Théorème de Morley et ses extensions aux polygones supérieurs : rigidité affine versus flexibilité des diagonales, Denise Vella-Chemla pilotant gemini, 30 juin 2026

Résumé : cette note formalise une discussion géométrique et algébrique inspirée de la preuve du théorème de Morley par Alain Connes. Nous y examinons la possibilité de généraliser la trisection des angles d'un triangle aux quadrilatères et pentagones quelconques afin d'obtenir des structures régulières (carrés, pentagones réguliers). Nous démontrons l'existence d'une obstruction structurelle majeure liée à la présence des diagonales et aux degrés de liberté affines, et nous relions l'effondrement de la régularité à l'ordre $n = 5$ au théorème d'Abel-Galois.

1. Problématique

J'avais un temps essayé d'obtenir une construction similaire à celle de la démonstration par Alain Connes du théorème de Morley pour obtenir un carré d'un quadrilatère quelconque, ou un pentagone régulier d'un polygone à 5 côtés quelconque (voir les copies d'écran en annexe qui illustrent cela). J'ai essayé d'avoir une explication à mes difficultés en utilisant une IA.

S'il est possible, suivant la démonstration algébrique d'Alain Connes du théorème de Morley, de transformer un triangle quelconque en triangle équilatéral central, il devrait y avoir un moyen similaire de transformer un quadrilatère quelconque en carré et un quintilatère quelconque en pentagone régulier.

Cependant, les simulations numériques et de programmation (notamment via Matplotlib) ne permettent d'obtenir au mieux que des parallélogrammes ou des rectangles pour l'ordre $n = 4$, tandis que pour l'ordre $n = 5$, on n'est pas parvenue à obtenir une figure régulière. Se pose alors la question de savoir si l'obstruction pour $n = 5$ découle de l'impossibilité d'Abel-Galois, et quelle est la forme la plus symétrique "de mieux" que l'on puisse obtenir pour un quadrilatère.

2. Le Modèle de Connes et l'Ordre $n = 4$

Dans sa note, Alain Connes formalise le théorème de Morley en plongeant les sommets du triangle dans le plan complexe $\mathbb{C}$ et en leur associant des rotations affines formelles de la forme $z \mapsto az + b$, liées aux angles de trisection. L'équilatéralité (symétrie d'ordre 3) émerge de la résolvante cyclique associée aux racines cubiques de l'unité, gouvernée par $j = e^{2i\pi/3}$ et l'identité fondamentale :

$$1 + j + j^2 = 0 \quad (1)$$

En transposant scrupuleusement cette démarche à un quadrilatère quelconque $ABCD$ soumis à une **quadrisection** de ses angles, les opérateurs de rotation font intervenir les racines quatrièmes de l'unité $(\pm 1, \pm i)$. L'identité cyclique sous-jacente devient alors :

$$1 + i + i^2 + i^3 = 0 \quad (2)$$

L'application des opérateurs affines projette les quatre sommets libres A, B, C, D sur l'espace des invariants de ces rotations. L'algèbre couple les sommets opposés deux à deux (A avec C, et B

avec D). La structure linéaire annule les termes asymétriques d'ordre impair, ce qui impose géométriquement une contrainte stricte sur la figure centrale obtenue : **ses diagonales se coupent obligatoirement en leur milieu**.

Par conséquent, la forme maximale stable extraite par la méthode de Connes à partir d'un quadrilatère strictement quelconque est un **parallélogramme**. Pour obtenir un rectangle, il faudrait imposer l'égalité des longueurs des diagonales ; pour un carré, leur orthogonalité. L'algèbre affine n'offrant aucun mécanisme métrique pour égaliser des longueurs issues d'un chaos initial asymétrique, le parallélogramme constitue la borne supérieure de régularité.

3. La Rupture Conceptuelle : Rigidité Affine vs Tortue Logo

Du point de vue de la programmation en langage Logo, il n'y a pas de distinction conceptuelle entre les ordres de polygones. La commande intrinsèque locale :

```
Répéter k
    Avance x
    Tourne 360/k
```

produit systématiquement un polygone régulier parfait, que $k = 3$ (triangle équilatéral), $k = 4$ (carré) ou $k = 7$ (heptagone).

Pourquoi ne peut-on obtenir cette invariance de structure pour des polygones ayant davantage de côté par une approche dans le style de cette de la démonstration du théorème de Morley par Connes ? En quoi le fait que le triangle "n'a pas de diagonale" le rend-il si particulier, notamment vis-à-vis de l'idée de faire un "détour" pour aller d'un point à un autre ?

4. La notion de rigidité et d'articulation

La divergence fondamentale entre la tortue Logo et l'approche de Morley-Connes réside dans la direction du processus géométrique. La tortue Logo construit la régularité *ex nihilo* par une règle locale répétée. À l'inverse, l'approche de Connes tente de *découvrir* une régularité intrinsèque cachée au sein d'un polygone désordonné imposé par l'extérieur.

