'autres fonctions logiques. Par exemple, considérons :

$$\begin{aligned} f_1^{[2]}(x, y) &= (1-x)(1-y) = 1-x-y-xy = 1-(x+y-xy) \\ &= 1-f_{14}^{[2]}(x, y) = 1-f_{\text{OR}}^{[2]}(x, y) = f_{\text{NOR}}^{[2]}(x, y) \end{aligned} \quad (14)$$

c'est le complément de la disjonction OR nommé NOR. Ce résultat correspond à la loi de de Morgan [12] qui stipule que la conjonction AND des compléments est le complément de la disjonction OR.

$$f_{14}^{[2]}(x, y) = f_{\text{OR}}^{[2]}(x, y) = x + y - xy \quad (15)$$

remarquez que l'expression de la disjonction OR est donnée par une expression polynomiale contenant un signe moins, ceci est propre aux fonctions électives, et il doit en être ainsi pour que les fonctions soient "interprétables".

L'expression de la disjonction exclusive XOR est donnée par :

$$f_6^{[2]}(x, y) = f_{\text{XOR}}^{[2]}(x, y) = x + y - 2xy \quad (16)$$

cette forme diffère de ce que l'on utilise habituellement en logique où le dernier terme est omis du fait que l'opération d'addition est considérée comme une somme modulo 1 en algèbre booléenne. Cette fonction représente la fonction de parité donnant 1 lorsque le nombre total de 1 des arguments est impair.

La fonction d'implication (appelée *implication matérielle*) peut également être obtenue par la même méthode, la fonction correspondant à $A \Rightarrow B$ sera $f_{11}^{[2]}$ et l'inverse $f_{13}^{[2]}$. Selon la 2 :

$$f_{11}^{[2]}(x, y) = f_{11}^{[2]}(x, y) = 1 - x + xy \quad f_{13}^{[2]}(x, y) = f_{13}^{[2]}(x, y) = 1 - y + xy \quad (17)$$

En utilisant le théorème de de Morgan et en complétant les arguments, il est facile de vérifier que $f_{11}^{[2]}$ se transforme en $f_{13}^{[2]}$.

Les cas de non-implication seront respectivement $f_{12}^{[2]}$ et $f_{14}^{[2]}$ et sont donnés par :

$$f_{12}^{[2]}(x, y) = f_4^{[2]}(x, y) = x - xy = 1 - f_{11}^{[2]} \quad f_{14}^{[2]}(x, y) = f_2^{[2]}(x, y) = y - xy = 1 - f_{13}^{[2]} \quad (18)$$

On peut bien sûr continuer en augmentant le nombre d'arguments n d'une manière évidente. Considérons le cas $n = 3$, la conjonction devient :

$$f_{\text{AND}}^{[3]}(x, y, z) = xyz \quad (19)$$

L'expression de la disjonction est obtenue de la même manière que dans l'équation (10) mais avec trois choix de symboles x , y et z . Un calcul simple en utilisant les 8 valeurs de vérité (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) donne :

$$f_{\text{OR}}^{[3]}(x, y, z) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz \quad (20)$$

qui représente la règle d'inclusion-exclusion bien connue, et peut être étendue à toute arité n par récurrence.

Pour la fonction XOR avec $n = 3$ on obtient, en utilisant les valeurs de vérité (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1) :

$$f_{\text{XOR}}^{[3]}(x, y, z) = x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz \quad (21)$$

cette dernière expression représente une règle spécifique qui peut être étendue directement à tout n par récurrence.

Une autre fonction très populaire pour $n = 3$ arguments est la majorité MAJ qui donne la valeur 1 lorsqu'il y a une majorité de 1 pour les arguments. La fonction est obtenue en utilisant les valeurs de vérité : $(0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$:

$$f_{\text{MAJ}}^{[3]}(x, y, z) = xy + xz + yz - 2xyz \quad (22)$$

Ces deux derniers connecteurs logiques sont actuellement utilisés ensemble en électronique numérique pour construire un additionneur complet binaire à l'aide de portes logiques, les trois entrées XOR donnent la somme binaire et les trois entrées MAJ donnent la réalisation.

On voit donc que cette méthode est tout à fait générale et s'applique directement à tous les connecteurs quel que soit le nombre d'arguments.

3.2. Développements logiques

Une fonction élective idempotente $f(x, y, \dots)$ peut être évaluée aux valeurs 0 et 1 en utilisant l'algèbre numérique ordinaire, et toutes les fonctions propositionnelles usuelles ont des tables de vérité qui peuvent être exprimées soit sous la forme canonique de Boole, soit sous la forme polynomiale ; par exemple, on a XOR exprimé par $x(1 - y) + (1 - x)y$ ainsi que $x + y - 2xy$. Une remarque importante doit être faite sur l'utilisation des deux développements polynomiaux différents nommés respectivement "forme canonique" et "forme polynomiale" présentés dans les deux dernières colonnes du tableau 2. La forme canonique correspond à ce que l'on nomme en logique numérique moderne la décomposition minterme. Les mintermes correspondent ici à des produits de polynômes électifs. Par exemple, pour $n = 2$ arguments, les mintermes sont les 4 polynômes orthogonaux donnés dans l'équation (10) ; en langage logique chaque minterme est une des 4 conjonctions possibles obtenues en complétant aucun, un ou deux arguments.

On peut toujours mettre n'importe quelle fonction logique dans la forme canonique SOP (Sum Of Products), également appelée *forme normale conjonctive complète* [12] qui est une somme de *mintermes*. Un minterme étant formé d'un ensemble d'arguments en entrée, dans une combinaison donnée complétée ou non, reliés par conjonction \wedge , et la "Somme" correspondant à la disjonction \vee (également disjonction exclusive \oplus , comme discuté ci-après). Une autre décomposition canonique est POS (Product Of Sums) de *maxtermes*. Un maxterme étant formé d'un ensemble d'arguments en entrée, dans une combinaison donnée complétée ou non, reliés par disjonction \vee , et le "Produit" correspondant à la conjonction \wedge , cette forme est aussi appelée *forme normale disjonctive*.

Un SOP avec quatre arguments d'entrée peut être considéré pour l'exemple de travail suivant :

$$F_{\Sigma m(5,7,10,15)}^{[4]}(A, B, C, D) = (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D) \quad (23)$$

L'expression $\Sigma m(5, 7, 10, 15)$ est la notation minterme standard, où les nombres correspondent aux mintermes spécifiques utilisés dans le développement. Sous cette forme, on peut facilement vérifier qu'un seul parmi tous les mintermes peut être vrai à la fois, cela signifie que chaque disjonction est en fait une disjonction exclusive. Dans la décomposition minterme SOP, puisque tous les termes sont orthogonaux, la disjonction et la disjonction exclusive jouent le même rôle.

On peut écrire l'expression donnée dans l'équation (23) en utilisant le formalisme présenté dans cet article en écrivant directement la décomposition élective :

$$f_{\Sigma m(5,7,10,15)}^{[4]}(x, y, z, r) = (1 - x)y(1 - z)r + (1 - x)yzr + xy(1 - z)r + xyzr = yr \quad (24)$$

On peut donc transformer cette expression en d'autres formes polynomiales afin d'obtenir une expression plus simple. Des simplifications importantes sont obtenues lorsqu'on peut factoriser un argument et son complément pour une même expression, par exemple x et $(1 - x)$. Les cas les plus simples étant les projecteurs logiques eux-mêmes tels que A dans le tableau 2 où la forme canonique $x(1 - y) + xy$ se réduit à x . Ce dernier argument est essentiellement ce qui est utilisé pour opérer la réduction de fonctions logiques en utilisant des cartes de Karnaugh [12].

3.3. Discussion au sujet de la logique arithmétique élective

La caractéristique de la méthode de George Boole est que si certains termes apparaissant dans des expressions logiques peuvent être ininterprétables, les équations le sont toujours lorsqu'elles sont convenablement interprétées, par les règles $(+, -, \times, 0, 1)$, conduisant in fine aux valeurs 0 et 1. Il reconnaît aussi des termes qui ne sont pas toujours interprétables, comme le terme $2xy$, qui apparaît dans les manipulations d'équations comme pour la fonction élective correspondant à XOR dans (16). La cohérence de l'ensemble de l'entreprise est justifiée dans ce que Stanley Burris a appelé plus tard la "règle des 0 et des 1" [13], qui justifie l'affirmation selon laquelle des termes ininterprétables ne peuvent pas être le résultat ultime de manipulations équationnelles à partir de formules de départ significatives. George Boole n'a fourni aucune preuve de cette règle, mais la cohérence de son système a ensuite été prouvée par Theodore Hailperin [4], qui a fourni une interprétation basée sur une construction assez simple d'anneaux à partir des entiers pour fournir une interprétation de la théorie de Boole (voir ci-après).

Même si cette procédure est simple et directe, il n'est pas dans les habitudes de la logique d'utiliser ces expressions arithmétiques, et la raison n'est pas si claire. Une explication pourrait être due aux habitudes axées sur la technologie : le développement d'ordinateurs utilisant des portes logiques comme blocs de construction et des chiffres binaires (bits) comme unités d'information a généralisé ce qu'on appelle "l'algèbre booléenne" formulée dans sa forme actuelle par Edward Huntington en 1904 [14], qui n'est pas l'algèbre élective de Boole [5]. Par exemple l'addition est considérée en algèbre booléenne comme une somme modulo 1 donnant : $x + x = x$. Pour un anneau booléen, nous avons même une règle différente : $x + x = 0$. Alors que le calcul électif utilise l'addition et la soustraction arithmétiques normales comme vu précédemment.

