

Nouvelles fonctions propres pour la partie négative du spectre prolate de Connes-Moscovici

Jean-Pierre Ramis, Françoise Richard-Jung, Jean Thomann

Résumé. En 1880, C. Niven, motivé par un problème de conduction de la chaleur, a étudié l'équation de Helmholtz sur un ellipsoïde de révolution. Nous considérons seulement le cas d'un ellipsoïde allongé "verticalement" (prolate). Les coordonnées sphéroïdales correspondantes conduisent à une séparation du laplacien adaptée au problème. On obtient ainsi trois équations différentielles ordinaires. L'une est élémentaire. Dans le cas non sphérique, les deux autres sont deux copies de la même équation. Cette équation est appelée équation prolate sphéroïdale. En 1998, Alain Connes a découvert une extension auto-adjointe $W_{\Lambda,sa}$ de l'opérateur prolate (d'ordre zero) W_{Λ} . En 2021, Alain Connes et Henri Moscovici ont découvert que la restriction de $W_{\Lambda,sa}$ au complément de l'intervalle fini $[-\Lambda, \Lambda]$ admet (à côté d'une copie du spectre classique, qui est positif) des valeurs propres négatives dont le comportement ultraviolet reproduit, pour $\Lambda = \sqrt{2}$, celui des carrés des zéros (décalés) de la fonction zeta de Riemann. Dans cette note nous utilisons une approche différente de celle de Connes-Moscovici (CM). À la place de la théorie de Sturm-Liouville, nous utilisons la théorie des fonctions analytiques. Ceci nous permet en particulier de définir explicitement des déterminants spectraux qui sont des fonctions entières d'ordre $\leq 1/2$ dont les zéros sont les valeurs propres. Nous en déduisons un calcul numérique efficace de ces valeurs propres. Nous avons aussi découvert une nouvelle définition, équivalente mais très simple, de la partie non-classique du CM-spectre. Les valeurs propres correspondantes sont les valeurs propres naïves de l'opérateur sur l'axe imaginaire (c'est-à-dire que les fonctions propres sont bornées sur cet axe). Nous montrons que ces valeurs propres sont négatives, ce qui avait été conjecturé par Connes et Moscovici, et nous obtenons une méthode très rapide et très efficace de calcul de ces valeurs propres.

1. Présentation

1.1. Les fonctions sphéroïdales prolates

En 1880, C. Niven, motivé par un problème de conduction thermique, étudie l'équation de Helmholtz $(\Delta + k)\psi = 0$ sur un sphéroïde. Un sphéroïde non sphérique peut être prolate (un ballon de rugby) ou oblate (sphère aplatie dans l'autre sens). Nous ne considérons que le cas prolate. Il existe une séparation des variables du Laplacien en coordonnées sphéroïdales adaptée au problème. On obtient alors trois équations différentielles ordinaires. L'une est élémentaire. Dans le cas non sphérique, les deux autres sont deux copies de la même équation (les changements sont le nom de la variable et les domaines de résolution). Cette équation est appelée équation sphéroïdale prolate. L'opérateur correspondant est

$$\mathcal{S}_{\tau,m} := (x^2 - 1) \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + 2x \frac{d}{dx} + \left(\tau^2(x^2 - 1) - \frac{m^2}{x^2 - 1} \right)$$

Référence : <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/mathematique/item/10.5802/crmath.780.pdf>.

J.-P. Ramis : Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France, Institut de France (Académie des Sciences), France ; F. Richard-Jung : Université Grenoble Alpes, Laboratoire Jean Kuntzmann, CNRS, UMR 5224, 150 place du Torrent, IMAG-CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9, France; J. Thomann : Université de Strasbourg, 67084 Strasbourg Cedex, France ;

Manuscrit reçu le 25 avril 2025, accepté le 7 juillet 2025.

