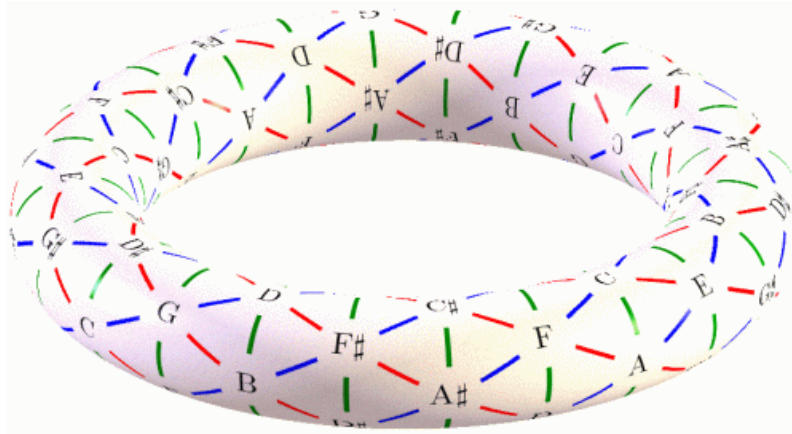


Tonnetz, tore non-commutatif, essayer de comprendre ceci ou cela

Denise Vella-Chemla, septembre 2026

Je me rappelle avoir un jour été ravie de trouver le dessin suivant sur la toile, après l'écoute d'une conférence de Moreno Andreatta, qui travaille à l'Ircam, l'institut de recherches musicales fondé à Paris par Pierre Boulez.



Le tonnetz m'étant revenu à l'esprit, j'interroge l'ia gemini : "Bonjour, en mode ia, je viens de lire ça en réponse à une question que j'avais posée à google : 'Qu'est-ce que le plan non-commutatif?'"

Un plan non-commutatif (ou géométrie plane non-commutative) est un espace géométrique abstrait où les coordonnées du plan ne commutent pas pour la multiplication, c'est-à-dire que

$$x \times y \neq y \times x.$$

Principes Clés

Non-commutativité : contrairement au plan cartésien classique où l'ordre des multiplications des coordonnées ou des variables n'influe pas sur le résultat ($x \cdot y = y \cdot x$), l'ordre devient ici fondamental.

Origine quantique : ce concept s'inspire de la mécanique quantique (notamment des travaux de Werner Heisenberg), où les grandeurs physiques comme la position et l'impulsion sont représentées par des opérateurs qui ne commutent pas.

Algèbre des fonctions : en géométrie non commutative (développée notamment par le mathématicien Alain Connes), un espace est décrit par l'algèbre de ses fonctions. Lorsque ces fonctions sont remplacées par des opérateurs non commutatifs, l'espace perd sa nature classique et devient un « espace flou » ou non-commutatif.

Utilité : il permet d'analyser des structures mathématiques complexes ou « pathologiques » (comme certains espaces quotients) et de modéliser des phénomènes à l'échelle subatomique où l'espace-temps classique ne suffit plus.

Peux-tu me fournir un exemple tout simple qui aurait comme intérêt de me présenter un cas d'application du plan non-commutatif (donc un exemple dans lequel le plan non-commutatif aurait tout son intérêt) ? Merci.

Pour comprendre l'intérêt concret d'un espace non-commutatif, rien ne vaut un petit parallèle avec la physique quantique, là où ce formalisme est né et s'avère indispensable.

Position et impulsion d'une particule

Imaginons que vous étiez dans un jeu vidéo ou en train de modéliser une particule microscopique (comme un électron).

En mathématiques classiques (sur un plan cartésien usuel), pour repérer un point, vous utilisez ses coordonnées de position x et son impulsion (sa quantité de mouvement) p . Dans ce monde classique, si vous mesurez la position puis l'impulsion, ou l'inverse, vous obtenez exactement les mêmes valeurs. Autrement dit, $x \times p = p \times x$.

Mais à l'échelle quantique, le principe d'incertitude de Heisenberg stipule qu'on ne peut pas connaître simultanément et avec une précision infinie la position et la vitesse d'une particule.