Les expressions arithmétiques sont étroitement liées aux expressions polynomiales sur le corps de Galois $\text{GF}_2 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$, mais avec des variables et des valeurs de fonction interprétées comme des entiers 0 et 1 au lieu de valeurs logiques. De cette manière, les expressions arithmétiques peuvent

être considérées comme des homologues entiers d’expressions polynomiales sur GF_2 . Pour deux variables booléennes x_1 et x_2 (en utilisant ici une notation plus standard correspondant à deux bits) les relations nécessaires sont :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 1 - x & x_1 \wedge x_2 &= x_1 x_2 \\ x_1 \vee x_2 &= x_1 + x_2 - x_1 x_2 & x_1 \oplus x_2 &= x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 \end{aligned} \quad (25)$$

ceci résume toute la discussion de la section précédente, la partie droite des équations s’appelle l’*expression arithmétique*.

Il semble que, historiquement, seul John Venn ait explicitement utilisé le raisonnement original de George Boole pour construire ses schémas graphiques logiques [15]. Il a utilisé des surfaces sur un espace à 2 dimensions qui représentaient les différentes propositions logiques et plus précisément l’intersection et l’union correspondant à la conjonction et la disjonction. Ce faisant, il devait, dans certains cas, soustraire des portions de surfaces afin d’obtenir la mesure de surface correcte. Par exemple en considérant deux surfaces qui se chevauchent, la surface représentant la disjonction, est obtenue par la somme des deux surfaces moins leur surface sécante (sans cette soustraction on compterait le double de la surface sécante), également pour la disjonction exclusive, il faut soustraire deux fois la surface d’intersection, cela conduit à des formules du type *inclusion-exclusion* comme illustré dans les équations (20) et (21). Les formes canoniques des fonctions électives idempotentes dans l’algèbre de Boole sont les mêmes que pour les fonctions de l’algèbre booléenne, et le nombre de celles-ci était bien connu dans la seconde moitié des années 1800, et entièrement écrit pour trois variables par John Venn en 1881 (selon Ernst Schroder dans [16]).

En 1933, Hassler Whitney [17], a montré comment convertir l’algèbre moderne des classes (en utilisant l’union, l’intersection et le complément) en algèbre numérique, donnant trois formes normales différentes (polynômes en x , polynômes en $(1 - x)$, et forme de Boole) pour les fonctions. Il n’a pas reconnu qu’il convertissait l’algèbre moderne des classes en algèbre des classes de Boole. Théodore Hailperin s’en rendra compte des décennies plus tard.

L’observation que l’on peut exprimer des fonctions propositionnelles, vues comme des fonctions de commutation, en utilisant des polynômes en algèbre numérique ordinaire, comme l’a fait George Boole, a été utilisée par Howard Aiken en 1951 dans [19], où l’on trouve des tables d’expressions algébriques numériques ordinaires minimales pour les fonctions de commutation $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ jusqu’à $n = 4$. Il est intéressant de noter que Howard Aiken, qui a fondé le “Laboratoire de calcul de Harvard”, le premier laboratoire dédié à l’informatique à Havard à partir de 1937, développe le premier ordinateur, l’ASCC (Automatic Sequence Controlled Calculator), aussi appelé Harvard MARK 1 en 1944 avec IBM.

Il a d’abord découvert que les expressions arithmétiques peuvent être utiles dans la conception de circuits logiques et les a utilisées dans les ordinateurs successifs Harvard MARK 3 et MARK 4. Ce type de logique n’a pas percé principalement parce que la famille d’ordinateurs Harvard MARK a été remplacée par la génération d’ordinateurs ENIAC qui utilise des transistors à semi-conducteurs au lieu d’interrupteurs électro-mécaniques et de tubes à vide et il s’est appuyé sur le paradigme du *bit* et de la *porte logique* introduit à l’origine par Claude E. Shannon en 1938 [20] et il “a adapté”

la logique booléenne aux circuits de commutation.

De nos jours, ces développements arithmétiques sont encore utilisés pour décrire les fonctions de commutation et la conception de la logique de décision. Une bonne critique est donnée par Svetlana Yanushkevich dans [18]. Les représentations arithmétiques des fonctions booléennes (c'est-à-dire ici les fonctions électives) sont connues sous le nom de *formes au niveau du mot* et permettent de décrire le calcul parallèle de plusieurs fonctions booléennes à la fois. Une autre propriété utile de ces représentations arithmétiques est utilisée pour les techniques de linéarisation.

4. Logique de projecteur élective

La section suivante présente la véritable nouveauté de ce travail. On montrera que les résultats présentés ci-dessus peuvent être appliqués dans le cadre du formalisme à venir. Il faut souligner qu'à l'époque de George Boole, les méthodes d'algèbre linéaire matricielle n'en étaient qu'à leurs balbutiements. La plupart des méthodes ont été introduites vers 1850, des contributions majeures sont dues à Arthur Cayley et James Joseph Sylvester, ce dernier ayant introduit le terme *matrice*. La définition moderne d'un espace vectoriel a ensuite été introduite par Giuseppe Peano en 1888.

4.1. Parallèles au théorème de développement de Boole dans le domaine des opérateurs idempotents en algèbre linéaire

Une question se pose : pourquoi voudrait-on trouver des parallèles au théorème d'expansion de Boole pour les fonctions ou des symboles idempotents en algèbre linéaire ? L'une des principales motivations de ce travail est de rechercher les liens avec l'algèbre opérationnelle telle qu'elle est utilisée en mécanique quantique dans l'espace de Hilbert avec des applications dans le domaine émergent de l'*information quantique* et du *calcul quantique* [11].

Concernant les applications possibles à la mécanique quantique de la version algébrique en algèbre des opérateurs linéaires idempotents de l'algèbre des opérateurs de Boole, quelques éléments importants peuvent être rappelés. La mécanique quantique était un sujet brûlant à Harvard à partir de la fin des années 1920. Marshall H. Stone, un étudiant de Garret D. Birkhoff, a écrit un livre au début des années 1930 sur les opérateurs linéaires sur les espaces de dimension infinie [21] puis par la suite, à partir de 1934, il a entrepris un grand effort de recherche en logique aboutissant à deux articles sur les algèbres booléennes, les anneaux booléens et les espaces booléens [22, 23].

Marshall H. Stone a montré que toute algèbre booléenne est isomorphe à un corps d'ensembles, et il a motivé son approche algébrique de la logique par le fait qu'elle permet de relier de nombreux domaines différents des mathématiques. Comme le souligne Stanley Burris [13], il est intéressant de noter que sa motivation pour étudier l'algèbre booléenne provenait des mathématiques d'un domaine tel que la mécanique quantique : (citation de son article de 1936 [22]) "L'intérêt de l'écrivain pour le sujet, par exemple, est né en relation avec la théorie spectrale des transformations symétriques dans l'espace de Hilbert et certaines propriétés connexes des intégrales abstraites." Cela aurait pu signifier qu'il examinait des algèbres booléennes des transformations linéaires idempotentes et qu'il s'était rendu compte qu'il existait de nombreux exemples d'algèbres booléennes qui n'avaient pas été pris en compte auparavant. Il poursuit en démontrant que l'axiomatisation

de Huntington des algèbres booléennes [14] est équivalente à l'axiomatisation des anneaux commutatifs à élément unitaire, dans lesquels tout élément est idempotent et qu'on appelle des anneaux booléens ([22] p. 38).

Selon Dirk Schlimm dans [24], Marshall H. Stone a pu relier la théorie des anneaux booléens également à la topologie en prouvant que “la théorie des anneaux booléens est mathématiquement équivalente à la théorie des espaces topologiques localement bicomacts totalement déconnectés”. Cette identification, également appelée *théorème de représentation fondamentale* permettant le transfert de méthodes topologiques à l'étude des algèbres booléennes, et vice-versa, est connue sous le nom de *dualité de Stone*.

Il y a également eu des travaux sur le développement d'une logique spécifique pour la mécanique quantique par Garrett Birkhoff et John von Neumann dans leur article fondateur de 1936 sur le sujet [25], ils ont proposé le remplacement des algèbres booléennes par le réseau de sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert fini. La logique quantique est devenue une discipline indépendante avec de nombreux promoteurs et différentes déclinaisons, même si elle n'a pas encore atteint le statut d'“outil opérationnel” dans les domaines émergents de l'information et de l'informatique quantiques. Déjà en 1932, John von Neumann établissait des parallèles entre les projections dans l'espace de Hilbert et les propositions logiques (p. 249 : “Les projecteurs comme propositions” dans [26]). Comme l'indique clairement François David dans [27], John von Neumann a remarqué que les *observables* (nom donné aux opérateurs hermitiens en mécanique quantique) données par les opérateurs de projection \mathbf{P} , tels que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$, correspondent aux propositions avec un résultat *Oui* or *Non* i.e. *Vrai* ou *Faux*) dans un système logique.

Un opérateur de projection orthogonale \mathbf{P} sur un sous-espace linéaire P , dans l'espace de Hilbert, est en effet une observable qui ne peut prendre que les valeurs propres 1 (si l'état quantique correspondant appartient au sous-espace P) ou 0 (si l'état quantique correspondant appartient au sous-espace orthogonal à P). Ainsi les deux valeurs 1 et 0 sont les seules valeurs propres possibles de l'opérateur de projection \mathbf{P} , et cette affirmation, qu'une mesure ne peut donner qu'une des valeurs propres, fait partie du postulat de mesure fondamental en Mécanique Quantique [26, 27, 28]. Ainsi mesurer l'observable \mathbf{P} équivaut à effectuer un test sur le système, ou à vérifier la validité d'une proposition logique sur le système, qui ne peut être que vraie ou fausse, et non une combinaison de ces valeurs. Cela énonce en d'autres termes la *loi du tiers exclu* aristotélicienne pour une proposition.

Dans son livre de 1932 [26] John von Neumann cite le livre de Marshall H. Stone (p. 70 : “Projections” dans [21]) à propos des opérations conservant les propriétés des opérateurs de projection et donne les règles suivantes :

- $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$ est un opérateur de projection si et seulement si $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1$ (i.e. ils commutent) ;
- $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ est un opérateur de projection si et seulement si $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \equiv 0$ ou $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \equiv 0$;
- $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ est un opérateur de projection si et seulement si $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{P}_2$ ou $\mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 \equiv \mathbf{P}_2$.

