Transcription de passages extraits de la leçon inaugurale d'Alain Connes [1] trouvés sur un réseau social à large audience

Donc le cas commutatif, si vous voulez, le cas classique, conduit exactement à la théorie de l'intégration de Lebesgue. Mais l'importance mathématique de la théorie générale des algèbres de von Neumann résulte de l'existence d'espaces qui sont des espaces naturels, pour lesquels la théorie de Lebesgue est en fait inadaptée. Et si on considérait ces espaces du point de vue de la théorie de Lebesgue, du point de vue de la théorie classique, en fait, on les considérerait comme des espaces pathologiques. On serait conduit à les éliminer.

Par contre, la théorie des algèbres de von Neumann, non commutative, permet de traiter la théorie de la mesure de ces espaces de manière entièrement satisfaisante. Le prototype d'un tel espace est l'espace des solutions de ce qu'on appelle une équation différentielle, ou, si vous voulez, l'espace des feuilles d'un feuilletage. Pour fixer les idées, considérons un exemple très simple, qui est le feuilletage de Kronecker, qui est défini par l'équation différentielle $dy = \theta dx$, où θ n'est plus un nombre rationnel, mais un nombre qui éventuellement peut être irrationnel. Lorsque ce nombre est irrationnel, vous voyez ce qui va se passer. Ce qui va se produire, c'est que si on regarde une feuille, c'est-à-dire une solution de l'équation différentielle, en fait, elle va commencer par partir de zéro, par exemple, à monter, elle va atteindre le toit, et puis ensuite, par périodicité, elle va se ramener en bas, et elle va continuer comme ça indéfiniment. Et finalement, elle va remplir tout le carré de manière dense. Ce qui fait que si on essayait de regarder l'ensemble des feuilles de ce feuilletage, d'un point de vue topologique ou d'un point de vue classique, on obtiendrait un espace qui est pathologique. Si on essaye de le regarder comme un ensemble, muni des structures classiques, on obtient quelque chose qui est pathologique. En particulier, si on cherchait des fonctions mesurables de cet espace à valeurs réelles ou à valeurs complexes, toute telle fonction serait constante presque partout.

C'est-à-dire que si on essayait, après, d'appliquer la théorie usuelle de l'intégration, d'abord, il n'y aurait pas de fonctions non triviales à intégrer, tous les espaces L^p seraient triviaux, ils seraient réduits aux scalaires. Et donc, on n'obtiendrait rien d'intéressant. On n'obtiendrait rien qui distingue cet espace d'un seul point. L'espace, d'un point de vue classique, est identifié à un seul point. Or, en fait, cet espace correspond à une agèbre de von Neumann qui n'est pas du tout triviale, mais dont le centre, c'est-à-dire la partie commutative, est réduite aux scalaires. Mais l'algèbre elle-même est hautement non commutative. Et cette algèbre, en fait, est une présentation, qui est extrêmement simple : elle est présentée par deux unitaires, U et V, et ces deux unitaires ne commutent pas, mais ils commutent modulo une phase. C'est-à-dire que le produit VU n'est pas égal à UV, mais il est égal à UV modulo une certaine phase, qui est reliée à l'angle θ, qui était introduit dans le feuilletage.

On obtient, dans le cas dont j'ai donné l'exemple ici, le facteur R_{01}, qui était sur la liste des facteurs hyperfinis précédents. C'était le facteur de type II_∞, donc il n'est pas du tout trivial, contrairement aux facteurs de type I.

[1] dont la transcription LaTeX peut être téléchargée ici https://denisevellachemla.eu/acz.html, comme item 56. Denise Vella-Chemla, mars 2025.

Un feuilletage aussi naturel que le feuilletage d'Anosov associé à une surface de Riemann de genre plus grand que 1 donne le facteur très ésotérique, qui était à la fin de la liste, et qui était le facteur R_∞, qui était le facteur de type III_1.

Mais en fait, le but de la théorie n'est pas d'illustrer la théorie des algèbres de von Neumann. Un point extrêmement important est que la théorie de la dimension de Murray et von Neumann contient une découverte fondamentale de Murray et von Neumann : ils avaient découvert que la dimension d'un espace vectoriel n'est pas nécessairement un entier lorsqu'on regarde des géométries qu'ils appelaient les géométries continues mais que cette dimension peut être un nombre réel, positif, arbitraire.