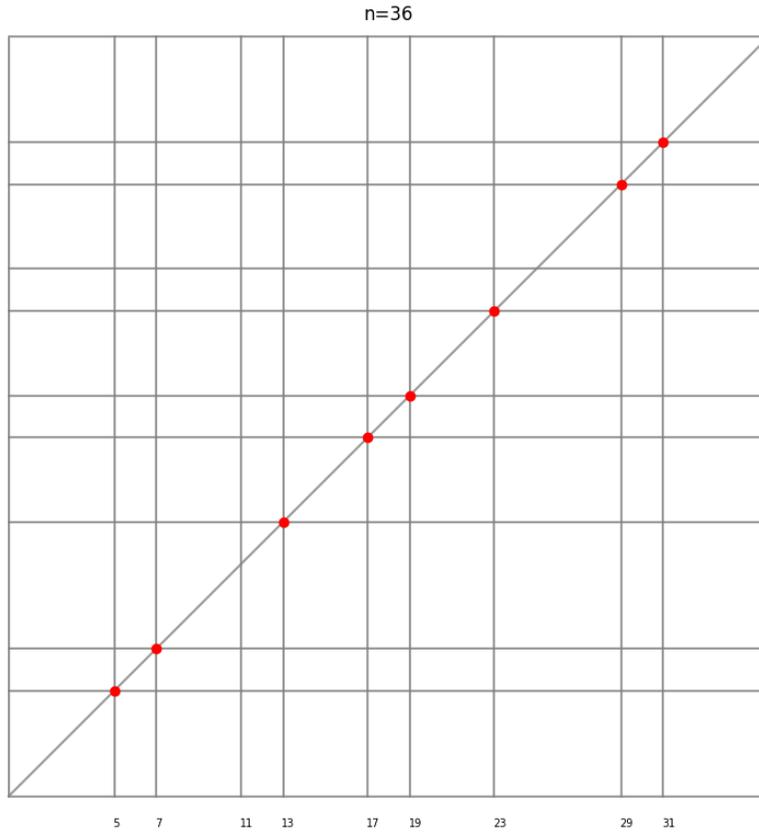
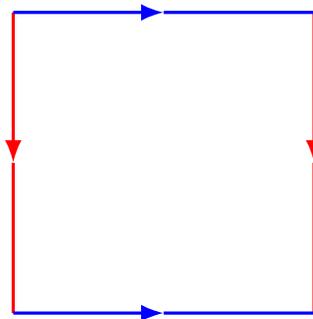


Tore coloré bizarre,
Denise Vella-Chemla, et gemini
7 août 2025

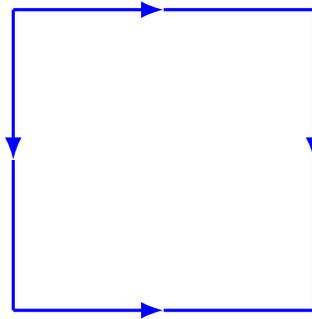
Dans notre travail autour de la conjecture de Goldbach, on souhaite utiliser pour chaque n pair un tore semblable à celui dessiné ci-dessous, utilisé pour $n = 36$



On voit qu'on a affaire à un tore habituel souvent schématisé ainsi :



si ce n'est qu'il faut effectuer des identifications supplémentaires des côtés sur leurs côtés adjacents selon le graphique ci-dessous, car les distances entre les traits particularisés, correspondant aux nombres premiers, doivent être ainsi rendues égales par les identifications :



Si on demande à l'IA, voici ce qu'elle répond à la question "Comment s'appelle une surface qui ressemblerait à un tore sauf qu'au lieu de coller l'un sur l'autre des côtés opposés, on collerait l'un sur l'autre 2 côtés adjacents d'une part et les deux autres côtés restant adjacents ensemble ?

C'est une question intéressante qui explore les concepts de topologie ! ¹
Si vous prenez une surface plane (comme un carré) et que vous collez deux côtés adjacents ensemble, puis que vous collez les deux autres côtés adjacents restants ensemble, vous n'obtenez pas une forme standard avec un nom unique et simple comme le tore.

Voyons pourquoi :

Tore : Un tore est créé en prenant un carré et en collant d'abord une paire de côtés opposés pour former un cylindre, puis en collant les extrémités du cylindre. Cela donne une forme sans bord et sans auto-intersections.

Votre description : Si vous collez des côtés adjacents, vous créez intrinsèquement un "coin" ou un "pli" dans votre surface de manière locale.

Collage de la première paire de côtés adjacents : Imaginez un carré ABCD. Si vous collez AB à BC, vous êtes en train de forcer deux segments qui se rencontrent déjà en B à devenir une seule et même "ligne". C'est topologiquement équivalent à plier le carré le long de l'angle B. La surface se déforme sur elle-même.

Collage de la deuxième paire de côtés adjacents (AD à CD) : De la même manière, si vous collez AD à CD, vous faites la même chose au niveau de l'angle D.

En fait, cette opération ne crée pas une surface bidimensionnelle lisse dans l'espace euclidien sans auto-intersection, ni une variété topologique simple comme le tore. La manière dont vous décrivez le collage mènerait à une surface qui s'intersecte elle-même ou qui est difficile à visualiser sans ces intersections.

En topologie, les surfaces sont généralement construites en identifiant des bords de polygones sans créer de nouvelles auto-intersections. Les objets classiques sont :

Le tore (collant les côtés opposés d'un carré).