Traduction : Denise Vella-Chemla, octobre 2025.

où $\tau^2 \in \mathbb{R}_+$ et¹ $m \in \mathbb{N}$; m est l'ordre. Nous considérerons uniquement le cas d'ordre zéro, en posant $\mathcal{S}_{\tau,0} = \mathcal{S}_\tau$. Pour nos besoins, il est préférable d'effectuer un “décalage des valeurs propres” et nous considérerons l'opérateur

$$\mathcal{D}_\tau = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx} + \tau^2 x^2, \quad \tau \in \mathbb{C}$$

et sa version spectrale $\mathcal{D}_\tau - \mu = 0$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Cet opérateur polynomial possède trois points singuliers sur la sphère de Riemann : deux points singuliers réguliers à $x = \pm 1$ et un point irrégulier (de rang de Katz un) à l'infini. Les points singuliers réguliers sont logarithmiques (les deux exposants ne font qu'un) et les exposants exponentiels à l'infini sont $\pm i\tau$.

Dans [8], A. Connes et H. Moscovici utilisent une version légèrement différente de l'opérateur sphéroïdal prolata :

$$W_\Lambda = -\frac{d}{dx} \left((\Lambda^2 - x^2) \frac{d}{dx} \right) + (2\pi\Lambda x)^2.$$

Le changement de variable $x = \Lambda\tilde{x}$ et $\tilde{x} = x$ réduit W_Λ à $\mathcal{D}_\tau$, où $\tau = 2\pi\Lambda^2$. Les exposants exponentiels à l'infini de W_Λ sont $\pm 2i\pi\Lambda$. Les opérateurs $\mathcal{D}_\tau$ et W_Λ sont invariants par la symétrie $x \mapsto -x$.

Les valeurs propres classiques de $\mathcal{D}_\tau$ sont, par définition, les $\mu \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une solution f de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ bornée sur $[-\Lambda, \Lambda]$. On appelle alors f une fonction d'onde sphéroïdale prolata (FOSP) ; $f \in L^2(\mathbb{R})$ et elle s'étend en une fonction entière. Les valeurs propres sont réelles et positives. Le nombre de zéros de la $n^{\text{ième}}$ fonction propre sur $[-\Lambda, \Lambda]$ est n .

Les applications des fonctions sphéroïdales sont nombreuses. Les monographies de base sont [14, 17, 32] et la plus récente [20]. Vers 1960, un groupe des Bell Labs, autour de David Slepian, découvrit une nouvelle application de ces fonctions en lien avec la théorie du signal. Ils rédigèrent une série d'articles sur le thème général “*Fonctions d'onde sphéroïdales prolates, analyse de Fourier et incertitude*” [30,31].

La transformée de Fourier $\mathbb{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est définie par

$$f(x) \mapsto \mathbb{F}f = \tilde{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi xy} dx.$$

Nous utiliserons également une variante $\mathbb{F}_c$ (Fourier-Laplace), en remplaçant $2i\pi$ par $c \in \mathbb{C}^*$. Le cas de Laplace est $c = 1$.

Il est impossible de concentrer simultanément une fonction dans les espaces physique et fréquentiel. Paradoxalement, c'est possible dans le “monde réel” ! Claude E. Shannon a posé la question suivante : “*Dans quelle mesure les fonctions confinées à une bande passante finie sont-elles également concentrées dans le domaine temporel ?*”. La réponse à cette question est cruciale pour la transmission des signaux et pour avoir l'explication du paradoxe mentionné ci-dessus. Un groupe des

¹Cette contrainte découle du problème physique. Il existe une famille plus générale avec $m \in \mathbb{C}$ et $\tau \in \mathbb{C}$ [17].

Laboratoires Bell a répondu à la question de Shannon. Le point central est lié aux valeurs propres d'un opérateur de convolution Q à noyau cardinal sinusoïdal. Les premières valeurs propres sont très proches de 1, puis chutent brutalement jusqu'à de très faibles valeurs positives. Les premières fonctions propres ont une bande passante finie et sont concentrées au maximum dans un intervalle de temps fini. On note :

$$K_\Lambda(x, y) = (2\pi\Lambda(x - y)) = \frac{\sin(2\pi\Lambda(x - y))}{2\pi\Lambda(x - y)}$$

Alors $f \mapsto \int_{-\Lambda}^{\Lambda} K_\Lambda(x, y)f(x)dx$ définit l'opérateur de convolution sinus cardinal

$$Q_\Lambda : L^2([-\Lambda, \Lambda]) \longrightarrow L^2([-\Lambda, \Lambda]).$$

Il est auto-adjoint et compact. Son spectre est discret, ses valeurs propres $\lambda_n(\Lambda)$ sont simples, réelles positives et :

$$1 > \lambda_1(\Lambda) > \lambda_2(\Lambda) > \dots > \lambda_n(\Lambda) > \dots$$

