Borne de Linnik–Heath-Brown pour le primoriel jusqu'à $\sqrt{n}$
Denise Vella-Chemla pilotant l'ia lumo, 29 novembre 2026

On définit :

$$q = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ 3 \le p \le \sqrt{n}}} p.$$

On a $\log q = \sum_{p \le \sqrt{n}} \log p = \theta(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}$.

On a $q \approx e^{\sqrt{n}}$, donc la borne de Linnik–Heath-Brown donne un plus petit premier $p \lesssim e^{5{,}5\sqrt{n}}$.

Voici le tableau (pour les trois premières lignes, valeurs exactes ; au-delà, ce sont des estimations via $\theta(\sqrt{n}) \approx \sqrt{n}$, précises à quelques pour cent près) :

n	$\sqrt{n}$	$q = \prod_{p \le \sqrt{n}} p$	borne $q^{5,5}$
10^2	10	210 [1] (exact)	$\approx 6 \times 10^{12}$
10^3	31,6	$200\,560\,490\,130 \approx 2 \times 10^{11}$ (exact, 31#)	$\approx 1{,}4 \times 10^{62}$
10^4	100	$97\# \approx 2{,}3 \times 10^{36}$ (exact)	$\approx 10^{200}$
10^5	316	$\approx 2 \times 10^{123}$	$\approx 5 \times 10^{678}$
10^6	1 000	$\approx 10^{415}$	$\approx 10^{2283}$
10^7	3 162	$\approx 10^{1336}$	$\approx 10^{7350}$
10^8	10 000	$\approx 10^{4299}$	$\approx 10^{23640}$
10^9	31 623	$\approx 10^{13643}$	$\approx 10^{75035}$
10^{10}	100 000	$\approx 10^{43298}$	$\approx 10^{238100}$

Primoriel $q = \prod_{p \le \sqrt{n}} p$ et borne de Linnik–Heath-Brown $q^{5,5}$.

1. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ est le primoriel 7#, produit des premiers ≤ 10.