Une formulation circulante du théorème de Napoléon-Douglas-Neumann

Geng-zhe Chang, Philip J. Davis

Résumé : Ce papier situe le théorème de Napoléon-Douglas-Neumann dans la théorie des matrices circulantes. Les “composantes symétriques” introduites par Neumann sont traitées de façon similaire.

1. Introduction

On se donne un triangle arbitraire ABC (Figure 1). On note ses côtés a, b, c, son aire Δ. Sur chaque côté du triangle, on érige, vers l'extérieur ou vers l'intérieur un triangle isocèle avec sur sa base l'angle $\pi/6$. On appelle les sommets libres (les sommets autres que A, B, C) A_0, B_0, C_0 (A_1, B_1, C_1). Des considérations géométriques simples amènent à

$$\overline{C_0A_0}^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta \tag{1}$$

et similairement à

$$\overline{C_1A_1}^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta. \tag{2}$$

Les trois conclusions suivantes proviennent immédiatement de (1) et (2) :

(i) Les triangles $A_0B_0C_0$ et $A_1B_1C_1$ sont équilatéraux.

(ii) $\Delta = \Delta_0 - \Delta_1$, où

$$\Delta_0 = \text{aire de } A_0B_0C_0$$

$$\Delta_1 = \text{aire de } A_1B_1C_1.$$

(iii) La somme des carrés des côtés de ABC =
la somme des carrés des côtés de $A_0B_0C_0$ + la somme des carrés des côtés de $A_1B_1C_1$.

Tout ceci constitue le théorème de Napoléon. Ce théorème fournit la construction de deux triangles équilatéraux, à partir de tout triangle donné, en construisant des triangles isocèles sur les côtés dudit triangle.

Ceci a été généralisé à des polygones plans arbitraires. La généralisation de (i) a été menée indépendamment et presque simultanément par Jesse Douglas [6, 7] et B. H. Neumann [8]. Pour le dire rapidement, pour tout n-gone donné arbitraire P, on peut construire $n-1$ n-gones réguliers

Division des mathématiques appliquées, Université Brown Providence, Rhode Island 02912.
G-Z Chang a quitté l'université chinoise de Science et technologie de Hefei, Anhui.
Soumis par Richard A. Brualdi
Extrait de *Linear algebra and its applications* 54 :87-95 (1983). Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1983.
Transcription en LaTeX et traduction : Denise Vella-Chemla, décembre 2025.

$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ en construisant une quantité finie de triangles isocèles.

De nombreuses preuves de cette généralisation ont été données, par exemple dans [1], [2], [9], [10]. Dans [8], Neumann a généralisé (ii) et (iii) au cas polygonal en fonction de “composantes symétriques”. Dans [10], Neumann a revisité ces faits en utilisant l'algèbre linéaire des espaces vectoriels de dimension finie. Dans cet article, nous allons un peu plus loin que ces théorèmes et nous montrons comment le théorème de Napoléon peut être placé dans le contexte de la théorie des matrices circulantes.

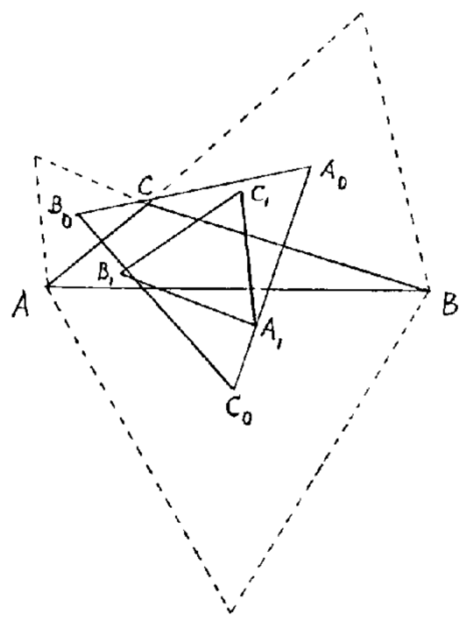

Fig. 1.