Cela montre que la propriété des opérateurs de projection, c'est-à-dire l'idempotence, est conservée sous les opérations (matricielles) que sont le produit $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2$, la somme $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ et la différence $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ uniquement pour les opérateurs de projection qui commutent, cette condition est généralement ex-

primée en mécanique quantique par la relation de commutation $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1 = [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = 0$. La somme n'est définie que pour les sous-espaces disjoints, $P_1 \cap P_2 \equiv 0$, et la différence avec l'inclusion des sous-espaces $P_2 \subseteq P_1$. Ces propriétés seront à la base du développement donné ci-après pour ce qu'on appellera la *logique propre* (Eigenlogic), qui permet d'établir le lien entre les valeurs propres et la logique parce que les matrices diagonales idempotentes n'ont que des 1 et des 0 sur la diagonale, et donc ce sont les seuls résultats possibles (valeurs propres).

Il est également intéressant de noter que la définition même d'un état quantique pur lorsqu'il est exprimé par une matrice de densité, également introduite par John von Neumann, est un *rayon* (un opérateur de projection idempotent de rang 1 traversant un sous-espace unidimensionnel). Tous ces concepts sont à la base de la théorie quantique.

Le travail présenté ici peut être compris dans ce cadre, même si l'on n'a pas besoin ici (du moins à ce stade) de l'algèbre non-commutative qui est à la base des aspects particuliers de la théorie quantique, ayant pour conséquence, par exemple, la non-distributivité de la logique quantique. L'approche ici peut être considérée comme *classique* dans le sens où la discussion se limite aux familles d'observables qui commutent qui sont ici des opérateurs de projection. Mais parce que cette approche utilise des observables, elle peut aussi être considérée comme étant partie intégrante de la "machinerie quantique" mondiale. La plupart des problèmes de physique quantique traditionnelle traitent de la recherche de fonctions propres et de valeurs propres de certaines observables physiques, les plus étudiées étant les observables hamiltoniennes dont les valeurs propres représentent les énergies d'un système physique et dont les états propres sont les états stationnaires représentant les solutions d'équilibre stables, sous la forme de fonctions d'onde, de l'équation de Schrödinger. Les aspects non traditionnels de la mécanique quantique, principalement la superposition, l'intrication et la non-commutativité, sont largement utilisés dans le domaine de l'information quantique et sont considérés comme une ressource pour l'informatique quantique [28]. Rien dans la formulation présentée ici n'interdit d'explorer en dehors de la famille des opérateurs logiques de projection qui commutent, ou de considérer des vecteurs qui ne sont pas des vecteurs propres de la même famille logique. C'est l'objet de recherches en cours (voir [11]).

4.2 Lien entre la formulation de George Boole et l'algèbre linéaire

Si l'on remonte à la motivation des symboles électifs de George Boole, on voit qu'il les applique comme opérateurs de sélection sur des classes d'objets. Comme indiqué dans [3], les expressions qui ne représentent pas des classes sont dites par George Boole "ininterprétables", et sont formellement reconnaissables comme celles qui ne satisfont pas la loi d'idempotence $x^2 = x$. La caractéristique de la méthode est qu'alors que des expressions peuvent être ininterprétables, les équations sont toujours interprétables lorsqu'elles sont interprétées adéquatement par les règles.

Mais dans son premier livre [1], Boole était limité par l'interprétation du nombre 1 qu'il considérait comme l'unique classe U représentant l'univers entier. De ce fait, sans entrer dans tous les détails, voir par exemple [4, 5], il modifie la méthode dans son deuxième livre en 1854 [2] et applique le formalisme à des sous-classes de la classe universelle U .

La terminologie moderne sera utilisée pour décrire ce que faisait George Boole : le mot *classe*

devrait être utilisé comme synonyme du mot moderne *ensemble*. Dans [1], il part de la classe d'univers U et regarde successivement dans [2] l'ensemble $P(U)$ des sous-classes. La définition de l'opérateur de sélection (i.e. électif) S_A défini pour $P(U) \rightarrow P(U)$ pour $A \in P(U)$ agissant pour $X \in P(U)$ est donnée par l'intersection :

$$S_A(X) \equiv A \cap X \quad (26)$$

Utilisant la composition d'opérateurs pour la multiplication, ses opérateurs étaient associatifs, commutatifs et idempotents. En appelant 0 la classe vide, 1 l'univers U , on a $S_0(X) = 0, S_1(X) = X$. L'addition était partiellement définie, à savoir $S_A + S_B$ était définie pour $A \cap B = 0$. De même la soustraction était également partiellement définie.

En considérant toutes les lois que George Boole utilise réellement $(+, -, \times, 0, 1)$ vues comme un ensemble d'axiomes pour une théorie mathématique, Theodore Hailperin trouve [3] que les interprétations ou modèles corrects sont obtenus si l'on considère les domaines auxquelles les variables appartiennent, non pas comme des classes, mais comme des multi-ensembles. Les opérateurs définis ci-dessus ont pour domaines images des *multi-ensembles signés*, qui s'expriment commodément par une application $f : U \rightarrow \mathbb{Z}$. Alors les classes de George Boole correspondent à des fonctions caractéristiques par l'intermédiaire de l'application $\alpha : \Lambda \rightarrow \widehat{\Lambda}$, où $\widehat{\Lambda}(u)$ vaut 1 si $u \in \Lambda$ et 0 sinon. La collection des applications de U dans \mathbb{Z} s'écrit généralement \mathbb{Z}^U , un anneau de fonctions avec multiplication scalaire (par des éléments de \mathbb{Z}), où les opérations sont données en chaque point, c'est-à-dire pour $u \in U$. Les opérateurs d'élection de Boole S_A sur $P(U)$ peuvent donc être traduits en les opérateurs correspondants qui sont l'ensemble des éléments idempotents de l'anneau \mathbb{Z}^U .

Si l'on veut utiliser des opérations linéaires sur un espace vectoriel, il faut prolonger l'anneau \mathbb{Z}^U à un corps F , puisque les espaces vectoriels sont définis sur les corps, ainsi l'ensemble des idempotents $\{0, 1\}^U$, l'anneau des multi-ensembles signés \mathbb{Z}^U et l'algèbre des fonctions F^U sur F vérifient :

$$\{0, 1\}^U \subseteq \mathbb{Z}^U \subseteq F^U \quad (27)$$

L'isomorphisme entre l'anneau \mathbb{Z}^U restreint à ses éléments idempotents $\{0, 1\}^U$ et l'algèbre de Boole des classes sur $P(U)$ est due à Theodore Hailperin dans [3]. Sa percée fut de souligner cette équivalence : l'ensemble des éléments x d'une algèbre de multi-ensembles signés qui satisfont $x^2 = x$ constitue une algèbre booléenne. Mais plus important encore, tous les axiomes qui étaient nécessaires dans l'algèbre (partielle) de Boole de la logique sont vérifiés dans l'algèbre complète \mathbb{Z}^U . Cela signifie que les raisonnements équationnels de Boole étaient corrects dans \mathbb{Z}^U et donc dans son algèbre partielle $P(U)$. Donc finalement, comme le souligne Stanley Burris [13], une grande partie du travail de Boole en logique a des fondations solides.

Il y a aussi un isomorphisme entre l'anneau des opérateurs linéaires sur F^U , restreint aux opérateurs linéaires définis par multiplication à gauche (i.e. le produit matriciel n'est pas commutatif) par un élément idempotent de F^U et l'algèbre de Boole des opérateurs de sélection S_A sur $P(U)$. Un opérateur linéaire sur F^U défini par multiplication à gauche par un idempotent est le même que celui obtenu par multiplication à gauche par une matrice diagonale avec fonction caractéristique idempotente $\widehat{\Lambda}$ le long de la diagonale.

D'après le livre de Theodore Hailperin [4], il est clair qu'étant donné n'importe quel anneau commutatif R avec unité et sans éléments nilpotents, on a des parallèles avec tous les théorèmes de George Boole, pas seulement avec le théorème de développement, qui sont vérifiés dans l'anneau. On peut considérer un tel anneau comme un anneau d'opérateurs agissant par multiplication à gauche sur R . En effet, R peut être considéré comme un R -module unitaire à gauche. Ainsi, on a aussi des parallèles avec les résultats de Boole dans [1].

Si l'on prend pour anneau R l'anneau \mathbb{Z}^N des N -uplets d'entiers, alors les éléments idempotents sont les N -uplets avec des entrées dans $\{0, 1\}$. En identifiant les opérateurs sur les N -uplets aux matrices $N \times N$ diagonales (un espace vectoriel de dimension $d = N$), et les éléments de l'anneau avec des vecteurs colonnes, on obtient la situation d'algèbre linéaire traitée ci-après. Il faut souligner qu'en raison de la cardinalité binaire, nous avons ici $d = N = 2^n$.

4.3. Le projecteur de semis et les opérateurs à un argument

Comme indiqué ci-dessus, les symboles électifs représentent des opérateurs agissant sur une classe donnée d'objets (une sous-classe $P(U)$ de la classe univers U). Ainsi l'opérateur électif représenté par le chiffre 1 deviendra simplement l'opérateur d'identité pour la sous-classe considérée. En utilisant le cadre de l'algèbre linéaire, les opérateurs sont définis sur un espace vectoriel dont la dimension dépend du nombre d'arguments (l'arité) dans le système propositionnel.

Alors quels opérateurs peuvent représenter la sélection d'éléments hors d'une classe ? La réponse directe fournie par l'algèbre linéaire est que ces opérateurs sont les opérateurs de projection qui ont la propriété d'idempotence.

En considérant le cas d'objets appartenant à une seule classe, l'opérateur de projection correspondant $\mathbf{\Pi}$ de cette classe agira sur les vecteurs. Maintenant, quels sont les résultats attendus lors de l'application de ce projecteur ? Si un vecteur \vec{a} correspond exactement aux éléments de la classe, les équations matricielles suivantes seront vérifiées :

$$\mathbf{\Pi}_{(1)} \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{a} \qquad \mathbf{\Pi}_{(0)} \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} \qquad (28)$$

Les valeurs 0 et 1 sont les deux valeurs propres des deux projecteurs associés au vecteur propre \vec{a} . Comme avant, si des résultats interprétables sont à considérer en logique, les seuls nombres possibles pour ces valeurs propres sont 0 et 1.

