Dans cette note, la conjecture de Goldbach est présentée d'abord sous l'angle de l'arithmétique des tissus de Lucas ([1]), puis dans le cadre de la combinatoire des mots.

Lorsqu'on étudie la conjecture de Goldbach, on peut se focaliser sur la "première" décomposition de Goldbach d'un nombre pair (i.e. celle qui fait intervenir un nombre premier le plus petit possible comme premier sommant). On va voir ici que le fait d'étudier plutôt la décomposition de Goldbach que l'on appellera "centrale" (i.e. dont les deux nombres premiers sont le plus proche possible de la moitié du nombre pair considéré) peut être intéressant.

On choisit d'associer à chaque nombre pair de la forme $2n = 6x + 4$ une grille de booléens de taille $largeur = x$ sur $longueur = 3x$ définie ainsi : les cases $(i, [(2i + 1)k] + i)$ de la grille valent 1 (pour k strictement positif) et les autres cases de la grille valent 0.

A un nombre pair de la forme $2n = 6x+6$ (resp. $2n = 6x+8$), on associe une grille de booléens dont le remplissage s'effectue de la même façon que ci-dessus mais la grille est de taille x sur $3x + 1$ (resp. $3x + 2$).

Donnons deux exemples : au nombre 28 est associée la grille suivante, de taille 4 sur 12.

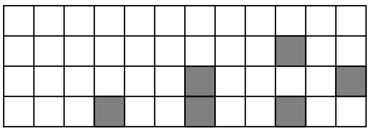

Figure 1: Grille de 28

Au nombre 40 est associée la grille suivante de taille 6 sur 18.

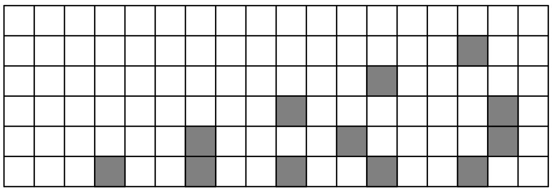

Figure 2: Grille de 40

Calculons maintenant pour chaque colonne le résultat d'un "ou" booléen appliqué à tous les éléments de la colonne. Par exemple, comme résultat du "ou" appliqué aux colonnes de la grille de 40, on obtient la ligne de booléens suivante :

Comme attendu, cette ligne est une suite de booléens associés aux nombres impairs successifs, exprimant le fait que chacun d'eux est premier ou composé (les 3 premiers 0 indiquent que 3, 5 et 7 sont premiers puis le premier 1 indique que 9 est composé, etc).

On obtient cette suite résultante de booléens, bien que l'on ait considéré tous les nombres impairs (et non seulement les impairs premiers), à cause de la symétrie inhérente au problème de Goldbach. Si un nombre composé inférieur à n est non congru à $2n$ selon tout module inférieur à n, son complémentaire, s'il est premier, sera congru à $2n$ selon certains modules.

Imaginons maintenant que l'on "plie" la grille de booléens obtenue selon une ligne verticale centrale (ainsi que le proposait Laisant dans [2]). Si la grille est de longueur paire, la ligne centrale sera entre deux colonnes. Si la grille est de longueur impaire, la ligne centrale sera au milieu d'une colonne. Les figures 3 et 4 visualisent les lignes centrales des grilles de 28 et de 46.

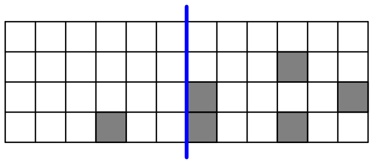

Figure 3: Ligne de pli de 28

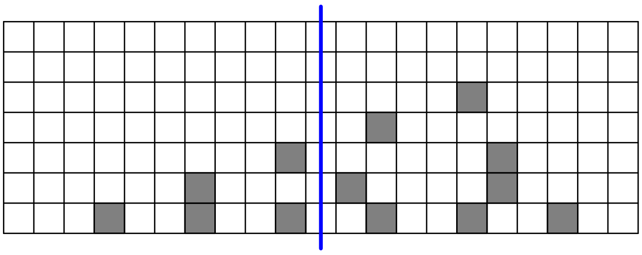

Figure 4: Ligne de pli de 46

Calculons la taille minimale fen d'une fenêtre centrée autour de la ligne centrale et qui a un zéro à ses deux extrémités. Si la ligne est de longueur impaire et que la case centrale contient un 0, alors le nombre pair $2n$ auquel on s'intéresse est un double de premier. La fenêtre est alors de taille 1. Dans les autres cas, $2n = (n - fen + 1) + (n + fen - 1)$ est une décomposition de Goldbach de $2n$.