Si ψ_n est une fonction propre, alors la valeur propre $\lambda_n(\Lambda)$ peut être interprétée comme sa concentration sur l'intervalle $[-\Lambda, \Lambda]$:

$$\lambda_n(\Lambda) = \frac{\|\psi_n\|_{[-\Lambda, \Lambda]}^2}{\|\psi_n\|_{\mathbb{R}}^2}$$

L'opérateur de limitation d'espace $P_\Lambda : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$, est défini par $P_\Lambda f = 1_{[-\Lambda, \Lambda]}f$. On pose $\hat{P}_\Lambda = \mathbb{F}P_\Lambda\mathbb{F}^{-1}$. C'est l'opérateur de limitation de bande. On a $P_\Lambda\hat{P}_\Lambda P_\Lambda = 2\Lambda Q_\Lambda$; $P_\Lambda\hat{P}_\Lambda P_\Lambda$ est appelé l'opérateur d'angle. Bien que les projections P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ ne commutent pas exactement, même pour Λ grand, l'angle entre ces projections se comporte suffisamment bien (cf. [7]).

Pour $\Lambda > 0$, nous définissons l'espace de Sonin comme le sous-espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $P_\Lambda f = \hat{P}_\Lambda f = 0$.

À l'exception des premières, les valeurs propres λ_n de Q_Λ sont très petites. Le calcul numérique des fonctions propres pose alors un problème. Pour tenter de surmonter cette difficulté, l'équipe des Bell Labs a découvert un miracle : l'opérateur Q_Λ commute avec l'opérateur prolate W_Λ . C'est un heureux hasard (comme l'a souligné Slepian [31]). Les fonctions propres de $Q_\Lambda = \frac{1}{2\Lambda}P_\Lambda\hat{P}_\Lambda P_\Lambda$ sont alors les FOSP, qui sont facilement calculables numériquement.

1.2. Prolate et zêta

En 1998, Alain Connes a découvert une extension auto-adjointe $W_{\Lambda,sa}$ de l'opérateur prolate W_Λ . L'opérateur $W_{\Lambda,sa}$ commute avec $P_\Lambda, \hat{P}_\Lambda$ et $\mathbb{F}$. En 2021, Alain Connes et Henri Moscovici ont découvert que la restriction de cette extension de l'opérateur différentiel prolate au complément de l'intervalle fini admet (outre une réplique du spectre positif classique) des valeurs propres négatives dont le comportement dans l'ultraviolet (UV), pour $\Lambda = \sqrt{2}$, reproduit celui des carrés de zéros de la fonction zêta de Riemann. De plus, ils montrent que, pour $\Lambda > 0$, les fonctions propres correspondantes appartiennent à l'espace de Sonin.

En 1999, A. Connes a décrit l’“heureux accident” en relation avec son interprétation spectrale des zéros critiques de la fonction zêta de Riemann [3,8]. Plus tard, A. Connes et C. Consani ont démontré la positivité de Weil à la place archimédienne [5], en utilisant la contraction de l’action de mise à l’échelle appliquée à l’espace de Sonin. Ceci concorde avec le fait que les CM-fonctions propres non classiques appartiennent à l’espace de Sonin. Des fonctions sphéroïdales prolates sont également utilisées dans [4]. Citons [6] : “Le rôle de l’opérateur prolata est crucial dans les accords observés avec les zéros de zêta (infrarouge et ultraviolet).”

1.3. Nos objectifs

Notre objectif initial était d’étudier le CM-spectre, en étendant (en partie) l’approche de [17] pour le spectre classique. En particulier, nous avons prévu d’introduire une définition équivalente du CM-spectre prolata en utilisant une (nouvelle) notion générale de spectre analytique. Nous verrons que, dans la lignée de [17] pour le spectre classique, cela permet une définition explicite des déterminants spectraux qui sont des fonctions entières d’ordre $\leq 1/2$ dont les zéros sont les valeurs propres, et également des calculs précis de ces valeurs propres. En essayant, par une approche analytique complexe, de mieux comprendre le fait que les CM-fonctions propres non classiques appartiennent à l’espace de Sonin, ce qui est particulièrement important en relation avec les zéros de zêta, nous avons découvert une nouvelle définition équivalente, très simple, de la partie non classique du CM-spectre. Les valeurs propres correspondantes sont les valeurs propres naïves de l’opérateur sur l’axe imaginaire. Nous démontrons qu’elles sont négatives et obtenons une méthode de calcul très rapide et efficace. Inspirée du “phénomène du rideau” de J. L. Callot [2]. Pour un opérateur rationnel du second ordre formellement symétrique $-\frac{d}{dx}p\frac{d}{dx} + q$, il existe (au moins...) trois notions de spectre:

- (1) spectre naïf (les fonctions propres sont bornées aux extrémités) ;
- (2) spectre défini par une extension auto-adjointe ;
- (3) spectre analytique.

Les deux premières approches sont classiques, mais la notion de spectre analytique est nouvelle (cf. 2.1.4 ci-dessous). Nous allons décrire ces spectres pour l’opérateur prolata d’ordre zéro et les comparer.

Parmi ces spectres figurent le spectre classique, le nouveau spectre défini par Connes et Moscovici (qui contient une réplique du spectre classique) ou CM-spectre, et un nouveau spectre que nous avons découvert. Plus précisément, ce nouveau spectre coïncide comme ensemble avec le spectre négatif de Connes-Moscovici, mais nous le définissons d’une manière complètement différente et *les fonctions propres sont différentes*². Comme indiqué précédemment, cela permet de prouver que les CM-valeurs propres non classiques sont négatives et de calculer efficacement ces valeurs propres.

²Les valeurs limites des extensions analytiques pratiques de ces fonctions sont les CM-fonctions propres.

2. Spectres analytiques de l'opérateur prolate

2.1. Solutions locales de W_Λ

2.1.1. Solutions locales aux points singuliers réguliers

Les solutions locales de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ à $x = \pm 1$ sont données dans [17, 3.12, phrase 5, p. 222]. En adaptant les notations, on obtient les solutions locales de W_Λ pour $x = \pm \Lambda$. Elles font intervenir des logarithmes.³

$$\begin{cases} y_I(x) &= \mathfrak{P}_I(\Lambda - x), \quad \mathfrak{P}_I(0) = 1, \\ y_{II}(x) &= \mathfrak{P}_{II}(\Lambda - x) - \frac{1}{2\Lambda} \mathfrak{P}_I(\Lambda - x) \log(\Lambda - x), \end{cases} \quad (1)$$

où $\mathfrak{P}_I(\xi), \mathfrak{P}_{II}(\xi)$ sont des fonctions analytiques pour $|\xi| < 2\Lambda$. Wronskien : $W(y_I, y_{II}) = \frac{1}{\Lambda^2 - x^2}$. En $x = -\Lambda$, $x \mapsto -x$ dans les formules ci-dessus.

Étant donnée une direction $d \in S^1$ en $x = \Lambda$, nous considérons l'espace $\text{Sol}_{\Lambda, d}$ des solutions sur un germe de secteur bissecté par d . Par continuation analytique dans le sens antihoraire le long d'une boucle simple autour de Λ , nous obtenons un automorphisme linéaire de $\text{Sol}_{\Lambda, d}$, l'automorphisme de monodromie. Il est unipotent, c'est-à-dire qu'il admet une unique droite de fonctions propres : $\mathbb{C}y_I$.

2.1.2. Solutions locales à l'infini

Il existe une base

$$\left(\widehat{y}^- = \frac{e^{-2i\pi\Lambda x}}{x} \widehat{v}^-, \widehat{y}^+ = \frac{e^{2i\pi\Lambda x}}{x} \widehat{v}^+ \right)$$

des solutions formelles de $W_\Lambda - \mu$ à l'infini, où $\widehat{v}^\mp = \Sigma V_n^\mp x^{-n}$, avec $V_0^- = 1, V_0^+ = 1$. Les séries formelles $\widehat{v}^\mp$ sont divergentes et 1-sommables dans toutes les directions, sauf $i\mathbb{R}_-$ pour $\widehat{v}^-$ et $i\mathbb{R}_+$ pour $\widehat{v}^+$. La somme y^- de $\widehat{y}^-$ dans la direction $i\mathbb{R}_+$ est sous-dominante dans le demi-plan supérieur $\Pi^+ = \{\Im x > 0\}$. La somme y^+ de $\widehat{y}^+$ dans la direction $i\mathbb{R}_-$ est sous-dominante dans le demi-plan inférieur $\Pi^- = \{\Im x < 0\}$.