2. Préliminaires

Dénotons par les nombres complexes $z_1, z_2, ..., z_n$ les sommets ordonnés d'un polygone P, et posons $P = [z_1, z_2, ..., z_n]^\tau$, où l'élévation à la puissance τ dénote l'opération de transposition matricielle. Soit C un nombre complexe. Maintenant sur chaque côté de P, érigeons un triangle qui est directement semblable au triangle 0, 1, c. Les n sommets libres ainsi obtenus, formant un nouveau n-gone, peuvent être exprimés par la multiplication matricielle (voir [2]) $[(1-c)I + c\Pi]P$, où I est la matrice identité de taille $n \times n$ et

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Il est bien connu [3-5] que Π peut être diagonalisé par la matrice de Fourier F. Plus précisément, on a

$$\Pi = F^* \Omega F \tag{3}$$

où

$$F^* = [\omega^{(j-1)(k-1)}]/\sqrt{n}, \tag{4}$$

$$\Omega = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}), \tag{5}$$

$$\omega = \exp(2\pi\, i/n); \tag{6}$$

et * dénote l'opération de transposition conjuguée. Il est clair que F est unitaire, et que

$$F^* = F^{-1} \tag{7}$$

ainsi que

$$F = \overline{F^*}. \tag{8}$$

Considérons les $n-1$ matrices $K_j = (1-c_j)I + c_j\Pi$ où les nombres complexes $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$ doivent être déterminés. De (3) et (7), on voit que

$$K_j = F^*\Lambda_j F \tag{9}$$

où

$$\Lambda_j = (1-c_j)I + c_j\Omega \tag{10}$$

est une matrice diagonale avec l'élément $(1,1)$ égal à 1, pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$. On choisit maintenant c_j de telle manière que l'élément $(j+1, j+1)$ dans Λ_j devienne nul, i.e., $(1-c_j) + c_j\omega^j = 0$. Ainsi

$$c_j = \frac{1}{1-\omega^j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Les matrices $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$ sont maintenant bien définies.

En formant tous les produits possibles de $n-2$ matrices à partir de $K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}$:

$$N_\nu = K_1 \ldots K_{\nu-1}K_{\nu+1} \ldots K_{n-1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{12}$$

on a

$$N_\nu = F^* D_\nu F, \tag{13}$$

où $D_\nu = \Lambda_1 \dots \Lambda_{\nu-1}\Lambda_{\nu+1}\dots\Lambda_{n-1}$ est une matrice diagonale avec

$$\begin{aligned}
\text{element } (1,1) \quad &= 1,\\
\text{element } (\nu+1,\nu+1) \quad &= \prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n-1} \frac{\omega^\nu - \omega^k}{1-\omega^k}\\
&= \prod_{\substack{k=1\\k\neq\nu}}^{n-1} \frac{\omega^\nu (1 - \omega^{k-\nu})}{1-\omega^k}\\
&= \omega^{\nu(n-2)}\frac{1-\omega^\nu}{1-\omega^{n-\nu}} = -\frac{1}{\omega^\nu},
\end{aligned}$$

et nulle partout ailleurs. On peut donc écrire

$$D_\nu = E_1 - \frac{E_{\nu+1}}{\omega^\nu}, \tag{14}$$

où E_j désigne la matrice $n\times n$ avec 1 en position (j,j) et zéro partout ailleurs, $j = 1,2,\dots,n$.