À ce titre, le triangle possède une propriété unique : la **rigidité affine**. Si l'on matérialise un triangle par des barres articulées, sa forme est totalement verrouillée par la longueur de ses côtés. Les angles et les côtés d'un triangle sont intrinsèquement dépendants via la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \tag{3}$$

Il y a une compensation parfaite entre les distorsions angulaires et vectorielles.

Dès l'ordre $n = 4$, le polygone devient une structure **articulée**. On peut modifier ses angles sans changer la longueur de ses côtés (déformation d'un carré en losange), ou modifier ses côtés sans changer ses angles (rectangles de proportions variables). Cette liberté est conférée par l'absence de fixation interne : les **diagonales**.

5. La topologie des chemins et le "détour"

Sur le plan de la topologie des chemins au sein de la figure :

- Dans un triangle ABC, pour aller de A à C, il existe un unique chemin direct (AC) et une unique alternative locale passant par le sommet restant $(A \to B \to C)$. Le système de relations géométriques est saturé.
- Dans un quadrilatère $ABCD$, pour aller de A à C, il existe deux chemins indépendants contournant la figure : le chemin par le haut $A \to B \to C$ et le chemin par le bas $A \to D \to C$.

Ce choix de chemins crée une "surface de liberté" — le *détour* par la diagonale AC — qui agit comme une fuite d'énergie algébrique. Les asymétries des côtés du quadrilatère initial "débordent" dans les équations et ne peuvent plus être résorbées par les seules rotations des angles.

6. L'Obstruction d'Abel-Galois à l'Ordre $n = 5$

Pour le quintilatère ($n = 5$), l'effondrement complet de la convergence numérique (*"la cata"*) s'explique par une obstruction algébrique profonde directement liée au **théorème d'Abel-Galois**.

Dans le triangle ($n = 3$), le processus implique une trisection (extension de degré 3, résoluble). Pour le quadrilatère ($n = 4$), il s'agit d'une quadrisection (extension de degré 4, résoluble par radicaux), ce qui permet aux structures géométriques d'aboutir à des formes closes et régulières (le parallélogramme).

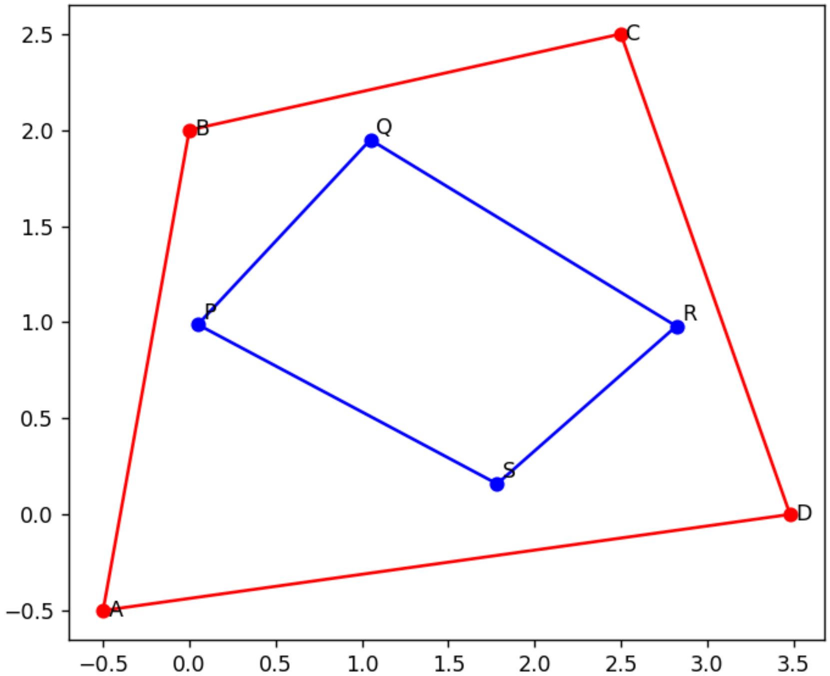
Pour le pentagone ($n = 5$), l'intersection des droites issues de la pentasection des angles nécessite la résolution d'un système polynomial dont l'équation résolvante générale est de degré supérieur ou égal à 5. Le théorème d'Abel-Galois démontre qu'un polynôme général de degré ≥ 5 n'est pas résoluble par radicaux.

En géométrie algébrique, cela signifie que le groupe de Galois des équations aux intersections devient le groupe symétrique S_5 (ou un sous-groupe non résoluble). La décomposition en sous-groupes affines commutatifs, qui permettait l'annulation exacte des asymétries chez Alain Connes, est brisée. Les coordonnées du pentagone central ne peuvent pas s'exprimer comme des fonctions rationnelles ou des radicaux simples des sommets initiaux, expliquant le comportement chaotique et l'absence de fermeture régulière constatés empiriquement.