Si nécessaire, nous préciserons les notations : $\widehat{y}_{\tau, \mu}^\pm, y_{\tau, \mu}^\pm$.

2.1.3. Lignes de solutions distinguées

Il existe des lignes de solutions analytiques ou sectorielles locales de $W_\Lambda - \mu$ aux trois points singuliers et au point 0, qui n'est pas singulier mais est un point fixe pour la symétrie $x \mapsto -x$ de l'opérateur W_Λ . Par définition :

- (1) En $x = \pm \Lambda$, il existe une unique droite distinguée : l'ensemble des germes des solutions analytiques. Elle est $\mathbb{C}y_I(x)$, respectivement $\mathbb{C}y_I(-x)$;

³On est dans le cas résonant de la méthode de Frobenius.

(2) À l'infini, il existe deux paires de droites distinguées formelles. On rappelle que

$$\widehat{y}^- = \frac{e^{-2i\pi\Lambda x}}{x} \widehat{v}^-, \quad \widehat{y}^+ = \frac{e^{2i\pi\Lambda x}}{x} \widehat{v}^+.$$

Ces paires sont alors⁴

$$(\mathbb{C}\widehat{y}^-, \mathbb{C}\widehat{y}^+) \quad \text{et} \quad (\mathbb{C}(\widehat{y}^- - \widehat{y}^+), \mathbb{C}(\widehat{y}^- + \widehat{y}^+)).$$

Si un germe du secteur V est bissecté par une direction d , alors une droite distinguée de solutions sur V est une somme⁵ d'une droite formelle de direction d lorsque cette somme existe⁶ ;

(3) En $x = 0$, les droites distinguées de solutions sont définies respectivement comme l'ensemble des germes de solutions paires et l'ensemble des germes de solutions impaires.

2.1.4. Solutions spéciales et spectres analytiques

Par définition, une solution spéciale⁷ de $W_\Lambda - \mu$ est la donnée d'un chemin continu simple γ joignant deux des trois points $\pm\Lambda, 0$ ou l'un de ces points à⁸ (∞, d) ($d \in S^1$), ou (∞, d_1) à (∞, d_2) et d'une solution f reliant le long de γ deux solutions distinctes (non triviales) à l'origine et à l'extrémité. Si $\mu \in \mathbb{C}$ est tel qu'il existe une solution spéciale, nous dirons qu'elle est une valeur propre du spectre analytique défini par les deux points et γ , et que f est la fonction propre correspondante.

3. Quelques résultats de A. Connes et H. Moscovici

3.1. Spectre de l'extension auto-adjointe de W_Λ

Nous rappelons quelques résultats de [8].

En 1998, Alain Connes a introduit une extension auto-adjointe $W_{\Lambda, \text{sa}}$ de l'opérateur prolate W_Λ . Plus tard, en 2016, Katsnelson a décrit toutes les extensions auto-adjointes de la restriction de W_Λ à $] -\Lambda, \Lambda[$ et a démontré l'existence d'une unique extension auto-adjointe commutant avec la transformée de Fourier $\mathbb{F}$ [15].

Nous considérons W_Λ comme un opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$ dont le cœur est l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Sa clôture par la norme du graphe est $W_{\Lambda, \text{min}}$ et $W_{\Lambda, \text{max}} = W_{\Lambda, \text{min}}^*$, ce dernier ayant pour domaine

$$\text{Dom}(W_{\Lambda, \text{max}}) = \{\xi \in L^2(\mathbb{R}) \mid W_\Lambda \xi \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Le domaine de $W_{\Lambda, \text{sa}}$ est constitué des éléments $\xi \in \text{Dom}(W_{\Lambda, \text{max}})$ vérifiant certaines conditions aux limites en $\pm\Lambda$ et en $\pm\infty$ (conditions [17], [18], [19] de [8]). Nous rappelons la condition en $\pm\Lambda$, soit

⁴La deuxième paire correspond au cas impair, respectivement aux solutions formelles paires.

⁵Au sens de la sommabilité borélienne ou de la 1-sommabilité.