1 sera obtenu pour les objets appartenant à la classe considérée et 0 pour les objets n'appartenant pas à elle. Dans le second cas on peut aussi définir le vecteur complément $\vec{\bar{a}}$.

La valeur propre *Vrai* (1) correspondra au vecteur propre \vec{a} , nommé $\vec{1}$, et la valeur propre *Faux* (0) correspondra au vecteur propre complément $\vec{\bar{a}}$ appelé $\vec{0}$.

Lorsque ces propriétés sont exprimées sous forme matricielle, les opérateurs de projection $\mathbf{\Pi}_{(1)}$ et $\mathbf{\Pi}_{(0)}$ sont des matrices carrées 2×2 et les vecteurs \vec{a} et $\vec{\bar{a}}$ sont des vecteurs colonnes orthonormés

à 2 dimensions :

$$\mathbf{\Pi}_{(1)} = \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Pi}_{(0)} = \mathbf{I}_2 - \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\vec{(a)} = \vec{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{(\bar{a})} = \vec{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Les deux projecteurs donnés dans l'équation (29) sont compléments et idempotents, cette dernière condition s'écrit :

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^2 = \mathbf{\Pi} \quad (31)$$

On peut alors construire les 4 opérateurs logiques correspondant aux 4 fonctions électives données dans le tableau 1 correspondant au cas à un seul argument $n = 1$. Les majuscules en gras sont utilisées ici pour représenter les opérateurs.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{I}_2 - \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Vrai} &= \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{Faux} &= \mathbf{0}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

\mathbf{A} est le *projecteur logique* et $\bar{\mathbf{A}}$ est son complément. L'opérateur \mathbf{Vrai} (tautologie) correspond ici à l'opérateur identité en 2 dimensions \mathbf{I}_2 . \mathbf{Faux} (contradiction) correspond ici à l'opérateur nul $\mathbf{0}_2$.

Remarquons que \mathbf{I}_2 et $\mathbf{0}_2$ sont aussi des opérateurs de projection (idempotents). Donc en général, pour un argument la forme matricielle de l'opérateur de projection correspondant à la fonction logique $f_i^{[1]}(x)$ donnée dans le tableau 1 est :

$$\mathbf{F}_i^{[1]} = f_i^{[1]}(0) \mathbf{\Pi}_{(0)} + f_i^{[1]}(1) \mathbf{\Pi}_{(1)} = \begin{pmatrix} f_i^{[1]}(0) & 0 \\ 0 & f_i^{[1]}(1) \end{pmatrix} \quad (33)$$

Cette équation représente la décomposition spectrale de l'opérateur et comme les valeurs propres sont réelles, l'opérateur logique est hermitien et peut donc être considéré comme une observable. Ainsi, en *logique propre* (eigenlogic), les valeurs de vérité de la proposition logique sont les valeurs propres de l'observable logique. Dans le cas très simple où 0 et 1 sont tous deux des valeurs propres non dégénérées, les opérateurs de projection relatifs à la base des vecteurs propres prennent la forme du projecteur logique \mathbf{A} et de son complément $\bar{\mathbf{A}}$.

Comme cela se fait en mécanique quantique, on peut trouver l'ensemble des opérateurs de projection qui représentent complètement le système, notamment en levant l'éventuelle dégénérescence des valeurs propres. Ici les valeurs propres sont toujours égales à 0 ou 1 et la question de la multiplicité des valeurs propres est naturelle. Ce dernier point est important dans le modèle, car non seulement les opérateurs de projection mutuellement exclusifs sont représentatifs d'un système logique, mais la *famille complète* des opérateurs de projection qui commutent (la famille logique) doit être utilisée afin de définir complètement le système logique. Lorsque ces propriétés sont exprimées en termes matriciels, cela signifie que le produit matriciel des observables logiques n'est pas nécessairement

égal à 0.

4.4. Extension à plus d'arguments

Comme vu ci-dessus lors de la représentation de la logique avec n arguments (n -arité) en utilisant des opérateurs de projection idempotents, diverses possibilités sont intrinsèquement présentes dans une structure unique avec 2^{2^n} opérateurs de projection différents. Une fois la base propre choisie, la structure restante est intrinsèque, donc indépendante de la base.

L'extension à plus d'arguments peut être obtenue en augmentant la dimension, cela se fait en utilisant le produit de Kronecker \otimes . C'est une procédure standard en algèbre linéaire justifiée car on peut montrer (petit théorème de Wedderburn [27]) que tout anneau à division finie (un anneau à division est l'analogie d'un corps qui ne nécessite pas de commutativité) est un produit direct de corps de Galois $\text{GF}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_p$ (p un nombre premier), dans le cas binaire considéré ici $p = 2$. Le produit direct devient explicitement le tenseur ou produit de Kronecker d'opérateurs linéaires.

Dans notre travail, l'application de cette méthode s'est inspirée à l'origine de la règle de composition des états quantiques, qui a aujourd'hui le statut de postulat en mécanique quantique [28], cette règle étant que le vecteur d'état quantique correspondant à la composition de deux systèmes quantiques représentés par deux sous-espaces dans l'espace de Hilbert est le produit de Kronecker des vecteurs d'état quantiques respectifs. Les opérateurs agissant dans l'espace combiné sont des combinaisons des opérateurs quantiques dans les sous-espaces respectifs. Le fait intéressant est que pour le cas combiné, de nouvelles structures apparaissent, dites non locales, qui ne peuvent pas être mises là comme de simples produits de Kronecker, mais qui sont des combinaisons linéaires de ceux-ci. On montrera que plusieurs opérateurs de projection présentés ci-après correspondant à des observables logiques ne sont pas simplement des produits de Kronecker d'opérateurs de projection élémentaires.

Dans ce qui suit, comme précédemment pour les fonctions logiques électives, des exposants indiqueront combien d'arguments (arité) interviennent dans le système propositionnel.

On peut vérifier que dans l'équation (32), tous les quatre opérateurs logiques sont effectivement idempotents et ils commutent. La correspondance du symbole électif x avec le projecteur élémentaire de *semis* $\mathbf{\Pi}$ sera utilisée dans la suite pour construire des opérateurs logiques d'arité supérieure.

Pour 2 arguments (arité $n = 2$), il faut 4 opérateurs projecteurs orthogonaux de rang 1 qui commutent pour exprimer le développement de la même manière que dans l'équation (10).

Certaines propriétés du produit de Kronecker sur les opérateurs de projection idempotents doivent être décrites.

- (i) Le produit de Kronecker de deux opérateurs de projection est aussi un opérateur de projection.
- (ii) Si les opérateurs de projection sont de rang 1 (une seule valeur propre est 1, toutes les autres sont 0), alors leur produit de Kronecker est également un opérateur de projection de rang 1.

En utilisant ces deux propriétés, les 4 projecteurs orthogonaux de rang 1 qui commutent couvrant l'espace vectoriel à 4 dimensions peuvent être calculés de manière simple :

$$\begin{aligned}
\Pi_{(0,0)}^{[2]} &= (\mathbf{I}_2 - \Pi) \otimes (\mathbf{I}_2 - \Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Pi_{(0,1)}^{[2]} &= (\mathbf{I}_2 - \Pi) \otimes \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Pi_{(1,0)}^{[2]} &= \Pi \otimes (\mathbf{I}_2 - \Pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \Pi_{(1,1)}^{[2]} &= \Pi \otimes \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (34)
\end{aligned}$$

Par la même procédure que dans l'équation (10), on peut écrire les opérateurs pour $n = 2$ arguments pour une fonction à deux arguments (voir le tableau 2) en utilisant les projecteurs donnés dans l'équation (34) :

$$\mathbf{F}_i^{[2]} = f_i^{[2]}(0,0) \Pi_{(0,0)}^{[2]} + f_i^{[2]}(0,1) \Pi_{(0,1)}^{[2]} + f_i^{[2]}(1,0) \Pi_{(1,0)}^{[2]} + f_i^{[2]}(1,1) \Pi_{(1,1)}^{[2]} \quad (35)$$

$$\mathbf{F}_i^{[2]} = \begin{pmatrix} f_i^{[2]}(0,0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_i^{[2]}(0,1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_i^{[2]}(1,0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_i^{[2]}(1,1) \end{pmatrix} \quad (36)$$

Les coefficients (cofacteurs) sont les valeurs de vérité de la fonction logique données dans le tableau 2.

Cette méthode peut être étendue à n'importe quel nombre d'arguments n en utilisant le même projecteur de semis Π et son complément $(\mathbf{I}_2 - \Pi)$.¹

4.5. Observables logiques pour deux arguments

Pour l'arité $n = 2$, les expressions polynomiales ont déjà été calculées dans le tableau 2, on peut donc écrire directement les opérateurs correspondants. Il faut exprimer les projecteurs logiques correspondant aux deux arguments $x = a$ et $y = b$ et ceci est donné à l'aide de l'équation (35) en considérant les valeurs de vérité des fonctions $f_{12}^{[2]}$ et $f_{10}^{[2]}$, ces opérateurs sont :

$$\mathbf{A}^{[2]} = \mathbf{F}_{12}^{[2]} = 1 \cdot \Pi_{(1,0)}^{[2]} + 1 \cdot \Pi_{(1,1)}^{[2]} = \Pi \otimes (\mathbf{I}_2 - \Pi) + \Pi \otimes \Pi = \Pi \otimes \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{B}^{[2]} = \mathbf{F}_{10}^{[2]} = 1 \cdot \Pi_{(0,1)}^{[2]} + 1 \cdot \Pi_{(1,1)}^{[2]} = (\mathbf{I}_2 - \Pi) \otimes \Pi + \Pi \otimes \Pi = \mathbf{I}_2 \otimes \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

¹ \mathbf{I}_2 ?

