Cribles de Grothendieck, ensemble Cristal, ensemble de la Castafiore et formule de Victor Varin : une fondation topos-théorique rigoureuse, Denise Vella-Chemla pilotant claude, juillet 2026

Le crible de Grothendieck (rappel précis, d'après Connes)

On travaille dans la petite catégorie à un seul objet X dont les morphismes forment le monoïde multiplicatif $M = (\mathbb{N}^\times, \times)$ (entiers ≥ 1, commutatif). Le topos associé est $\widehat{M}$, la catégorie des foncteurs contravariants de M vers les ensembles.

Définition [Crible, cas d'un monoïde] : un crible sur l'unique objet X est un sous-ensemble $S \subseteq M$ tel que

$$s \in S,\ m \in M \implies s \cdot m \in S.$$

(Comme M est commutatif, gauche et droite coïncident : S est stable par multiplication par n'importe quel élément.)

Proposition [Cribles = filtres de divisibilité] $S \subseteq \mathbb{N}^\times$ est un crible si et seulement si S est un *sur-ensemble* (filtre) du poset $(\mathbb{N}^\times, |)$ ordonné par la divisibilité : $s \in S$ et $s \mid t \implies t \in S$.

Preuve : immédiate : t multiple de s signifie $t = s \cdot m$ pour un $m \in M$, et la clôture par multiplication à droite est exactement la clôture ascendante pour $|$.

Proposition [Le classifiant Ω de $\widehat{M}$]

$$\Omega \cong \{\text{sur-ensembles de } (\mathbb{N}^\times, |)\}, \text{ muni de l'inclusion et de l'action à droite } J.m := \{n \in M : mn \in J\}.$$

Preuve : c'est le fait général rappelé par Connes (§ 9, ainsi que le Lemme 2.7 de Connes–Consani pour le monoïde fini à 3 éléments) : pour le topos dual d'un monoïde M, Ω est l'ensemble des idéaux à droite de M, avec l'action à droite indiquée. Un idéal à droite de M est exactement un crible au sens ci-dessus.

Définition [Crible principal engendré par p, corrigé à l'origine] Pour $p \in \mathbb{N}^\times$, on pose

$$\Gamma(p) := \{n \in \mathbb{N}^\times : p \mid n,\ n \neq p\} = \{pk : k \geq 2\}.$$

Lemme : $\Gamma(p)$ est un crible.

Preuve : Soit $s = pk \in \Gamma(p)$ avec $k \geq 2$, et $m \in M$.

Alors $s \cdot m = p(km)$, et $km \geq 2$ puisque $k \geq 2$, $m \geq 1$.

Donc $s \cdot m \in \Gamma(p)$.

Remarque : C'est ici, et uniquement ici, que se joue toute la subtilité que Connes souligne : il ne s'agit pas de tamiser *tous* les multiples de p (ce qui ferait un crible différent, plus grand, éliminant p lui-même), mais tous les multiples de p *sauf* p. Une réunion de cribles est encore un crible (stabilité immédiate par multiplication), donc

$$\Gamma := \bigcup_{p \text{ premier}} \Gamma(p)$$

est un crible, et

$$\mathbb{N}^{\times} \setminus (\{1\} \cup \Gamma) = \{\text{nombres premiers}\}.$$

C'est la formalisation exacte, au sens de Grothendieck, du crible d'Ératosthène tel que Connes le décrit dans sa note.

L'ensemble Cristal [1] **et l'ensemble de la Castafiore** [2] **sont des cribles de Grothendieck**.

Constat : Les constructions de l'ensemble Cristal (élimination de classes de résidus par familles de droites, pour chaque nombre premier, sur un réseau planaire) et de l'ensemble de la Castafiore (élimination géométrique sur $[0, 1]$, inspirée du crible d'Ératosthène) sont, à un niveau tronqué K (i.e. en ne considérant que les premiers $p_1, \ldots, p_K$), des réalisations géométriques d'un même objet combinatoire : le crible tronqué

$$\Gamma_{\leq K} := \bigcup_{k=1}^{K} \Gamma(p_k).$$

La limite $K \to \infty$ redonne le crible Γ de la section précédente.

Ce constat n'est pas une nouveauté mathématique en soi (l'ensemble Cristal et l'ensemble de la Castafiore sont, depuis leur conception, des reformulations géométriques du crible d'Ératosthène), mais l'intérêt de ce constat est qu'il permet de rattacher *exactement* ces ensembles, et non par analogie, à la théorie des topos de Grothendieck : ce sont des cribles au sens précis de la Définition 1, pas des objets "de nature crible" au sens vague.