⁶Deux telles droites existent sauf lorsque $d = \mathbb{R}_\pm i$.

⁷Ce concept a été introduit par M. Klimes, E. Paul et le premier auteur dans le contexte plus général des équations différentielles linéaires associées aux équations de Painlevé VI et V (16,22).

⁸On note (∞, d) un point du diviseur de l'éclatement réel de la sphère de Riemann à l'infini et γ est un chemin continu sur cet éclatement réel, cf. [22].

[17] :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\Lambda} (x^2 - \Lambda^2) \partial_x \xi(x) = 0. \quad (*)$$

Nous utilisons la base (y_I, y_{II}) , cf. (1).

Lemme 1. *Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Pour une solution ξ de $W_\Lambda - \mu$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\Lambda\}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) ξ satisfait la condition $(*)$ en Λ ;
- (ii) si, à droite (resp. à gauche) de Λ , ξ est induit par la solution locale $ay_I + by_{II}$, alors $b = 0$ (c'est-à-dire que la solution locale est non logarithmique) ;
- (iii) ξ est borné “en Λ ”.

Il existe une solution similaire. énoncé à $-\Lambda$.

Lemme 2. *Soit $\mu \in \mathbb{R}$ une valeur propre non classique de $W_{\Lambda, \text{sa}}$ et ϕ une fonction propre correspondante. Alors :*

- (i) ϕ est identiquement nul sur $] -\Lambda, \Lambda[$;
- (ii) la dimension de l'espace propre E_μ est un ;
- (iii) la transformée de Fourier $\mathbb{F}\phi$ est identiquement nulle sur $] -\Lambda, \Lambda[$; ϕ appartient à l'espace de Sonin.

Tous les points extrêmes sont LC dans la classification de Weyl. Les extrémités $\pm\Lambda$ sont LCNO (non oscillatoires), tandis que les extrémités $\pm\infty$ sont LCO (oscillatoires).

Nous rappelons quelques résultats de [8] (cf. Théorème 1.6, Corollaire 1.7 et 6, B) et ajoutons quelques compléments.

Théorème 3. *On suppose $\Lambda \in \mathbb{R}$ et on note $W_{\Lambda, \text{sa}} = W_{\text{sa}}, W_{\Lambda, \text{min}} = W_{\text{min}}$.*

- (i) *L'opérateur W_{sa} est auto-adjoint et commute avec la transformée de Fourier $\mathbb{F}$.*
- (ii) *W_{sa} commute avec les projections P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$ et est la seule extension auto-adjointe de W_{min} commutant avec P_Λ et $\hat{P}_\Lambda$.*
- (iii) *Le spectre de W_{sa} est discret et non borné des deux côtés ; les valeurs propres classiques sont doubles et les valeurs propres non classiques sont simples.*
- (iv) *Il existe au plus un nombre fini de valeurs propres positives non classiques.*

A. Connes et H. Moscovici ont conjecturé que toutes les valeurs propres non classiques sont négatives (cf. [8, 6, B]). Nous démontrons que c'est le cas (cf. Corollaire 15).

Corollaire 4. *Soit ϕ une fonction propre de W_{sa} .*

- (i) Les fonctions propres de W_{sa} sont paires ou impaires.
- (ii) Pour un $\varepsilon > 0$, la fonction ϕ sur $]\Lambda, \Lambda + \varepsilon[$ est la restriction de la somme d'une série analytique solution de $W_\lambda - \mu$ en $x = \Lambda$ et la fonction ϕ sur $]\Lambda - \varepsilon, \Lambda[$ est la restriction de la somme d'une série analytique solution en $x = \Lambda$. Les deux séries sont proportionnelles, mais elles peuvent être différentes, et une discontinuité est possible en Λ .
- (iii) Pour un $\varepsilon > 0$, la fonction ϕ est bornée sur $]\Lambda - \varepsilon, \Lambda[\cup]\Lambda, \Lambda + \varepsilon[$.
- (iv) Le terme principal du “développement asymptotique”⁹ de ϕ à $+\infty$ est proportionnel à $\sin(2\pi\Lambda x)/x$ si ϕ est pair et proportionnel à $\cos(2\pi\Lambda x)/x$ si ϕ est impair.
- (v) Si ϕ est une fonction propre classique, alors sa restriction à $]-\Lambda, \Lambda[$ (resp. $]\Lambda, +\infty[$) est la restriction d'une fonction entière qui est aussi une fonction propre de W_{sa} .
- (vi) Si ϕ est une fonction propre non classique, alors ϕ et $\mathbb{F}\phi$ s'annulent identiquement sur $]-\Lambda, \Lambda[$; ϕ appartient à l'espace de Sonin.