Voici quelques exemples : l'opérateur de conjonction pour $n = 2$ sera simplement le produit des deux projecteurs :

$$\mathbf{F}_{\text{AND}}^{[2]} = \mathbf{A}^{[2]} \cdot \mathbf{B}^{[2]} = (\mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{I}_2) \cdot (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{\Pi}) = \mathbf{\Pi} \otimes \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (39)$$

où la propriété suivante du produit de Kronecker a été utilisée : si \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} et \mathbf{S} sont des opérateurs alors :

$$(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) \cdot (\mathbf{R} \otimes \mathbf{S}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}) \quad (40)$$

L'opérateur de disjonction peut s'écrire directement, à l'aide de l'équation (15) :

$$\mathbf{F}_{\text{OR}}^{[2]} = \mathbf{A}^{[2]} + \mathbf{B}^{[2]} - \mathbf{A}^{[2]} \cdot \mathbf{B}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

La disjonction exclusive peut aussi s'écrire directement, à l'aide de l'équation (16) :

$$\mathbf{F}_{\text{XOR}}^{[2]} = \mathbf{A}^{[2]} + \mathbf{B}^{[2]} - 2\mathbf{A}^{[2]} \cdot \mathbf{B}^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

La négation s'obtient en soustrayant à l'opérateur d'identité (complémentation) donnant en général pour n arguments :

$$\bar{\mathbf{A}}^{[n]} = \mathbf{I}_{2^n} - \mathbf{A}^{[n]} \quad (43)$$

Cette équation peut être utilisée pour obtenir l'opérateur NAND :

$$\mathbf{F}_{\text{NAND}}^{[2]} = \mathbf{I}_4 - \mathbf{F}_{\text{AND}}^{[2]} = \mathbf{I}_4 - \mathbf{A}^{[2]} \cdot \mathbf{B}^{[2]} \quad (44)$$

En utilisant la loi de de Morgan :

$$\mathbf{F}_{\text{NOR}}^{[2]} = (\mathbf{I}_4 - \mathbf{A}^{[2]}) \cdot (\mathbf{I}_4 - \mathbf{B}^{[2]}) = \mathbf{I}_4 - \mathbf{A}^{[2]} - \mathbf{B}^{[2]} + \mathbf{A}^{[2]} \cdot \mathbf{B}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{\Pi}) \otimes (\mathbf{I}_2 - \mathbf{\Pi}) \quad (45)$$

L'implication matérielle est aussi directement obtenue en utilisant l'expression donnée dans le tableau 2 :

$$\mathbf{F}_{\Rightarrow}^{[2]} = \mathbf{I}_4 - \mathbf{A}^{[2]} + \mathbf{A}^{[2]} \cdot \mathbf{B}^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_4 - (\mathbf{\Pi}) \otimes (\mathbf{I}_2 - \mathbf{\Pi}) \quad (46)$$

Le tableau 3 donne les formes d'opérateurs logiques pour les 16 connecteurs logiques à deux arguments.

connecteur pour les booléens A, B	forme de l'opérateur diagonal $diag(\text{valeurs de vrit})$	observable logique $F_i^{[2]}$ forme arguments A, B	observable logique $F_i^{[2]}$ forme opérateur semis Π
Faux F	$diag(0, 0, 0, 0)$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
NOR ; $\overline{A \vee B}$	$diag(1, 0, 0, 0)$	$\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$(\mathbf{I} - \Pi) \otimes (\mathbf{I} - \Pi)$
$A \neq 1B$	$diag(0, 1, 0, 0)$	$\mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\Pi \otimes (\mathbf{I} - \Pi)$
\overline{A}	$diag(1, 1, 0, 0)$	$\mathbf{I} - \mathbf{A}$	$\mathbf{I} - (\Pi \otimes \mathbf{I})$
$A \neq B$	$diag(0, 0, 1, 0)$	$\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$(\mathbf{I} - \Pi) \otimes \Pi$
\overline{B}	$diag(1, 0, 1, 0)$	$\mathbf{I} - \mathbf{B}$	$\mathbf{I} - (\mathbf{I} \otimes \Pi)$
$A \oplus B$	$diag(0, 1, 1, 0)$	$\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\Pi \otimes (\mathbf{I} - \Pi) + (\mathbf{I} - \Pi) \otimes \Pi$
NAND ; $\overline{A \wedge B}$	$diag(1, 1, 1, 0)$	$\mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\mathbf{I} - (\Pi \otimes \Pi)$
AND ; $A \wedge B$	$diag(0, 0, 0, 1)$	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\Pi \otimes \Pi$
$A \equiv B$	$diag(1, 0, 0, 1)$	$\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\Pi \otimes \Pi + (\mathbf{I} - \Pi) \otimes (\mathbf{I} - \Pi)$
B	$diag(0, 1, 0, 1)$	\mathbf{B}	$\mathbf{I} \otimes \Pi$
$A \Rightarrow B$	$diag(1, 1, 0, 1)$	$\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\mathbf{I} - [(\mathbf{I} - \Pi) \otimes \Pi]$
A	$diag(0, 0, 1, 1)$	\mathbf{A}	$\Pi \otimes \mathbf{I}$
$A \Leftarrow B$	$diag(1, 0, 1, 1)$	$\mathbf{I} - \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\mathbf{I} - [\Pi \otimes (\mathbf{I} - \Pi)]$
OR ; $A \vee B$	$diag(0, 1, 1, 1)$	$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	$\mathbf{I} - [(\mathbf{I} - \Pi) \otimes (\mathbf{I} - \Pi)]$
Vrai V	$diag(1, 1, 1, 1)$	\mathbf{I}	\mathbf{I}

Table 3: Les seize connecteurs à deux arguments et leurs observables logiques propres respectives

4.6. Observables logiques pour trois arguments

Pour une arité $n = 3$, on peut générer 8 projecteurs orthogonaux de rang 1 à 8 dimensions, par exemple deux d'entre eux sont donnés par

$$\Pi_{(1,1,1)}^{[3]} = \Pi \otimes \Pi \otimes \Pi \quad \Pi_{(0,1,0)}^{[3]} = (\mathbf{I}_2 - \Pi) \otimes \Pi \otimes (\mathbf{I}_2 - \Pi) \quad (47)$$

et pour les projecteurs logiques on a :

$$\mathbf{A}^{[3]} = \Pi \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{B}^{[3]} = \mathbf{I}_2 \otimes \Pi \otimes \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{C}^{[3]} = \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \otimes \Pi \quad (48)$$

Pour l'arité $n = 3$, la conjonction AND devient alors carrément :

$$\mathbf{F}_{\text{AND}}^{[3]} = \mathbf{A}^{[3]} \cdot \mathbf{B}^{[3]} \cdot \mathbf{C}^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

Pour l'arité $n = 3$, l'opérateur majoritaire MAJ sera une matrice 8×8 , son expression peut s'écrire directement à l'aide de l'équation (22) et de l'équation (48) :

$$\mathbf{F}_{\text{MAJ}}^{[3]} = \mathbf{A}^{[3]} \cdot \mathbf{B}^{[3]} + \mathbf{A}^{[3]} \cdot \mathbf{C}^{[3]} + \mathbf{B}^{[3]} \cdot \mathbf{C}^{[3]} - 2\mathbf{A}^{[3]} \cdot \mathbf{B}^{[3]} \cdot \mathbf{C}^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

4.7. Opérateurs de sélection

La méthode pour sélectionner les valeurs propres est similaire à celle pour les fonctions électives données dans l'équation (11). Comme les projecteurs de type $\mathbf{\Pi}_{(a,b,c,\dots)}^{[n]}$ sont des projecteurs de rang 1, le produit (matriciel) avec n'importe quel autre opérateur de projection qui commute (par exemple l'opérateur logique $\mathbf{F}_i^{[n]}$) donnera aussi un projecteur de rang 1 et plus précisément, ce sera le même projecteur multiplié par la valeur propre. Donc pour n'importe quel opérateur logique $\mathbf{F}_i^{[n]}$ de la famille considérée, on a :

$$\mathbf{F}_i^{[n]} \cdot \mathbf{\Pi}_{(a,b,c,\dots)}^{[n]} = f_i^{[n]}(a, b, c, \dots) \mathbf{\Pi}_{(a,b,c,\dots)}^{[n]} \quad (51)$$

Du côté droit de l'équation (51), la valeur de vérité est multipliée par le projecteur de rang 1 correspondant.

Pour obtenir explicitement la valeur propre, on peut prendre la trace du produit des deux opérateurs à gauche de l'équation (51). On obtient ainsi la valeur de vérité $f_i^{[n]}(a, b, c, \dots)$ correspondant à un cas de combinaison fixe des valeurs $(a, b, c, \dots)^{[n]}$ des arguments logiques (une *interprétation*).

La méthode de sélection des valeurs propres est similaire à celle des fonctions électives donnée dans l'équation (11). Comme les projecteurs de type $\mathbf{\Pi}_{(a,b,c,\dots)}^{[n]}$ sont des projecteurs de rang 1, le produit (matriciel) avec n'importe quel autre projecteur (par exemple, l'opérateur logique $\mathbf{F}_i^{[n]}$) donnera aussi un projecteur de rang 1 et plus précisément, ce sera le même projecteur multiplié par la valeur propre. Donc pour n'importe quel opérateur $\mathbf{F}_i^{[n]}$ de la famille considérée, la valeur de vérité est multipliée par le projecteur de rang 1 correspondant.

5. Vecteurs propres, valeurs propres et valeurs de vérité

En commençant par le projecteur bidimensionnel de rang 1 $\mathbf{\Pi}$ pour le cas à un argument, les vecteurs $\overrightarrow{(0)}$ et $\overrightarrow{(1)}$ sont des vecteurs orthonormés bidimensionnels comme indiqué dans les équations (30).