Voyons quelques exemples : 22 a pour ligne de booléens la ligne suivante. La case centrale contenant un 0, la taille de la fenêtre est 1 et 22 est un double

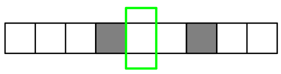

Figure 5: Fenêtre de 22

de premier.

44 a pour ligne de booléens la ligne suivante. La taille minimum de la fenêtre

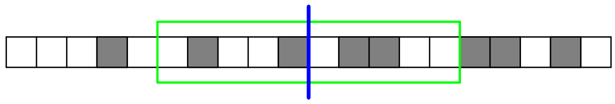

Figure 6: Fenêtre de 44

nécessaire pour obtenir deux 0 symétriques autour de la ligne centrale est 10. $44 = (22-10+1) + (22+10-1) = 13 + 31$ est une décomposition de Goldbach de 44.

Pour prouver la conjecture de Goldbach, il faudrait être capable de prouver que fen est toujours inférieur ou égal à $longueur$.

Etudions maintenant la suite constituée par les tailles des fenêtres qui permettent de trouver la décomposition de Goldbach du nombre pair considérée que l'on appelle "centrale" car ses deux sommants sont le plus proche qu'il est possible de la moitié du nombre pair considéré. Voici son début :

1−2−1−4−3−4−1−2−1−4−3−4−1−2−1−4−3−10−1−6−7−4−5−10−1−2−1−10−5−4−7−6−1−10−3−4−1−2−1−4−3−16−1−6−13−4−9−10−1−8−13−4−5−16−1−2−1−10−5−4−7−6−1−16−3−4−1−2−1−16−5−4−7−6−1−10−3−16−1−6−13−4−15−10−1−8−13−10−5−12−7−8−1−10−3−4−...

La sous-séquence 1−2−1 qui apparaît fréquemment correspond aux nombres premiers jumeaux (si deux nombres premiers sont jumeaux, leurs doubles respectifs vérifient trivialement la conjecture de Goldbach et la taille de la fenêtre qui leur est associée est 1) ; entre eux deux, il y a un double de nombre pair (double du pair qui se situe entre les nombres premiers jumeaux) qui vérifient également la conjecture avec une taille de fenêtre égale à 2 car il est la somme des deux premiers jumeaux en question.

Cette suite semble posséder une propriété surprenante : elle comporte certaines sous-séquences qui sont des palindromes, au sens de la théorie des langages. Par exemple, $1-2-1-4-3-4-1-2-1$ est un palindrome ou bien (à partir de l'élément en position 13 de la suite), la sous-séquence $1-2-1-4-3-10-1-6-7-4-5-10-1-2-1-10-5-4-7-6-1-10-3-4-1-2-1$ est également un palindrome.

Les cinq palindromes que l'on trouve dans la séquence des tailles de fenêtres pour les nombres pairs inférieurs à 100 se situent entre les nombres suivants : entre 10 et 26, entre 14 et 34, entre 16 et 32, entre 22 et 26 et entre 34 et 86. Ces séquences sont entre deux doubles de premier ou entre deux puissances de 2. Mais la condition en question est nécessaire mais non suffisante puisqu'entre 10 et 22, qui sont tous deux des doubles de premiers, on n'a pas de palindrome de la séquence des fenêtres.

Une tentative vaine de trouver un palindrome plus long, notamment sur la séquence de fenêtres calculées pour les nombres pairs jusqu'à 10000, fait abandonner cette voie utilisant la propriété de palindromie (si la palindromie existait toujours, on imagine que la propriété $fen < longueur$ serait fatalement vérifiée par des nombres plus grands si elle l'était par des nombres plus petits...).

Si l'on programme le calcul de la taille de la fenêtre pour les nombres pairs inférieurs à 500, les fenêtres ont une taille qui n'excède jamais 50. Intéressons-nous à la fonction qui à une taille de fenêtre donnée associe les nombres pairs pour qui cette taille de fenêtre permet de trouver une décomposition de Goldbach "centrale". Cette fonction est fournie ci-après :