3.2. Relation entre les solutions formelles en Λ et à l'infini

Rappelons qu'il existe une solution formelle en série entière de $W_\Lambda - \mu$ en $x = \Lambda$:

$$\widehat{f}_{\mu, \Lambda} = \mathfrak{P}_I(\Lambda - x) = \sum U_n(x - \Lambda)^n, \quad \text{où} \quad U_0 = 1$$

et une base $(\widehat{y}^- = x^{-1}e^{-2i\pi\Lambda x}\widehat{v}^-, \widehat{y}^+ = x^{-1}e^{2i\pi\Lambda x}\widehat{v}^+)$ de solutions formelles à l'infini, où

$$\widehat{v}^\mp = \sum V_n^\mp x^{-n}, \quad \text{avec } V_0^- = 1, V_0^+ = 1.$$

On peut alors reformuler [23, Proposition 14] :

Proposition 5. On a : $V_n^\mp = n!(\pm 2i\pi)^{-n}U_n$.

Les coefficients du développement en puissance en $x = \Lambda$ “réapparaissent” dans les coefficients des développements en série entière en $x = \infty$.

On a une variante¹⁰ de [8, Lemme 2.1].

Proposition 6. Soit $\mu \in \mathbb{R}, \Lambda > 0$. On note $f_{\mu, \Lambda}$ l'unique solution de $W_\Lambda - \mu$ sur $]-\Lambda, +\infty[$ convergente en $x = \Lambda$ et satisfaisant $f_{\mu, \Lambda}(\Lambda) = 1$. Alors :

- (i) Le développement asymptotique de l'unique solution $\eta_{\mu, \Lambda}$ de $W_\Lambda - \mu$ sur $]\Lambda, +\infty[$ qui, à l'infini, est asymptotiquement $\frac{e^{-2i\pi\Lambda x}}{2i\pi x}$ qui est $\frac{e^{-2i\pi\Lambda x}}{2i\pi x}\widehat{v}$. Ce développement asymptotique est Borel-sommable, $\eta_{\mu, \Lambda}$ est la restriction à $]\Lambda, +\infty[$ de sa somme dans la direction $\mathbb{R}_+$ et est égal à la transformée de Fourier de la solution θ_μ qui est nulle sur $]-\infty, \Lambda[$ et concorde avec $f_{\mu, \Lambda}$ pour $x \geq \Lambda$.

⁹Le terme “développement asymptotique” est utilisé abusivement.

¹⁰Elle admet un paramètre Λ arbitraire et l'énoncé est légèrement précisé.

(ii) Soit $\xi_{\mu,\Lambda}$ l'unique solution sur $]\Lambda, +\infty[$ qui, à l'infini, satisfait

$$\xi_{\mu,\Lambda}(x) = -\frac{\sin(2\pi\Lambda x)}{\pi x} + O(1/x^2).$$

(a) Il existe une unique solution formelle telle que sa somme soit $\xi_{\mu,\Lambda}$. C'est

$$\frac{e^{-2i\pi\Lambda x}}{2i\pi x} \widehat{v}^- - \frac{e^{2i\pi\Lambda x}}{2i\pi x} \widehat{v}^+.$$

(b) La fonction $\xi_{\mu,\Lambda}$ est la restriction à $]\Lambda, +\infty[$ de la transformée de Fourier de l'unique solution paire $\varphi_{\mu,\Lambda}$ qui est nulle sur $]-\Lambda, \Lambda[$ et qui concorde avec $f_{\mu,\Lambda}$ pour $x \geq \Lambda$.

Il existe une variante de la partie (ii) de la proposition 6, remplaçant $\sin(2\pi\Lambda x)$ par $\cos(2\pi\Lambda x)$ et supposant $\varphi_{\mu,\Lambda}$ impair.

Il existe une variante de la proposition ci-dessus, remplaçant W_Λ par $\mathcal{D}_\tau$. Il s'agit simplement d'un changement de notation. Nous laissons cela au lecteur.