Le choix de la position de la valeur 1 dans la colonne suit la convention d'information quantique pour un "qubit-1" [28]. La notation bra-ket de Dirac $|\psi\rangle$ pour représenter les vecteurs en mécanique quantique (i.e. on aurait eu ici : $|0\rangle \equiv \overrightarrow{(0)}$ et $|1\rangle \equiv \overrightarrow{(1)}$) n'a pas été utilisée exprès pour montrer

que cette méthode ne se limite pas aux problèmes liés à la physique quantique.

Pour le cas à deux arguments $n = 2$, les vecteurs auront la dimension $2^{n=2} = 4$ et la famille complète de 16 opérateurs de projection qui commutent représentera toutes les propositions logiques possibles et sera interprétable lorsqu'elle sera appliquée aux quatre vecteurs propres orthonormés possibles de cette famille qui forment la base canonique complète. Ces vecteurs seront représentés par la notation symbolique $\overrightarrow{(a, b)}$, où les arguments a, b prennent les valeurs $\{0, 1\}$ et représentent l'un des quatre cas possibles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(0, 0)} &= \overrightarrow{(0)} \otimes \overrightarrow{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \overrightarrow{(0, 1)} &= (0) \otimes \overrightarrow{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{(1, 0)} &= \overrightarrow{(1)} \otimes \overrightarrow{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \overrightarrow{(1, 1)} &= \overrightarrow{(1)} \otimes \overrightarrow{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

Lors de l'application des opérateurs de projection logique sur ces vecteurs, la valeur propre résultante est la valeur de vérité de la proposition logique correspondante, ce qui signifie que les opérations sur l'espace propre d'une famille observable logique sont interprétables. Par exemple, pour $n = 2$ arguments, la famille complète de 16 observables logiques commutantes représente tous les connecteurs logiques possibles et les opérations sont interprétables lorsqu'elles sont appliquées à l'un des quatre vecteurs propres canoniques possibles de la famille. Ces vecteurs, correspondant à toutes les interprétations possibles, sont représentés par la base des vecteurs $\overrightarrow{(0, 0)}$, $\overrightarrow{(0, 1)}$, $\overrightarrow{(1, 0)}$ et $\overrightarrow{(1, 1)}$ formant une base orthonormée complète.

Que se passe-t-il maintenant lorsque le vecteur d'état n'est pas l'un des vecteurs propres du système logique ? On peut toujours exprimer un vecteur normalisé comme une décomposition sur une base orthonormée complète. En particulier on peut l'exprimer sur la base propre canonique de la famille observable logique. Pour deux arguments, ce vecteur peut s'écrire :

$$\overrightarrow{(\phi)} = C_{00} \overrightarrow{(0, 0)} + C_{01} \overrightarrow{(0, 1)} + C_{10} \overrightarrow{(1, 0)} + C_{11} \overrightarrow{(1, 1)}$$

Lorsqu'un seul des coefficients est non nul (dans ce cas sa valeur absolue doit prendre la valeur 1) alors on se retrouve dans la situation précédente d'une interprétation déterminée (cas propositionnel atomique à entrée déterminée). Mais lorsque plus d'un coefficient est non nul, on est dans un cas "mixte" ou "flou". Un tel état peut être considéré comme une superposition cohérente d'interprétations. Cela peut conduire à un traitement de logique floue comme cela a été proposé dans [11], la logique floue traite des valeurs de vérité qui peuvent être n'importe quel nombre entre 0 et 1, ici la vérité d'une proposition peut être comprise entre complètement vraie et complètement fausse.

Une remarque importante est que le choix de la base propre n'est pas fixe, ce qui signifie que pour chaque choix, il y a une famille complète d'opérateurs de projection logique, donc comme

indiqué ci-dessus, on pourrait imaginer travailler avec deux (ou plusieurs) systèmes logiques caractérisés chacun par leur famille d'opérateurs projectifs. Les opérateurs d'une famille ne commutent (généralement) pas avec les opérateurs d'une autre famille. Cette propriété de non-commutativité a son analogue dans le traitement mécanique quantique général. Sans étendre davantage cet argument, on voit la potentialité de considérer ce type d'approche en gardant à l'esprit qu'en algèbre linéaire, le changement de base est obtenu au moyen d'opérateurs unitaires et que c'est un peu au cœur du calcul quantique où toutes les opérations logiques sont effectuées au moyen de transformations unitaires et par mesures à l'aide d'opérateurs de projection.

6. Propriétés de la logique propre

Pour résumer, tous les opérateurs de projection logique ont les propriétés suivantes en logique propre (eigenlogic).

1. La dimension de l'espace vectoriel couvert par les opérateurs logiques est $d_n = 2^n$. Tous les opérateurs de projection logique de la même famille sont des matrices carrées $d_n \times d_n$.
2. Tous les opérateurs logiques sont des opérateurs de projection idempotents (voir (31)). Cela signifie que dans la base propre logique de la famille, les matrices sont diagonales avec des valeurs propres qui valent soit 0 soit 1.
3. Tous les opérateurs logiques de projection d'une famille donnée commutent deux à deux. Cela signifie que toutes les matrices respectives sont diagonales sur la base propre logique de la famille.
4. Les opérateurs de projection logique ne sont pas nécessairement orthogonaux. Cela signifie que le produit matriciel de deux opérateurs logiques n'est pas nécessairement l'opérateur nul.
5. Le nombre d'opérateurs de projection logique différents d'une famille donnée est de 2^{2^n} , représentant un système complet de propositions logiques. Ce nombre correspond au nombre de matrices diagonales différentes qui commutent, obtenues pour toutes les combinaisons de 0 et de 1 sur la diagonale des matrices.
6. Pour chaque famille, il existe 2^n opérateurs de projection orthogonale de rang 1 couvrant tout l'espace vectoriel. Les matrices correspondantes auront une seule valeur propre égale à 1, les autres valeurs propres étant égales à 0.
7. Tout opérateur logique peut être exprimé comme une décomposition élective en utilisant les 2^n opérateurs de projection orthogonale de rang 1, où les coefficients de la décomposition ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1 (voir éq. (35) pour $n = 2$).
8. Tout projecteur de rang 1 de la famille peut être obtenu au moyen du produit de Kronecker, le projecteur de semis $\mathbf{\Pi}$ et son complément $(\mathbf{I}_2 - \mathbf{\Pi})$ (voir éq. (29), éq. (34) et éq. (47)).
9. La négation d'un opérateur logique, qui est son complément, s'obtient en soustrayant l'opérateur de l'opérateur d'identité (voir éq. (43)).
10. Les vecteurs propres de la famille des opérateurs logiques de projection d'arité n qui commutent forment une base complète orthonormée de dimension $d_n = 2^n$. Cette base correspond à la

base canonique et chaque vecteur propre correspond à une certaine combinaison d'arguments logiques, appelée une *interprétation*, du système propositionnel logique.

11. Les valeurs propres des opérateurs logiques sont les valeurs de vérité de la proposition logique respective et chaque valeur propre est associée à un vecteur propre donné correspondant à une interprétation de la proposition atomique en entrée.
12. La valeur de vérité d'un opérateur logique donné pour une interprétation donnée de n arguments peut être obtenue en utilisant l'équation (51).

7. Discussion et travaux connexes

Les tentatives de lier la géométrie à la logique sont très nombreuses et remontent aux premiers efforts de formalisation de la logique. Les plus célèbres sont par exemple le carré des oppositions d'Aristote pour les 4 propositions catégorielles (sujet-copule-prédicat), les diagrammes de Leonhard Euler (1707-1783) illustrant les propositions et les quantificateurs (tous, non, certains,...), les diagrammes de C. L. Dodgson (alias Lewis Carroll 1832-1898), des diagrammes recherchant la symétrie du vrai et du faux ayant une ressemblance frappante avec les cartes de Karnaugh modernes, et bien sûr les méthodes développées par John Venn [15] qui ont été évoquées plus haut.

Dans les méthodes de conception logique modernes, les tables de vérité, les cartes de Karnaugh, les hypercubes, les réseaux logiques et à seuil, les arbres de décision et les graphes de diagrammes sont largement utilisés pour représenter les structures de données booléennes [18]. La réduction logique basée sur la symétrie est un sujet très important qui utilise les diagrammes de Hesse, les développements de Shannon et Davio et les théorèmes de Post sur les symétries des fonctions booléennes. La vectorisation est également une procédure standard en logique utilisant par exemple des *vecteurs de vérité* et des *vecteurs porteurs* (vecteurs de vérité réduits de fonctions booléennes symétriques).

Dans ce qui suit sont brièvement citées des recherches récentes qui ont surgi au cours de cette enquête et qui soutiennent l'approche basée sur l'algèbre linéaire présentée dans cet article.

En commençant par *Matrix Logic* développé par August Stern [29] qui donne directement une formulation matricielle des opérateurs logiques, en mettant les valeurs de vérité sous forme de coefficients matriciels, à la manière des diagrammes de Karnaugh. Ainsi, par exemple, une fonction logique à deux arguments devient une matrice 2×2 , c'est une différence fondamentale par rapport à la méthode donnée ci-dessus où des matrices 4×4 sont utilisées. Utilisant des produits scalaires sur des vecteurs et des valeurs moyennes sur des opérateurs, ce formalisme donne une méthode pour résoudre des équations logiques et permet d'agrandir l'alphabet des valeurs de vérité avec des antivaleurs en logique négative.

Une percée a sans aucun doute été faite par *Vector Logic* développé par Eduardo Mizraji [30]. Cette approche vectorise la logique où les valeurs de vérité sont envoyées par des applications sur des vecteurs orthonormés. Techniquement, cette approche est différente de celle présentée dans cet article car les opérateurs résultants pour 2 arguments sont représentés par des matrices 2×4 et ne représentent pas des opérateurs de projection. La logique vectorielle peut également gérer la

logique à trois valeurs et des applications ont été proposées pour les réseaux de neurones.

Un développement très pertinent, proche de l’approche de cet article, a été fait par Vannet Aggarwal et Robert Calderbank [31] dans le cadre de la théorie quantique du codage d’erreurs, leur travail a également été justifié par la formulation *Projection Logic* de David Cohen [33]. Dans leur méthode, ils relient la logique booléenne à des opérateurs de projection issus initialement du groupe Heisenberg-Weyl. Ils associent la dimension du projecteur considéré au poids de Hamming (nombre de 1 dans la table de vérité) de la fonction booléenne correspondante. Les opérateurs logiques qu’ils obtiennent sont des projecteurs qui commutent, comme dans le travail présenté ici.