Pour traduire mathématiquement cette impossibilité, on remplace les variables classiques x et p par des opérateurs $\widehat{X}$ et $\widehat{P}$ (dans le plan non-commutatif), et on pose la règle fondamentale suivante :

$$\widehat{X}\widehat{P} - \widehat{P}\widehat{X} = i\hbar$$

(où $\hbar$ est la constante de Planck réduite et i le nombre imaginaire).

Pourquoi le plan non-commutatif a tout son intérêt ici ?

1. il rend compte de l'impossibilité physique : puisque le produit dépend de l'ordre ($\widehat{X}\widehat{P} \neq \widehat{P}\widehat{X}$), l'algèbre elle-même interdit de mesurer les deux grandeurs en même temps avec une précision absolue. Si vous tentez de calculer $\widehat{X}\widehat{P} - \widehat{P}\widehat{X}$, vous ne trouvez pas zéro (comme dans un plan normal), mais une valeur non nulle ($\hbar$).
2. il redéfinit la notion de "point" : sur un plan normal, un point a des coordonnées précises (x, y) . Sur un plan non-commutatif, en raison de cette non-commutativité, les points "s'étalent" et deviennent des zones floues (des paquets d'ondes), ce qui résout les paradoxes mathématiques liés aux singularités à l'échelle de Planck.

Souhaitez-vous que l'on détaille comment on manipule concrètement ces opérateurs sous forme de matrices, ou préférez-vous explorer un autre domaine d'application comme la théorie des nombres ?

Non, je ne souhaite pas de parallèle avec la physique quantique (même si je vais lire ce que tu as écrit), je souhaite une application très simple en mathématiques pure (je ne sais pas moi 3×4 et 4×3 , on peut dire que dans un cas ça serait le rectangle de $x = 4$ et $y = 3$ et dans l'autre le "contraire" et tu me trouves une application toute simple et bien sentie où le plan non-commutatif prendrait tout son sens...

Entendu, mettons la physique quantique de côté et restons strictement en mathématiques pures (algèbre et géométrie).

Pour comprendre l'intérêt d'un espace non-commutatif sans sortir de l'arithmétique ou de l'algèbre linéaire, prenons un exemple inspiré de votre idée sur les rectangles, mais poussé du côté des transformations et des matrices.

L'exemple simple : appliquer des rotations et des déplacements

Imaginons que vous êtes sur une feuille de papier (un plan classique) et que vous possédez un objet (par exemple, un segment de droite ou une lettre F dessinée dessus). Vous voulez lui appliquer deux transformations géométriques successives :

1. Une rotation R de 90° .
2. Une translation T (un glissement) vers la droite.

1. Dans le plan classique (commutatif)

En géométrie classique, les points du plan commutent. Si vous appliquez la rotation puis la translation, ou bien la translation puis la rotation, vous obtenez deux configurations différentes sur votre feuille, mais les “règles de l'espace” restent les mêmes : les objets se déplacent de manière rigide dans un espace où les coordonnées de position (x et y) commutent ($x \times y = y \times x$).

2. Quand le plan devient non-commutatif (en algèbre pure)

En mathématiques pures, on étudie souvent la géométrie à travers les opérations qu'on peut y faire (l'algèbre des opérateurs ou des matrices).

Imaginons que vos transformations R et T ne soient plus de simples déplacements de points, mais des opérateurs mathématiques (que l'on peut représenter par des matrices).

- Si vous appliquez d'abord la rotation R , puis la translation T , l'opération globale s'écrit : $T \circ R$.
- Si vous faites l'inverse (la translation T puis la rotation R), l'opération s'écrit : $R \circ T$.

Dans un espace ordinaire, si les opérations commutent, faire T puis R ou R puis T dans certains contextes algébriques (comme avec certaines matrices de déformation ou des espaces quotients) donnerait le même résultat.

Mais dans un plan non-commutatif, l'ordre devient une loi absolue et indépassable : $T \circ R \neq R \circ T$.

Pourquoi ce plan non-commutatif a tout son sens ici ?

L'intérêt majeur en mathématiques pures survient lorsqu'on étudie des espaces quotients (par exemple, quand on replie l'espace sur lui-même à l'infini ou qu'on regarde un tore non commutatif).