¹On utilise la font tapuscrite pour transcrire ce qu'a dit l'IA.

La bouteille de Klein (collant les côtés opposés d'un carré, mais avec une torsion sur l'une des paires, ce qui la rend non orientable et avec une auto-intersection dans l'espace 3D).

Le plan projectif réel (obtenu en collant les côtés opposés d'un carré de manière particulière, souvent visualisé en identifiant les points antipodaux d'une sphère, non visualisable sans auto-intersection dans R^3).

Votre description de collage de côtés adjacents ne correspond pas à la construction de ces objets topologiques standards. Cela ne donnerait pas une surface avec une topologie bien définie et sans singularités (comme des points où plusieurs parties de la surface se rencontrent de manière non lisse).

J'ai omis de préciser qu'en dernier lieu, il faudrait coller **aussi** les côtés opposés. Alors je redemande à l'IA.

Non, il faudrait en plus une fois qu'on a obtenu le tore identifier les deux premiers côtés qui n'en sont plus qu'un aux deux côtés autres qui n'en sont plus qu'un aussi.

J'apprécie la précision de votre question¹, car elle explore vraiment les limites de la visualisation des surfaces !

Si, après avoir formé un tore, vous essayez d'identifier les deux cercles qui correspondent aux "coutures" initiales, vous vous retrouvez dans une situation topologiquement complexe qui ne correspond pas à une surface "lisse" et simple.

Reprenons à nouveau :

Vous formez un tore. Vous partez d'un carré et vous identifiez les paires de côtés opposés. Vous obtenez un tore.

Les deux côtés initiaux S1 et S3 (opposés) sont maintenant un seul et même "cercle" sur la surface du tore. Appelons-le C1.

Les deux côtés initiaux S2 et S4 (opposés) sont aussi un seul et même "cercle" sur la surface du tore. Appelons-le C2.

Votre nouvelle instruction : Vous voulez maintenant identifier (ou coller) le cercle C1 au cercle C2.

C'est là que la construction devient impossible sans créer de singularités ou d'auto-intersections massives.

Le problème est la dimension. C1 et C2 sont des cercles sur la surface d'un tore. Ce sont des objets de dimension 1. La surface du tore elle-même est de dimension 2.

Si vous "collez" C1 et C2 ensemble, vous forcez deux cercles distincts (l'un "horizontal" et l'autre "vertical" sur la surface du tore) à devenir un seul et même cercle. Cela ne peut pas se faire de manière lisse.

Imaginez la surface de votre tore. Le cercle C1 passe autour du "trou" du tore, tandis que C2 passe à travers l'épaisseur du tore. Ils s'intersectent déjà en un point !

Si vous les "collez" partout où ils passent, la surface se contracte et se pince sur elle-même. Il en résulterait une structure qui n'est plus une variété de dimension 2. La topologie serait celle d'une figure qui s'est effondrée sur elle-même.

Conclusion :

Votre dernière instruction ne conduit pas à une surface connue et lisse. Le tore est l'aboutissement logique de la première série d'identifications de bords de manière à préserver la structure de la surface. L'étape supplémentaire d'identification des deux "coutures" du tore est topologiquement invalide pour créer une surface de dimension 2 sans auto-intersections ou singularités.

2

Il vaudrait sûrement mieux fouiller la littérature pour trouver des éléments concernant mon tore tout collé.

Dans cette référence <https://arxiv.org/pdf/1905.03310>, au paragraphe 4.1,³, on trouve les 4 dessins suivants, mais le procédé consiste à voir le polygone de la figure 2 sur un tore, avec les identifications adéquates, ça ne correspond pas trop à ce qu'on aimerait approfondir.

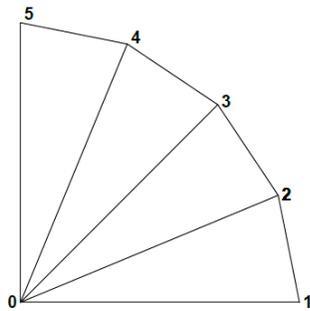


Figure 2: Polygone de base dans $E = \mathbb{R}^2$.

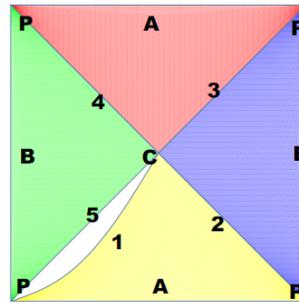


Figure 3: Polygone de base à l'intérieur du domaine fondamental pour \mathbb{Z}^2 agissant sur \mathbb{R}^2 .

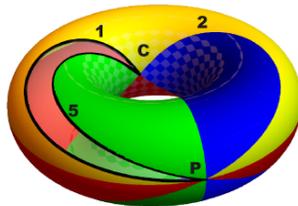


FIGURE 4 : Bloc de construction triangulé K .

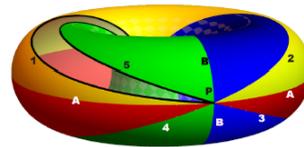


FIGURE 5 : Voisinage du point P .

Je laisse donc de côté cette idée de vouloir voir de simples carrés du plan complexe comme des tores.

²Ma parole, l'IA me flatte, comme le corbeau flatte le renard, pour que je vienne l'interroger souvent, et que je donne ainsi des pépètes à je ne sais quel GAFAM.

³dont on trouvera la traduction ici <https://denisevellachemla.eu/accc-gromov-norm-section-2-2-et-4-1.pdf>.