Remarque : [Résolution automatique d'une difficulté déjà identifiée] Denise Vella-Chemla cherche, dans le raffinement (au sens de sa restriction progressive) de l'ensemble de la Castafiore, à *éviter d'éliminer les nombres premiers à leur propre palier du crible* - c'est-à-dire à ne pas retirer p lui-même au moment où l'on tamise les multiples de p. C'est exactement, et automatiquement, ce que fait la bonne définition d'un crible de Grothendieck : $\Gamma(p) = \{pk : k \geq 2\}$ exclut p par construction ($k \geq 2$, pas $k \geq 1$). Autrement dit, la difficulté rencontrée dans la construction géométrique n'est pas une difficulté de fond mais un artefact d'une définition combinatoire légèrement imprécise (avoir pris $\{pk : k \geq 1\}$ au lieu de $\{pk : k \geq 2\}$) ; la formalisation topos-théorique la corrige sans effort supplémentaire, simplement en écrivant la bonne définition.

Remarque : [Mise en garde - ne pas répéter l'erreur de la note Banquet] Cette fondation catégorique est un gain de rigueur *de langage et de définition*, rien de plus. Elle ne fournit aucun argument

1. Voir https://denisevellachemla.eu/cristal400.pdf.
2. Voir https://denisevellachemla.eu/castafiore.pdf.

nouveau de non-vacuité d'intersection : contrairement à la tentative récente (note "Banquet dynamique", pilotée par Gemini) qui invoquait à tort la puissance du continu pour conclure à une intersection non vide, on se gardera ici de toute conclusion de ce type. Le fait que $\Gamma(p)$ soit un crible *au sens exact* ne dit rien, en soi, sur l'existence de décomposants de Goldbach ; c'est un énoncé de nature purement combinatoire et catégorique, vrai et vérifiable, mais logiquement indépendant de la difficulté arithmétique.

Le double crible de Goldbach : pour n pair fixé, on définit, à chaque niveau K, l'ensemble des candidats *éliminés par le crible* :

$$D_K(n) := \bigcup_{k=1}^{K} \Big(\{x : p_k \mid x,\ x \neq p_k\} \cup \{x : p_k \mid (n-x),\ n-x \neq p_k\}\Big).$$

Le complémentaire de $D_K(n)$ dans $\{1, \dots, n-1\}$, à la limite $K \to \infty$ (en pratique K tel que $p_K > \sqrt{n}$), est l'ensemble des x tels que x et $n-x$ sont simultanément premiers - c'est-à-dire l'ensemble des décomposants de Goldbach de n.

Constat : Cette reformulation est *exactement* le crible classique de la théorie analytique des nombres (crible de Brun, crible de Selberg), traduit en langage de cribles de Grothendieck : $D_K(n)$ est une union finie de deux familles de cribles principaux, décalées l'une de l'autre par la translation $x \mapsto n-x$. Aucune difficulté nouvelle n'est résolue par ce changement de langage : la difficulté de fond - montrer que le complémentaire de $D_K(n)$ n'est pas vide à la limite - est exactement celle que rencontrent Brun et Selberg, et elle bute sur l'obstruction de parité de Selberg (les méthodes de crible pures sont, par construction, insensibles à la parité du nombre de facteurs premiers, ce qui les empêche structurellement de distinguer un nombre premier d'un nombre ayant un nombre pair de facteurs premiers). Formuler $D_K(n)$ en langage topos-théorique ne change rien à cet obstacle : il ne fait que rendre les définitions précises.

La formule de Varin comme fonction caractéristique explicite d'un crible

Proposition : [Identité standard, redémontrée par Varin] [3] : Pour $n, k \in \mathbb{N}^{\times}$,

$$\mathrm{sm}(n,k) := \sum_{l=1}^{k} \exp\Big(\frac{2i\pi nl}{k}\Big) = k \cdot \mathbf{1}_{k|n}.$$

Preuve : [Rappel de la preuve (redonnée dans les termes de Varin)] Posons $\omega = \exp(2i\pi n/k)$. Si $\omega = 1$ (i.e. $k \mid n$), chaque terme de la somme vaut 1 et $\mathrm{sm}(n,k) = k$. Si $\omega \neq 1$, la somme géométrique donne

$$\mathrm{sm}(n,k) = \frac{\omega(\omega^k - 1)}{\omega - 1}.$$

Or $\omega^k = \exp(2i\pi n) = 1$ pour tout n entier, donc le numérateur est nul et $\mathrm{sm}(n,k) = 0$.

3. J'avais demandé à Victor Varin, avec qui j'avais été en contact, s'il pouvait démontrer que la somme de sommes de cosinus dont j'avais découvert qu'elle s'annulait pour les nombres premiers et pour eux uniquement le faisait effectivement ; il m'avait dit que c'était une démonstration élémentaire pour lui, c'était en juillet 2017 (voir ici https://denisevellachemla.eu/VictorVarinKeldyshSumsumcos.pdf).