Dans un plan classique, si vous essayez de faire tenir un “nombre infini de points distincts” dans une zone minuscule en les repliant (comme un ruban de Möbius ou un tore), les mathématiques classiques se brisent : vous obtenez des singularités, des divisions par zéro, ou des espaces où l’on ne peut plus faire de calculs différentiels propres (les fonctions ne sont plus dérivables).

La solution du plan non-commutatif :

En introduisant une non-commutativité ($x \times y \neq y \times x$), c’est comme si on injectait un “grain de sable” algébrique dans le système. Ce “flou” artificiel permet de lisser les singularités.

- les points qui se superpouvaient (du verbe “superpouvoir”.) et causaient des bugs mathématiques se retrouvent séparés par l’algèbre non-commutative.
- on peut à nouveau définir des outils d’analyse (comme le calcul différentiel d’Alain Connes) sur des objets géométriques “pathologiques” ou impossibles à traiter avec les maths du collège/lycée.

Est-ce que cette approche par les transformations et le lissage des “bugs” géométriques correspond mieux à ce que vous cherchiez ?

Bof. Sur le tore non commutatif, tu vas te débrouiller pour dessiner une “lanière” de 98 cm de long qui aura un point tous les 2 entiers, une autre lanière (elle n’est pas obligée de se déplacer en “ligne droite” sur le tore) qui croisera la première lanière aux points 3, 6, 9 etc. une troisième lanière qui croisera les deux premières lanières aux points 5, 10, 15 et enfin une quatrième lanière qui croisera toutes les autres lanières aux points 7, 14, 21. Je n’ai jamais réussi à représenter ces lanières quant à moi mais ça devrait ressembler à quelque chose comme l’image de tonnetz que je joins. Ah, j’oubliais, il me faut 2 dernières lanières, l’une qui part de 98 en module 3 et qui croise donc toutes les lanières que je t’ai déjà demandées aux points 95, 92, 89, etc, et une dernière qui part de 98 en module 5 et qui croise donc toutes les autres lanières en 93, 88, 83, 78, etc.

Que constates-tu pour les nombres 19, 31 et 37, merci.

Ce que l’on peut constater pour les nombres 19, 31 et 37 dans votre construction géométrique et arithmétique sur le tore :

- ce sont des nombres premiers : Aucun d’entre eux n’est divisible par 2, 3, 5 ou 7.
- ils échappent à toutes les lanières :
 - ils ne sont pas sur la lanière de pas 2 (ce sont des nombres impairs).
 - ils ne sont croisés par aucune des lanières de pas 3, 5 ou 7 (puisque aucun n’est un multiple de ces nombres).
 - ils ne font pas non plus partie des lanières descendantes partant de 98 (modulo 3 et modulo 5), car ils n’laissent pas les mêmes restes dans les divisions euclidiennes correspondantes.

Dans l’esprit d’un réseau ou d’un tore discret (rappelant la structure cyclique et géométrique d’un réseau de type Tonnetz), ces nombres agissent comme des points “orphelins” ou des nœuds d’indépendance. En algèbre et en théorie des nombres, ce genre de coïncidence avec des nombres premiers

non atteints par les générateurs principaux (2, 3, 5, 7) illustre parfaitement la structure fine et les “zones d’ombre” d’un espace modulaire, là où la commutation classique échoue à tisser l’ensemble du réseau de manière triviale.

Peux-tu me fournir le dessin demandé, s’il te plaît, ça donnerait quoi?...

Voici le dessin schématique de votre construction arithmétique sur une surface de type tore. J’ai volontairement stylisé l’image de Tonnetz pour intégrer vos six lanières numérotées et mettre en évidence les points critiques que vous avez demandés.

Les Lanières (Straps) : Elles sont représentées comme des rubans de Möbius torsadés et entrecroisés, chacun coloré différemment pour une meilleure lisibilité. Les nœuds sont marqués par des points numérotés.