fen = 1 : 10 14 22 26 34 38 46 58 62 74 82 86 94 106 118 122 134 142 146 158 166 178 194 202 206 214 218 226 254 262 274 278 298 302 314 326 334 346 358 362 382 386 394 398 422 446 454 458 466 478 482
fen = 2 : 12 24 36 60 84 120 144 204 216 276 300 360 384 396 456 480
fen = 3 : 18 30 42 78 90 138 162 198 210 222 258 330 390 450 462
fen = 4 : 16 20 28 32 40 52 68 80 88 100 112 128 140 152 172 200 208 212 220 268 308 320 340 352 388 392 452 460 472
fen = 5 : 54 66 114 126 150 186 270 306 354 474
fen = 6 : 48 72 96 132 156 168 264 288 324 336 372 468 492
fen = 7 : 50 70 130 154 190 266 286 290 370 374 410 434 470 490
fen = 8 : 108 180 192 240 312 348 408
fen = 9 : 102 318 342 378 438 498
fen = 10 : 44 56 64 76 104 124 160 176 184 196 236 244 280 296 316 344 364 376 380 404 440 464 484 496
fen = 11 : 234 282 294 366 402
fen = 12 : 444
fen = 13 : 98 110 170 182 230 238 250 322 338
fen = 14 : 228 252 420
fen = 15 : 174 246 426 486
fen = 16 : 92 116 136 148 164 188 224 232 248 284 304 328 332 356 416 424 428
fen = 17 : 414
fen = 18 : 432
fen = 19 : 242 310 350 418 430
fen = 20 :
fen = 21 :
fen = 22 : 256 260 436 500
fen = 23 :
fen = 24 :
fen = 25 : 406 494
fen = 26 :
fen = 27 :
fen = 28 : 272 368 400 412 448
fen = 29 :
fen = 30 :
fen = 31 : 442
fen = 32 :
fen = 33 :
fen = 34 : 292 488
fen = 35 :
fen = 36 :
fen = 37 :
fen = 38 :
fen = 39 :
fen = 40 : 476

fen = 41 :
fen = 42 :
fen = 43 :
fen = 44 :
fen = 45 :
fen = 46 :
fen = 47 :
fen = 48 :
fen = 49 :
fen = 50 :

On observe certaines régularités : par exemple, les nombres pairs de fenêtre 2 sont tous des $12k$. Les $fen = 3$ sont tous des $6(2k + 1)$. Les $fen = 4$ sont tous des $4k$. Les $fen = 5$ sont tous des $6k$. Les $fen = 6$ sont tous des $12k$ et les $fen = 7$ sont tous des $2pq$, p et q premiers impairs. De la même façon qu'Euler a trouvé une formule extraordinaire, basée sur les nombres pentagonaux, qui calcule la somme des diviseurs d'un nombre ([4]), on peut imaginer qu'il existe une formule qui permet de calculer la taille de la fenêtre. Cette formule, si on la trouvait, permettrait de démontrer que la fenêtre est toujours d'une taille très inférieure à la longueur du rectangle. La suite, trivialement, est constituée de la façon suivante : $fen(i) = k \iff fen(i - k + 1) = fen(i + k - 1) = 1$

Si l'on se place dans le champ de la combinatoire des mots (cf Lothaire [3]), on travaille ici sur des mots binaires (les chaînes de booléens) présentant certaines périodicités. Le théorème de Fine et Wilf doit par exemple nous permettre de savoir que le mot binaire associé à un nombre pair ne présente pas de périodicité parce qu'il n'est pas assez long (de longueur $3x$ alors que la périodicité n'est obtenue que pour une longueur supérieure au produit des impairs inférieurs à $2x + 1$ qui est très supérieur à $3x$, x étant la largeur de la grille associée au nombre pair considéré). On connaît également certaines propriétés des mots binaires utilisés ici (elles ne contiennent jamais 3 zéros successifs à part au début, 3, 5 et 7 étant les seuls premiers impairs se suivant de la sorte). Une étude précise de cette référence bibliographique nous permettra peut-être d'en comprendre plus encore.

Idéalement, comme la conjecture "tout pair $2x$ partage avec $2x+6$ au moins l'un de ses décomposants de Goldbach" semble aussi vraie que celle de Goldbach (sic !), il serait esthétique de trouver comment, lors du passage d'une grille à la grille qui a 3 colonnes et une ligne de plus, on conserve au moins un couple de colonnes vides symétriques par rapport à la ligne centrale.

Bibliographie

[1] A.M. Decaillot, *L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation*, Revue d'histoire des mathématiques, 4, 1998, p. 191-236.
[2] C.A. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Ed. Bulletin de la S.M.F., n°25, p.108, 1/12/1897.
[3] M. Lothaire, *Combinatorics on words*, Ed. Cambridge University Press, 1997.
[4] L.Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport*

à la somme de leurs diviseurs, p.241-253 Commentatio 175 indicis Enestroemiani - Bibliothèque impartiale 8, 1751, p. 10-31 http://portail.mathdoc.fr/cgi-bin/oetoc?id=OE$_{E}ULER_{12}$