L’idée de lier logique et algèbre linéaire devient également naturelle du fait de l’effort de recherche dû à la promesse que la théorie quantique peut apporter à des domaines extérieurs à la physique, principalement à l’informatique. Bien sûr, il faut considérer la quête de l’ordinateur quantique, mais aussi les développements plus récents dans d’autres domaines de recherche tels que la recherche d’informations sur le web sémantique [34, 35] et l’apprentissage automatique [36].

Toutes ces méthodes reposent sur des méthodes d’algèbre linéaire utilisant des vecteurs et des opérateurs dans l’espace de Hilbert.

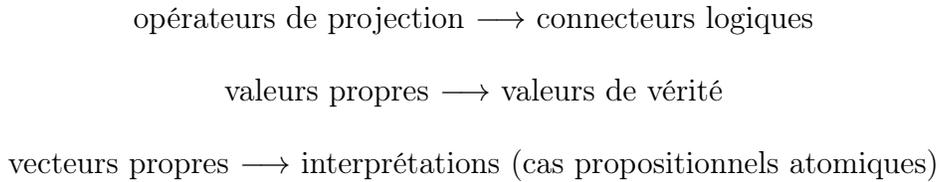
Récemment le concept de *prédicat quantique* introduit par E. d’Hondt et P. Panangaden [37] propose une interprétation similaire à celle présentée ici. Comme l’a déclaré Mingsheng Ying dans [38] : “Dans la logique classique, les prédicats sont utilisés pour décrire les propriétés des individus ou des systèmes... alors qu’est-ce qu’un prédicat quantique ? ; ... un prédicat quantique est défini comme une observable physique représentée par un opérateur hermitien avec des valeurs propres dans l’intervalle unitaire”.

8. Conclusion et perspectives

Dans la formulation donnée ici, une méthode plus générale est proposée, permettant la construction de projecteurs logiques à partir d’un seul opérateur de projection semis utilisant le produit de Kronecker. La formulation est aussi plus simple car l’interprétation élective de la logique de George Boole montre que la propriété d’idempotence (3) et (4) en association avec la distributivité (1) et la commutativité (2) permet d’identifier directement les opérateurs de projection qui commutent avec les fonctions logiques.

La formulation de la logique présentée ici est appelée logique propre (*eigenlogic*), elle utilise des opérateurs en algèbre linéaire comme propositions et elle est liée à la formulation de l’algèbre symbolique élective de George Boole dans [1]. Cette similitude est frappante et c’est plus qu’une simple analogie, comme justifié ci-dessus, car au cœur de la formalisation se trouve la propriété d’idempotence. Les opérateurs logiques appartiennent à des familles d’opérateurs de projection qui commutent. La caractéristique intéressante est que les valeurs propres de ces opérateurs sont les valeurs de vérité des connecteurs logiques, leurs vecteurs propres associés correspondant à l’une des combinaisons fixes des entrées (interprétations). Le résultat d’une “mesure” ou d’une “observation” sur une observable logique donnera la valeur de vérité de la proposition logique qui lui est associée, et elle devient “interprétable” lorsqu’elle est appliquée à son espace propre, ce qui conduit à une

analogie naturelle avec le postulat de mesure en mécanique quantique. Le schéma suivant résume ce point de vue :



Quelques précisions doivent être apportées concernant la dernière ligne du schéma, le mot interprétation s’entend au sens logique : une interprétation est une affectation de valeurs de vérité pour chaque proposition atomique qui apparaît dans une *formule bien formée*. Une *formule bien formée* étant une formule complexe contenant exclusivement des connecteurs logiques. Cela signifie que l’ensemble des propositions atomiques peut avoir différentes interprétations, celles conduisant à la *satisfaction* d’une proposition logique (une proposition est satisfaite lorsqu’elle est vraie) sont appelées les *modèles* (n.b. parfois le mot modèle est utilisé plus généralement comme synonyme du mot interprétation).

Une justification théorique et un lien avec la mécanique quantique peuvent également être trouvés chez Pierre Cartier [39], relatant le lien entre l’algèbre des propositions logiques et l’ensemble de toutes les valuations sur celle-ci, il écrit : “... dans la *théorie des modèles* en logique, un modèle d’un ensemble de propositions a pour effet de valider certaines propositions. A chaque proposition logique on peut associer par dualité l’ensemble de toutes ses vraies valuations représentées par le nombre 1. Cette correspondance permet d’interpréter l’algèbre des propositions comme une classe de sous-ensembles, la conjonction et la disjonction devenant respectivement l’intersection et l’union des ensembles. Cela correspond à la *dualité de Stone* prouvée par le théorème de représentation de Stone et est l’un des succès spectaculaires des mathématiques du XX^e siècle. Le développement de la théorie quantique a conduit au concept d’état quantique, qui peut être compris comme une nouvelle incarnation de la notion d’évaluation”. L’idée n’est pas nouvelle, comme cela a été discuté auparavant et dans [27], et découle de la proposition de John Von Neumann de “projections as propositions” dans [26] qui a ensuite été formalisée en logique quantique par Garret Birkhoff dans [25].

Concernant la première ligne du schéma, on peut généraliser aux valeurs propres différentes du couple $\{0, 1\}$ associé aux opérateurs de projection, par exemple en utilisant le couple $\{+1, -1\}$ associé aux opérateurs unitaires auto-inverses, ceci a été fait dans [11], en général on peut associer un opérateur logique binaire à n’importe quel couple de valeurs propres $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ dont la famille d’opérateurs logiques correspondants peut être trouvée par les méthodes d’interpolation matricielle proposées dans [40].

En logique propositionnelle, les arguments d’une proposition logique composée sont les propositions atomiques, en logique propre (eigenlogic), ce sont ce que nous avons nommé les *opérateurs logiques projecteurs* (aussi parfois nommés *dictateurs* en logique [11, 32]). Des exemples sont le projecteur logique à un argument \mathbf{A} dans l’équation (32) ; les deux projecteurs logiques à deux arguments $\mathbf{A}^{[2]}$ et $\mathbf{B}^{[2]}$ dans les équations (37,38) ; les trois projecteurs logiques à trois arguments $\mathbf{A}^{[3]}$, $\mathbf{B}^{[3]}$

et $\mathcal{C}^{[3]}$ dans l'équation (48) et ainsi de suite pour une arité plus élevée.

C'est une différence fondamentale avec ce qui est habituellement considéré en logique quantique (pour une définition des propositions atomiques en logique quantique voir par exemple [27] p. 98) où les propositions atomiques sont associées à des rayons c'est-à-dire des matrices quantiques de densité d'états purs. En logique propre (eigenlogic) la conjonction connective logique (AND \wedge), non atomique, est représentée par un rayon (opérateur de projection de rang 1), voir équations (39) et (49), les autres $n - 1$ rayons s'obtiennent simplement en complémentant sélectivement les arguments de la conjonction. En général, ici, les rayons correspondent à des produits de Kronecker d'opérateurs de projection générateurs (opérateur de projection semis), voir les équations (34) et (47) et sont non atomiques (sauf dans le cas d'un argument : $n = 1$). Du point de vue de la logique, les propositions atomiques doivent être des propositions indépendantes et cela ne peut être réalisé qu'avec la formulation donnée par (37) et (38) et non par des opérateurs de projection mutuellement exclusifs, tels que les opérateurs de projection de rang 1 qui ne sont donc pas indépendants. Ainsi en logique propre (eigenlogic), les propositions atomiques ne sont pas des rayons lorsque l'on considère des connecteurs à plus d'un argument ($n \geq 2$).

Dans ce travail, des familles logiques complètes d'opérateurs de projection qui commutent correspondent à des propositions compatibles, c'est aussi une différence avec la logique quantique. Comme mentionné par David W. Cohen (p. 37 [33]) "Une logique quantique est une logique avec au moins deux propositions qui ne sont pas compatibles". Dans les recherches futures, l'interaction des observables logiques qui n'appartiennent pas à la même famille logique compatible d'observables qui commutent sera considérée, cela pourrait apporter des informations pour la logique quantique et le calcul quantique et permettre d'aborder le sujet important de la non-contextualité quantique.

Une approche algorithmique pour les connecteurs logiques avec un grand nombre d'arguments pourrait être intéressante à développer en utilisant les observables de la logique propre (eigenlogic) dans des espaces vectoriels de grande dimension. Mais comme l'espace grandit très rapidement, il peut ne pas être particulièrement utile pour une mise en œuvre pratique sans réduction logique. Il serait intéressant de développer des méthodes spécifiques de réduction algébrique d'observables logiques inspirées de la recherche actuelle dans le domaine. Pour une bonne synthèse de l'état de l'art, voir par exemple [18].

Des applications dans le domaine de la recherche d'information pour des applications en web sémantique semblent possibles. La communauté Quantum Interaction à travers des conférences annuelles promeut les liens entre la mécanique quantique et des domaines extérieurs à la physique avec de nombreuses applications en sciences sociales [41]. Les méthodes sont basées sur l'exploitation du formalisme mathématique, fondamentalement l'algèbre linéaire dans l'espace de Hilbert, de la mécanique quantique [34] combiné avec les aspects particuliers des postulats quantiques. Des applications se trouvent dans les théories sémantiques modernes telles que la sémantique distributionnelle ou dans les modèles connexionnistes de la cognition [42].

Plus généralement, nous pensons que cette vision de la logique pourrait apporter un éclairage sur des questions plus fondamentales. Les fonctions booléennes sont aujourd'hui considérées comme une "boîte à outils" pour résoudre de nombreux problèmes en informatique théorique, en théorie de

l'information et même en mathématiques fondamentales. De même, la logique propre (eigenlogic) peut être considérée comme une nouvelle "boîte à outils".