Constat : Normalisée, cette identité donne exactement la fonction caractéristique du crible principal $\{k\text{-multiples}\}$:

$$\mathbf{1}_{k|n} = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}\exp\Big(\frac{2i\pi nl}{k}\Big),$$

c'est-à-dire une formule explicite, finie, calculable, pour la fonction classifiante restreinte à un objet du topos $\widehat{M}$. La quantité $\mathrm{ssc}(n) = \sum_{k=2}^{n-1} k \cdot \mathbf{1}_{k|n}$ de Varin est alors la somme, pondérée par k, des appartenances de n aux cribles principaux $\Gamma(k)$ pour $2 \leq k \leq n-1$; elle s'annule exactement quand n n'appartient à aucun de ces cribles, c'est-à-dire quand n est premier (ou $n = 1$).

Remarque [Utilité pratique possible] : cette formule fournit un outil de calcul explicite (transformée de Fourier finie / somme de caractères) pour tester l'appartenance à un crible $\Gamma(k)$, donc potentiellement pour implémenter numériquement les tests de crible utilisés dans l'ensemble Cristal, sans passer par une factorisation ou un test de divisibilité direct - un simple calcul de somme trigonométrique finie suffit. On note au passage la parenté avec les sommes de Ramanujan

$$c_k(n) = \sum_{\gcd(l,k)=1} \exp(2i\pi nl/k),$$

qui raffinent cette même idée en isolant les l premiers avec k ; il pourrait être utile d'examiner si une variante de la fonction somme de sommes de cosinus *ssc* construite à partir des sommes de Ramanujan donne une prise plus fine sur le crible double $D_K(n)$ de la Section 3 - mais ceci reste à vérifier, et n'est en rien garanti de lever l'obstruction de parité rappelée plus haut.

Une piste plus spéculative : le classifiant à cinq valeurs de $\mathfrak{Sets}^{(2)}$

Le Lemme 2.7 de Connes-Consani (extrait traduit par Denise Vella-Chemla) montre que le classifiant Ω du topos $\mathfrak{Sets}^{(2)}$ (foncteurs contravariants sur la sous-catégorie $\{[0],[1]\}$ de Δ) a cinq valeurs : `Faux`, `Vrai`, `Erreur`, `Correction`, `Vérification`, correspondant à la position relative d'un élément ϵ et de ses deux faces $\partial_0\epsilon, \partial_1\epsilon$ par rapport à un sous-objet $G' \subseteq G$.

Remarque [Analogie suggestive, non développée] : Le problème rencontré dans la restriction progressive de l'ensemble de la Castafiore (c'est-à-dire le problème de savoir, à un palier de crible donné, si un point-limite doit être classé

`nombre premier` / `nombre composé` / `nombre de primalité indéterminée`,

notamment près des bords d'intervalles où deux paliers successifs se chevauchent) ressemble structurellement à un problème de classification à cinq valeurs plutôt qu'à deux : un candidat peut être "pas encore éliminé mais son prédécesseur au palier immédiat l'était"[4] (analogue à `Vérification`), ou l'inverse (analogue à `Erreur` / `Correction`). Ceci n'est qu'une analogie structurelle repérée à la lecture du Lemme 2.7 ; l'auteur de cette note n'a pas vérifié qu'il existe un foncteur naturel de la construction de l'ensemble de la Castafiore vers $\mathfrak{Sets}^{(2)}$, et ne prétend donc pas que cette piste soit autre chose qu'une direction à explorer.

4. ???.

Bilan

Point	**Statut**
Crible d'Ératosthène $=$ crible de Grothendieck sur $(\mathbb{N}^{\times}, \times)$	Établi, démontré (§ 1)
ensemble Cristal / ensemble de la Castafiore $=$ réalisations géométriques de ce crible	Établi une fois la bonne définition posée (§ 2)
Difficulté "ne pas éliminer p à son propre palier"	Résolue automatiquement par la définition correcte $\Gamma(p) = \{pk : k \geq 2\}$ (§ 2)
$K(n)$ (Goldbach) $=$ double crible décalé	Reformulation correcte, mais strictement équivalente au crible classique (Brun/Selberg) ; obstruction de parité inchangée (§ 3)
Formule de Varin	Fonction caractéristique exacte, explicite, calculable, d'un crible principal (§ 4)
$\mathfrak{Sets}^{(2)}$ et classification à 5 valeurs	Analogie structurelle repérée, non développée, à vérifier (§ 5)

Conclusion [Ce que cette note ne prétend pas]

Aucun élément ci-dessus ne constitue une avancée vers une preuve de la conjecture de Goldbach.

L'apport est un apport de rigueur et de langage : les constructions de Denise Vella-Chemla, jusqu'ici défendues par des arguments géométriques et intuitifs (et parfois, dans les tentatives pilotées par d'autres IA, par des arguments invalides comme celui de la puissance du continu), peuvent désormais être énoncées comme des objets précis de la théorie des topos de Grothendieck, avec définitions, propositions et démonstrations vérifiables.

La difficulté arithmétique de fond - franchir l'obstruction de parité - reste entièrement ouverte.