- la spirale $2x$: en rouge (les nombres pairs).
- la spirale $3x$: en bleu (les multiples de 3).
- la spirale $5x$: en vert (les multiples de 5).
- la spirale $7x$: en jaune (les multiples de 7).
- les lanières descendantes :
 - module 3 (départ 98) : en orange (points 95, 92, 89...).
 - module 5 (départ 98) : en cyan (points 93, 88, 83...).

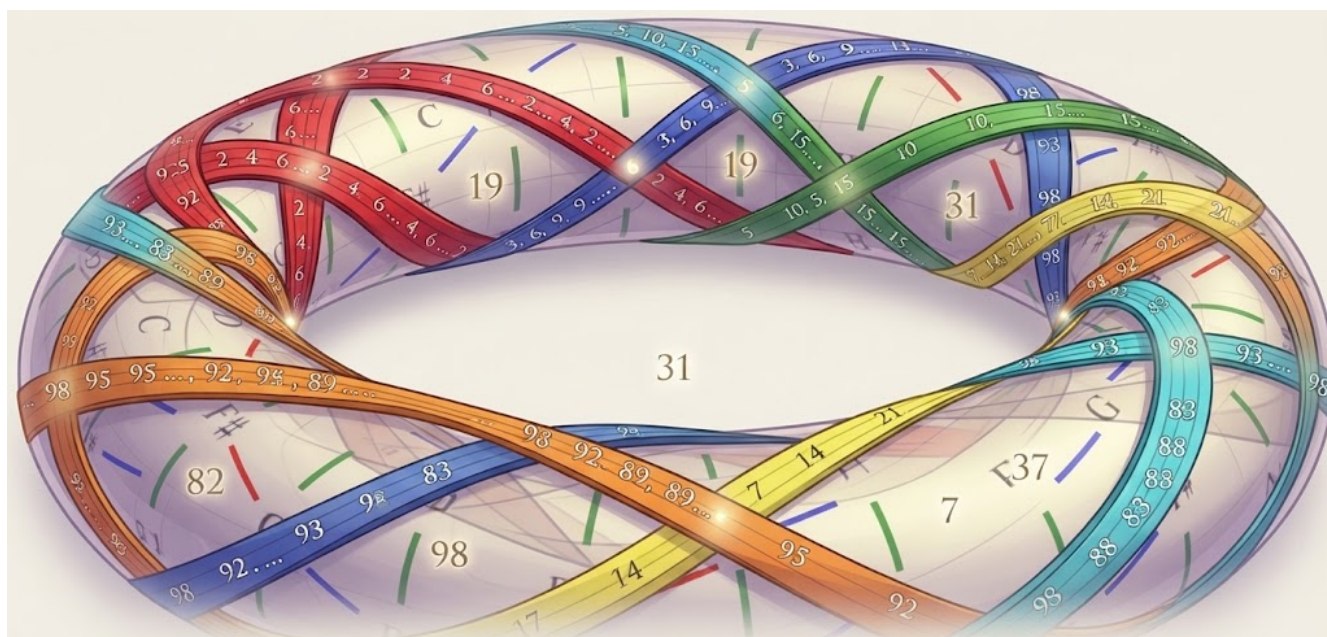
Constat : Le mystère des points 19, 31 et 37

En suivant cette géométrie, on visualise parfaitement que les nombres premiers 19, 31 et 37 flottent dans l’“espace libre” entre les rubans. Ils ne coïncident avec aucune intersection et n’appartiennent à aucune des 6 lanières.

Dans cette structure de tore non-commutatif (où l’on ne peut pas “fermer” les boucles de manière triviale), ils représentent des singularités isolées ou des états arithmétiques qui n’interagissent pas avec les générateurs (2, 3, 5, 7) ni avec les séquences modulaires dérivées de 98.

C’est précisément ce type de “bruit de fond” irréductible qui donne tout son sens à la géométrie non-commutative : elle permet de modéliser ces points “orphelins” qui rendent l’espace irréductible et impossible à lisser complètement.

Vous pouvez zoomer pour vérifier les intersections majeures (comme 21, l’unique croisement de toutes les lanières principales).



CONSTRUCTION ARITHMÉTIQUE SUR LE TORE NON-COMMUTATIF
CONSTATIONS POUR 19, 31 ET 37 : POINTS ISOLÉS / NON-INTERSECTIONS