9. Remerciements

Je tiens à remercier mon collègue et ami François Dubois, mathématicien du CNAM Paris (FR), avec qui j'ai une collaboration continue sur la modélisation quantique et à qui est due l'idée d'utiliser les méthodes d'interpolation classique pour les développements logiques, qui ont été appliqués pour les logiques multivaluées dans [11]. Je suis également très reconnaissant à Francesco Galofaro, Sémioticien du Politecnico di Milano (IT) et de l'Université libre de Bolzano (IT) pour ses conseils pertinents sur la sémantique et la logique des idées qui sont introduites reliant l'informatique quantique, la récupération d'information et la sémantique. Je veux aussi associer mon collègue Bich-Lien Doyen de Centrale-Supélec et du LRI (Laboratoire de Recherche en Informatique) pour être à l'origine de certaines de ces recherches pluridisciplinaires.

J'ai beaucoup apprécié les retours de la communauté Quantum Interaction pour le travail de ces dernières années ([11,35]), les aspects historiques du travail présenté ici ont été exposés lors de la conférence QI-2016 à San Francisco et je tiens à remercier les organisateurs et le personnel du comité technique en particulier José Acacio da Barros de l'Université d'État de San Francisco (CA, USA) et Ehtibar Dzhafarov de l'Université Purdue (IN, USA). Dans cette communauté, j'ai apprécié les discussions fructueuses avec Peter Bruza de QUT (Brisbane, AUS), Emmanuel Haven et Sandro Sozzo de l'Université de Leicester (Royaume-Uni), Andrei Khrennikov de l'Université Linnaeus (SWE), Dominic Widdows de Microsoft Bing Bellevue (WA, USA), Trevor Cohen de l'Université du Texas à Houston (TX, USA), Peter Wittek de l'ICFO de Barcelone (ESP) et enfin Keith van Rijsbergen de l'Université de Glasgow (Royaume-Uni) qui fut peut-être à l'origine de cette recherche à cause de son commentaire à l'issue de la conférence QI-2012 à Paris sur le fait que George Boole avait déjà des idées géométriques sur la représentation des fonctions logiques, en particulier la négation, dans un espace vectoriel...

Je tiens à remercier l'examineur du premier article que j'ai soumis dans un journal pour son analyse approfondie de ce travail et pour avoir apporté des critiques très constructives à l'œuvre originale de George Boole, plusieurs de ses remarques ont été introduites dans cette version. Et enfin je tiens à remercier Stanley Burris de l'Université de Waterloo (CAN) avec qui j'ai eu une correspondance et qui a souligné la contribution de Theodore Hailperin, beaucoup de ses remarques ont été incluses ici.

Références

- [1] George Boole, "The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay To a Calculus of Deductive Reasoning", (1847), (réédité Ed. Forgotten Books ISBN 978-1444006642-9).
- [2] George Boole, "An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities", Macmillan (1854) (réédité par Cambridge University Press, 2009 ; ISBN 978-1-108-00153-3).

- [3] Maria Panteki, “The Mathematical Background of George Boole’s Mathematical Analysis of Logic (1847)”, J. Gasser (ed.), *A Boole Anthology*, 167-212, Kluwer Academic Publishers, (2000).
- [4] Theodore Hailperin, “Boole’s Logic and Probability, a Critical Exposition from the Standpoint of Contemporary Logic and Probability Theory”, North Holland, (1976) II ed. (1986).
- [5] Theodore Hailperin, “Boole’s Algebra isn’t Boolean Algebra. A Description Using Modern Algebra, of What Boole Really Did Create”, *Mathematics Magazine* 54(4) : 172-184 (1981). Réimprimé dans *A Boole Anthology* ed. James Gasser. Volume de synthèse 291, Springer-Verlag. (2000).
- [6] Charles Sanders Peirce, “On the Algebra of Logic : A Contribution to the Philosophy of Notation”, *American Journal of Mathematics*, Volume 7, (1885).
- [7] Emil Post, “Introduction to a General theory of Elementary Propositions”, *American Journal of Mathematics* 43 : 163-185, (1921).
- [8] Ludwig Wittgenstein, “Logisch-Philosophische Abhandlung”, *Annalen der Naturphilosophie*, Ed. Wilhelm Ostwald, Wien (1921), “*Tractatus Logico-Philosophicus*”, traduit et publié en édition bilingue, Routledge & Kegan Paul, London, (1922).
- [9] Karl Menger, “Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium” (1942), éditeurs : L. Golland, B.F. McGuinness, Sklar, Ap.be - Springer (1994).
- [10] John Corcoran, “Aristotle’s Prior Analytics and Boole’s Laws of Thought”, *History and Philosophy of Logic*, 24, pp. 261-288. (2003).
- [11] François Dubois, Zeno Toffano, “Eigenlogic : a Quantum View for Multiple-Valued and Fuzzy Systems”, *Quantum Interaction. QI 2016. Lecture Notes in Computer Science*, vol 10106. Springer, pp. 239-251, 2017, <https://arxiv.org/pdf/1607.03509.pdf>.
- [12] Donald E. Knuth, “The Art of Computer Programming”, Volume 4, Fascicle 0 : Introduction to Combinatorial Algorithms and Boolean Functions, Ed. Addison-Wesley Professional, (2009).(1847)
- [13] Stanley Burris, (2000). “The Laws of Boole’s Thought”. Mdictatoranuscript (<https://www.math.uwaterloo.ca/~snburris/htdocs/LT15CHAPS.pdf>) (2000), and private correspondence.
- [14] Edward V. Huntington, “Sets of independent postulates for the algebra of logic”. *Trans. AMS* 5:288-309 (1904).
- [15] John Venn, “*Symbolic Logic*”, London : Macmillan and Company, ISBE. D’Hondt and P. Panangaden 1-4212-6044-1. (1881).
- [16] Schroder, E., “*Vorlesungen über die Algebra der Logik*”, Vol. I, Anh. 6, B.G. Teubner, Leipzig. (1890)
- [17] Hassler Whitney, “Characteristic functions and the algebra of logic” in *Annals of Mathematics* 34 (1933), pp. 40-414.
- [18] Svetlana N. Yanushkevich, Shmerko, V.P. : “*Introduction to Logic Design*”. CRC Press (2008).
- [19] Howard H. Aiken, “*Synthesis of electronic computing and control circuits*” Ann. Computation Laboratory of Harvard University, XXVII, Harvard University, Cambridge, MA, (1951).
- [20] Shannon, C. E. “A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits”. *Trans. AIEE*. 57 (12) : 713-723. (1938).

- [21] Marshall H. Stone, “Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis”, p. 70 : “Projections”. (1932)
- [22] Marshall H. Stone. “The theory of representation for Boolean algebras”. Transactions of the American Mathematical Society, 40(1):37-111, Jul. (1936)
- [23] Marshall H. Stone. “Applications of the theory of Boolean rings to general topology”. Transactions of the American Mathematical Society, 41(3):375-481, May (1937)
- [24] Dirk Schlimm, “Bridging Theories with Axioms : Boole, Stone, and Tarski”, New Perspectives on Mathematical Practices, World Scientific pp. 222-235, (2009)
- [25] Garret Birkhoff, John von Neumann : “The Logic of Quantum Mechanics”. The Annals of Mathematics, 2nd Ser., 37 (4), 823-843 (1936)
- [26] John von Neumann, “Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften”, volume Bd. 38. (Springer, Berlin, 1932) 106. “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics”. Investigations in Physics, vol. 2. (Princeton University Press, Princeton, 1955)
- [27] François David, “The Formalisms of Quantum Mechanics, An Introduction”, Springer Lecture Notes in Physics, ISBN 978-3-319-10538-3, (2015)
- [28] Nielsen, M.A., Chuang, I.L. : Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press (2000)
- [29] August Stern, “Matrix logic”, North-Holland, (1988).
- [30] Eduardo Mizraji, “Vector logics : the matrix-vector representation of logical calculus”. Fuzzy Sets and Systems, 50, 179-185, (1992).
- [31] Vaneet Aggarwal and Robert Calderbank, “Boolean functions, projection operators, and quantum error correcting codes,” in Proc. Int. Symp. Inf. Theory, Nice, France, pp. 2091-2095, (2007).
- [32] Ryan O’Donnell, “Analysis of Boolean Functions”, Cambridge University Press, 2014.
- [33] David W. Cohen, “An introduction to Hilbert space and quantum logic,” Springer-Verlag, (1989).
- [34] Keith van Rijsbergen, “The Geometry of Information Retrieval”, Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [35] Barros, J., Toffano, Z., Meguebli, Y., Doan, B.-L., “Contextual query using bell tests”, In : Atmanspacher, H., Haven, E., Kitto, K., Raine, D. (eds.) QI 2013. LNCS, vol. 8369, pp. 110-121. Springer, Heidelberg (2014). doi:10.1007/ 978-3-642-54943-4 10
- [36] Peter Wittek, “Quantum Machine Learning. What Quantum Computing Means to Data Mining”, Academic Press Elsevier, Amsterdam, 2014
- [37] E. D’Hondt and P. Panangaden, “Quantum weakest preconditions”. Mathematical Structures in Computer Science, 16, pp. 429-451,(2006).
- [38] Ying, M.S., “Foundations of Quantum Programming”, Morgan Kaufmann, (2016).
- [39] Pierre Cartier, “A mad day’s work : from Grothendieck to Connes and Kontsevich The evolution of concepts of space and symmetry”, Journal : Bull. Amer. Math. Soc. 38 (2001), 389-408.

- [40] Zeno Toffano and François Dubois : “Interpolation Methods for Binary and Multivalued Logical Quantum Gate Synthesis”, presented at TQC2017, Paris, France, June 14-16, 2017, <https://arxiv.org/pdf/1703.10788.pdf>
- [41] Emmanuel Haven, Andrei Khrennikov, “Quantum Social Science”, Cambridge University Press, (2013).
- [42] Busemeyer, J.R., Bruza, P.D., “Quantum models of cognition and decision”, Cambridge University Press (2012)