En insérant (14) dans (13), on obtient la décomposition suivante de N_ν :

$$N_\nu = F^* E_1 F - \frac{F^* E_{\nu+1} F}{\omega^\nu}. \tag{15}$$

Il est évident à partir de (4) et (8) que

$$F^* E_{\nu+1} F = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega^\nu & & & \\ & & \omega^{2\nu} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \omega^{(n-1)\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{-\nu} & \omega^{-2\nu} & \dots & \omega^{-n\nu} \\ \omega^{-\nu} & \omega^{-2\nu} & \dots & \omega^{-n\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^{-\nu} & \omega^{-2\nu} & \dots & \omega^{-n\nu} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\nu = 0,1,2,\dots,n-1$$

Considérons le n-gone $P_\nu \equiv N_\nu P$, $\nu = 1,2,\dots,n-1$. Par (15) et (16), on a

$$P_\nu = JP - [a_\nu, \omega^\nu a_\nu, \dots, \omega^{(n-1)\nu} a_\nu]^\tau, \tag{17}$$

où

$$J = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$a_\nu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \omega^{-k\nu} z_k, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{18}$$

Puisque

$$JP = \left(\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}\right)[1, 1, \ldots, 1]^\tau,$$

il est clair à partir de (17) que P_ν est un n-gone régulier de type ω^ν, i.e. ses sommets consécutifs se trouvent à intervalles réguliers d'un angle de $2\pi\nu/n$ sur la circonférence du cercle de centre $\tilde{z} = (z_1 + z_2 + \ldots + z_n)/n$, le centroïde du polygone original P.

On note qu'avec c_j donné en fonction de (11), le triangle $0, 1, c_j$ est isocèle d'angle à la base $\pi/2 - j\pi/n$. En rappelant la définition de N_ν [voir (12)] et les rôles joués par K_j, on a montré les constructions suivantes de Napoléon-Douglas-Neumann.

Si des triangles isocèles d'angle à la base $\pi/2 - j\pi/n$ sont érigés sur les côtés d'un polygone arbitraire P, et si ce processus est répété avec les polygones formés par les sommets libres des triangles, mais avec une valeur différente de j et etc. jusqu'à ce que toutes les valeurs de $j = 1, 2, \ldots, n-1$ exceptée ν aient été utilisées dans un ordre arbitraire, alors un n-gone régulier P_ν de type ω^ν est obtenu. Son centroïde coïncide avec celui des sommets de P.

On souhaiterait faire la remarque que le second terme du côté droit de (17) est la ν^{ieme} composante symétrique de P, introduite par Neumann.

3. Autres résultats

Puisque $E_1^2 = E_1, E_{\nu+1}^2 = E_{\nu+1}$, et $E_1 E_{\nu+1} = 0$ pour $\nu > 0$, alors on a par (15) que

$$\begin{aligned} N_\nu^* N_\nu &= F^*\left(E_1 - \frac{1}{\overline{\omega}^\nu}E_{\nu+1}\right)\left(E_1 - \frac{1}{\omega^\nu}E_{\nu+1}\right)F \\ &= F^*(E_1 + E_{\nu+1})F. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n-1} N_\nu^* N_\nu &= F^*[I + (n-2)E_1]F \\ &= I + (n-2)F^* E_1 F. \end{aligned}$$

Puisque par (16),

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} N_\nu^* N_\nu = I + (n-2)J. \tag{19}$$

Supposons que Q est une $n \times n$ matrice circulante, et considérons la forme quadratique associée à $Q : P^*QP$. Puisque N_ν et Q sont circulantes et puisque tous les circulants commutent,

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n-1} P_\nu^* Q P_\nu &= \sum_{\nu=1}^{n-1} P^* N_\nu^* Q N_\nu P \\
&= \sum_{\nu=1}^{n-1} P^* N_\nu^* N_\nu Q P = P^* \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} N_\nu^* N_\nu \right) QP \\
&= P^*[I + (n-2)J]QP \\
&= P^*QP + (n-2)P^*JQP.
\end{aligned}$$

En particulier, si $JQ = 0$ alors on voit que

$$P^*QP = \sum_{\nu=1}^{n-1} P_\nu^* Q P_\nu. \tag{20}$$

Trois cas particuliers :