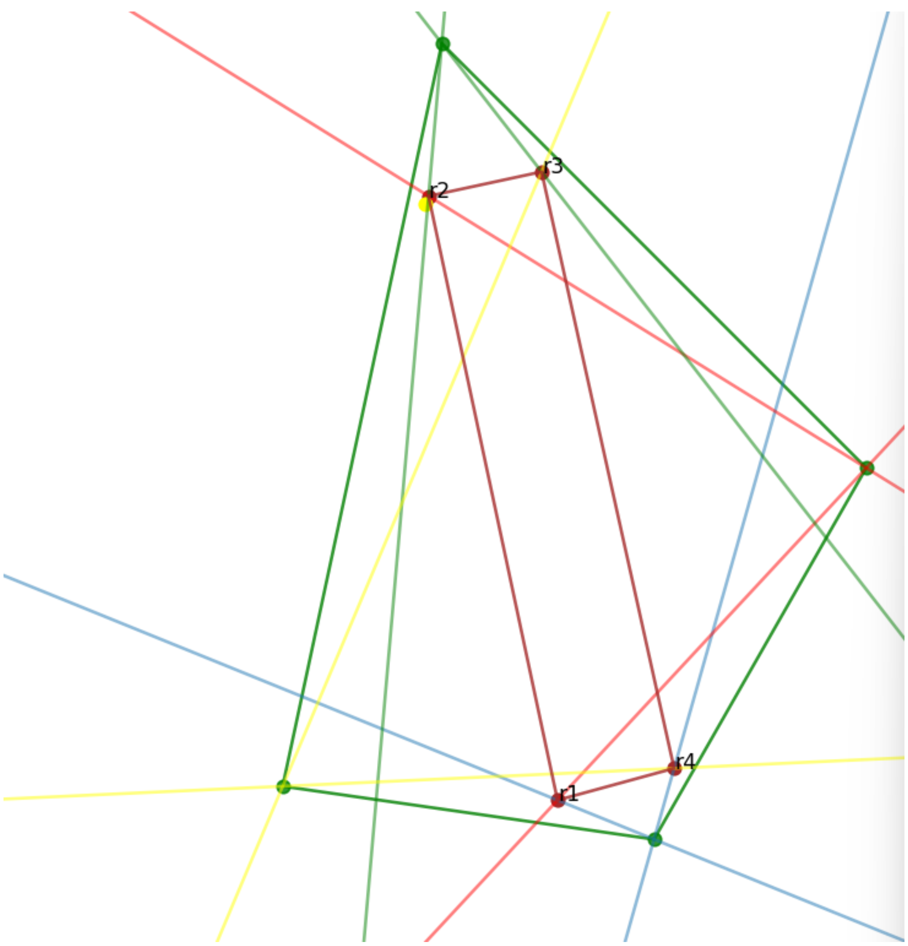
7. Conclusion

Le théorème de Morley apparaît ainsi comme une magnifique anomalie poétique, exclusive au triangle en raison de sa rigidité affine absolue. Dès que $n \geq 4$, la flexibilité géométrique introduite par les diagonales brise la symétrie parfaite, laissant le parallélogramme comme l'ultime vestige de régularité accessible par les méthodes affines linéaires.

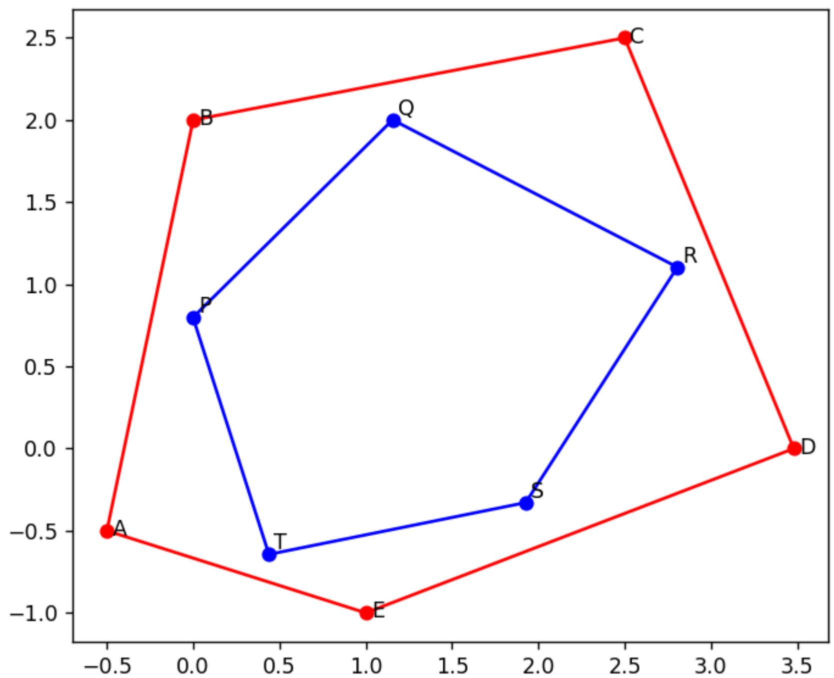
Annexe : quelques essais pour régulariser des polygones de nombre de côtés 5 et 6



2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
A
B
C
D
P
Q
R
S



r1
r2
r3
r4


A
B
C
D
E
P
Q
R
S
T
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5