

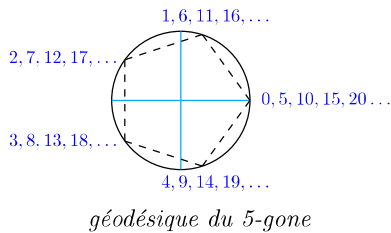
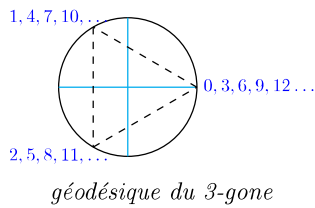
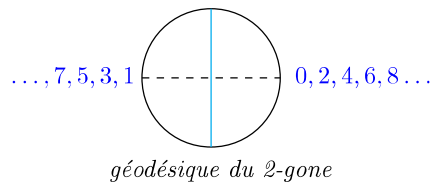
**Se promener sur la sphère** (DV, 11/5/2015)

On aimerait associer à chaque entier son "mot de restes modulaires", i.e. le mot constitué de ses restes dans les divisions par l'infinité des nombres premiers. Par exemple, le mot associé à 11 est 1, 2, 1, 4, 0, 11, 11, 11, ... (1<sup>er</sup> reste mod 2, 2<sup>ème</sup> reste mod 3, 3<sup>ème</sup> reste mod 5, 4<sup>ème</sup> reste mod 7, 5<sup>ème</sup> reste mod 11 (donc 0), puis restes suivants mod tout premier strictement supérieur à 11 tous égaux à 11).

On "positionne" les différents restes d'un nombre entier  $n$  sur la sphère de la façon suivante :

- à chaque premier  $p$ , on associe un plan vertical passant par les pôles, séparé du plan de Greenwich par un angle de rotation de  $\frac{1}{p}$  ;
- sur ce plan vertical, on dessine sur la géodésique qui est l'intersection de ce plan et de la sphère un  $p$ -gone (un segment de droite pour  $p = 2$ , un triangle pour  $p = 3$ , un pentagone pour  $p = 5$ , un heptagone pour  $p = 7, \dots$ ). Tous ces  $p$ -gones ont un sommet sur le point  $(1, 0)$  (enfin, qui serait  $(1, 0)$  si on tournait ce plan pour le ramener sur le plan de Greenwich) qui "codera" tous les entiers divisibles par  $p$  (et puis sur le point suivant du  $p$ -gone, les nombres congrus à 1, sur le point suivant les congrus à 2, ..., sur le  $p - 1$ <sup>ième</sup> point les congrus à  $p - 1 \pmod p$ .

Exemples de géodésiques :



Ainsi, chaque entier est représenté par une infinité de points de la sphère dans l'infinité des "plans de restes". Du coup, les nombres premiers, n'étant divisibles que par eux-mêmes, ont leur ensemble de points qui ne contient qu'un seul point sur l'équateur.

Utiliser les nombres complexes

A un nombre complexe  $a + ib$ , on peut faire correspondre une matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On peut aussi voir le nombre complexe  $\cos\theta + isin\theta$  comme codant la combinaison d'une rotation d'angle  $\theta$  et d'une homothétie qui multiplie les normes des vecteurs par la norme du complexe  $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$ .

Si on utilise la représentation proposée ci-dessus, on peut voir chaque nombre entier comme une composition infinie d'homothéties et rotations sur la sphère. Il faudrait pousser plus avant pour comprendre à quelles transformations correspond le fait d'avoir comme on l'a vu "un seul point sur l'équateur", dans la mesure où cette caractéristique suffit à distinguer les nombres premiers des nombres composés. Il faudrait voir aussi si cette représentation permet de modéliser "agréablement" l'addition et la multiplication des entiers.