(i) Le moment d'inertie du n-gone P par rapport à son centroïde est associé à une forme quadratique dont la matrice Q est donnée par (voir [4], [5])

$$\begin{aligned}
Q &= (I-J)^*(I-J) = (I-J)^2 \\
&= I - 2J + J^2 = I - 2J + J = I - J.
\end{aligned}$$

Il est clair que $Q = I - J$ est un circulant et

$$JQ = J(I-J) = J - J^2 = J - J = 0.$$

Par conséquent, on a par (20) que le moment d'inertie de P par rapport à son centroïde $\tilde{z}$ est égal à la somme des moments d'inertie de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ par rapport à leur propre centroïde (également $\tilde{z}$).

(ii) *Aire signée*. Dans ce cas, sélectionnons Q comme le circulant [4, 5]

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{\Pi - \Pi^*}{4i} = \frac{\Pi - \Pi^\tau}{4i}, \\
JQ &= \frac{1}{4i}(J\Pi - J\Pi^\tau) = \frac{1}{4i}(J - J) = 0.
\end{aligned}$$

Donc on a par (21) que la somme des aires signées de $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ est juste l'aire signée de P.

(iii) *Somme des carrés des côtés.* Maintenant sélectionnons [4, 5]

$$Q = 2I - \Pi - \Pi^* = 2I - \Pi - \Pi^\tau.$$

Q est un circulant et

$$JQ = 2J - J\Pi - J\Pi^\tau = 2J - J - J = 0$$

Alors, à nouveau par (21), la somme des carrés des côtés est

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} (\text{somme des carres des cotes de } \mathrm{P}_\nu).$$

Un dernier mot. Soit Q un circulant, et soit s la somme des éléments de la première ligne de Q. Alors, il est clair que

$$JQ = QJ = sJ$$

de telle façon que $JQ = 0$ si et seulement si $s = 0$. Alors, par (20),

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^{n-1} P_\nu^* Q P_\nu \quad &= P^*QP + (n-2)P^*JQP \\
&= P^*QP + \frac{n-2}{n} s|z_1 + z_2 + \ldots + z_n|^2 \\
&= P^*QP + n(n-2)s|\tilde{z}|^2.
\end{aligned}$$

Le second terme du côté droit est nul si et seulement si soit $s = 0$ soit $\tilde{z} = 0$. Donc, si le n-gone original est tel que $\tilde{z} = 0$ (sont c.g. est à l'origine), on a le théorème de décomposition (21) pour toute forme quadratique circulante. La condition $s = 0$ qui est équivalente à la condition $JQ = 0$ et que nous avons exploitée ci-dessus, est elle-même équivalente à l'invariance par translation de la forme quadratique P^*QP.

Références

1 H. F. Baker, A remark on polygons, *J. London Math. Soc.* 17 :162-164 (1942).

2 G. Chang, A proof of a theorem of Douglas and Neumann by circulant matrices, *Houston J. Math.* 8 :15-18 (1982).

3 P. J. Davis, Cyclic transformation of polygons and the generalized inverse, *Canad. J. Math.* 29 :756-770 (1977).

4 P. J. Davis, Cyclic transformations of n-gons and related quadratic forms, *Linear Algebra Appl.* 25 :57-75 (1979).

5 P. J. Davis, *Circulant Matrices*, Wiley, New York, 1979.

6 J. Douglas, Geometry of polygons in the complex plane, *J. Math. Phys.* 19 :93-130 (1940).

7 J. Douglas, On linear polygon transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.* 46 :551-560 (1940).

8 B. H. Neumann, Some remarks on polygons, *J. London Math. Soc.* 16 :230-245 (1941).

9 B. H. Neumann, A remark on polygons, *J. London Math. Soc.* 17 :162-164 (1942).

10 B. H. Neumann, Plane polygons revisited, unpublished.

Reçu le 19 juillet 1982.