Tous pour un, Denise Vella-Chemla, avril 2023

On s'acharne parce qu'on est sûre qu'il y a quelque chose de simple, que l'on n'a toujours pas compris, et qui fait que les décomposants de Goldbach sont ceux qu'ils sont, pour chaque nombre pair, pour une raison très précise, et que l'on cherche.

D'abord on pense à multiplier tous les décomposants de Goldbach entre eux, pour $n = 98$, sauf un, pour voir si on n'aurait pas une relation d'un des décomposants de Goldbach à tous les autres.

Pour 98, notre exemple fétiche, on a $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$.

Si l'on multiplie tous les décomposants sauf un, voici ce qu'on obtient :

- le produit de tous les décomposants de Goldbach (notés dg dans la suite) sauf 19 est égal à 370335331 qui est congru à 93 modulo 98 ;
- le produit de tous les dg sauf 31 est congru à 57 (mod 98) ;
- le produit de tous les dg sauf 37 est congru à 61 (mod 98) ;
- le produit de tous les dg sauf 61 est congru à 37 (mod 98) ;
- le produit de tous les dg sauf 67 est congru à 41 (mod 98) ;
- le produit de tous les dg sauf 79 est congru à 5 (mod 98).

Le couple (37,61) est dans une situation particulière par rapport aux autres couples de sommants : l'un des décomposants s'envoie sur son symétrique et inversement, par multiplication par tous les autres décomposants de Goldbach sauf lui-même. Ca semble intéressant.

On cherche si pour notre autre nombre pair fétiche 40, le même phénomène se produit : les dg sont 3, 11, 17, 23, 29, 37.

- le produit de tous les dg sauf 3 est congru à 13 (mod 40) ;
- le produit de tous les dg sauf 11 est congru à 29 (mod 40) ;
- le produit de tous les dg sauf 17 est congru à 7 (mod 40) ;
- le produit de tous les dg sauf 23 est congru à 33 (mod 40) ;
- le produit de tous les dg sauf 29 est congru à 11 (mod 40) ;
- le produit de tous les dg sauf 37 est congru à ? (mod 40).

Merci à Cédric Villani, pour la belle conférence qu'il a donnée à Clermont-Ferrand, le 13 janvier 2023, "Blaise Pascal, un génie clermontois", visionnable à l'adresse :
https://www.youtube-nocookie.com/embed/MilmmZ0yCGo,
à l'occasion des 400 ans de la naissance de Blaise Pascal.

Le couple (11,29) est dans la même situation particulière par rapport aux autres couples de sommants : 11 s'envoie sur 29 (resp. 29 s'envoie sur 11), si on le multiplie par le produit de tous les décomposants de Goldbach sauf lui-même. Ca semble confirmer ce qu'on a trouvé pour le nombre pair $n = 98$.

Alors, on revient à une vieille idée qui était de trouver un moyen de passer des décompositions de Goldbach des doubles de nombres premiers aux décompositions de Goldbach des doubles de nombres composés. On va d'abord se concentrer sur les décomposants de Goldbach des doubles de nombres premiers. On repense aux équations algébriques, aux relations invariantes de Galois, aux relations entre sommes et produits dans les coefficients des équations algébriques. On se dit que pour les doubles de nombres premiers, le nombre premier central est peut-être en relation avec tous les autres décomposants de Goldbach. Dans la droite ligne des calculs effectués pour $n = 98$ et $n = 40$, on fait les calculs suivants, pour les nombres pairs doubles de nombres premiers :

$10 = 3 + 7 = 5 + 5. On a : 3 \times 7 = 21 = 1 \pmod{10}$ et 1 rend 5 fixe.

$14 = 3 + 11 = 7 + 7. On a : 3 \times 11 = 33 = 5 \pmod{14}$ et 5 rend 7 fixe.

$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11. On a : 3 \times 19 \times 5 \times 17 = 4845 = 5 \pmod{22}$ et 5 rend 11 fixe.

Et enfin $26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13 : 3 \times 23 \times 7 \times 19 = 9177 = 25 \pmod{26}$ et 25 rend 13 fixe.

Problème : si on ajoute la décomposition $26 = 5 + 21$ comme s'il s'agissait d'une décomposition de Goldbach (alors que 21 est composé), comme $5 \times 21 = 1 \pmod{26}$, 13 est aussi rendu fixe par le nouveau produit alors que celui-ci contient une décomposition qui n'est pas une décomposition de Goldbach. Dommage, c'eut été si chouette.