Proposition 7. Soit μ une CM-valeur propre paire. Soit ψ l'unique solution "asymptotique" à $-\frac{\sin(2\pi\Lambda x)}{\pi x}$ à $+\infty$, alors la solution est analytique en $x = \Lambda$ et :

- a) si μ est une valeur propre non classique, alors $\psi(\Lambda) = \pm 1$,
- b) si μ est une valeur propre classique, alors ψ s'étend en une fonction entière et $\psi(\Lambda) = \pm\sqrt{\lambda}$,
où (concentration) : $0 < \lambda = \frac{\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \psi^2 dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2 dx} < 1$

Pour les premières valeurs propres classiques, la concentration est très proche de 1. Il existe trois interprétations de λ :

- (1) λ est une valeur propre de l'opérateur de convolution intégrale Q_Λ ;
- (2) λ est la concentration sur $[-\Lambda, \Lambda]$ d'une fonction propre classique ;
- (3) $\pm\sqrt{\lambda}$ apparaît dans la connexion entre $+\infty$ et Λ le long de $]\Lambda, +\infty[$ définie par une fonction propre classique.

On obtient des résultats similaires pour l'opérateur $\mathcal{D}_\tau$; nous laissons au lecteur l'énoncé correspondant.

4. Spectres prolates comme spectres analytiques et déterminants spectraux

4.1. Spectre classique

On considère le spectre classique de ¹¹ $\mathcal{D}_\tau$, principalement en suivant [17].

¹¹On choisit $\mathcal{D}_\tau$ pour notre description car on utilise certains résultats de [17]. Il est facile de le transposer au cas de W_Λ .

4.1.1. Spectre et multiplicateurs de Stokes

On suppose $\tau > 0$. Le spectre classique de $\mathcal{D}_\tau$ est, par définition, le spectre naïf sur $[-1, 1]$, c'est-à-dire l'ensemble des $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{D}_\tau - \mu$ admette une solution bornée non triviale sur $] -1, 1[$. (La définition s'étend à $\tau \in \mathbb{C}$.) Ce spectre est réel et les valeurs propres sont positives ou nulles.

Les matrices de Stokes de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ à l'infini sont (dans une "base formelle naturelle de solutions")

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

La trace de la monodromie locale autour de ∞ est $u = 2 + s^2$. Il est possible de choisir canoniquement une racine carrée de $u - 2$ en utilisant [17] (demi-monodromie). On obtient une définition de s indépendante de la base.

Pour $\tau \neq 0$, un nombre complexe μ est une valeur propre classique si et seulement si $s(\mu, \tau) = 0$ [12]. En utilisant [17], on obtient $s = -2i\pi y_1(0)y_1'(0)$. On étend la fonction $s(\tau^2, \mu)$ à $\tau = 0$ en utilisant cette relation. Alors la fonction de Stokes $s(\tau^2, \mu)$ est entière sur $\mathbb{C}^2$, d'ordre $\leq 1/2$. C'est un déterminant fonctionnel du spectre classique. Pour τ fixé, les zéros de $s(\tau^2, \mu)$ sont simples (cf. [17, p. 233], 5' prouve que $y_1(0)$ et $y_1'(0)$ n'ont que des zéros simples, et la phrase auxiliaire 2 prouve que $y_1(0)$ et $y_1'(0)$ n'ont pas de zéros communs).

On note $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$. Nous disposons de diverses **ca-ractérisations** du spectre prolate classique.

Proposition 8. *Le nombre complexe u est une valeur propre classique de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

- *il existe une solution entière ;*
- *la monodromie locale autour de ∞ est triviale ;*
- *le phénomène de Stokes à l'infini est trivial ;*
- $y_1(0)y_1'(0) = 0$
- *le groupe de monodromie global de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ est triangularisable (ou, de manière équivalente, réductible) ;*
- *l'opérateur $\mathcal{D}_\tau - \mu$ est réductible dans l'anneau non commutatif d'Ore $\mathcal{M}(\mathbb{C})[d/dx]$.*

4.1.2. Spectres analytiques

Le spectre classique peut être clairement interprété comme :

- le spectre analytique associé aux deux points singuliers ± 1 reliés par $[-1, 1]$;
- l'union des deux spectres analytiques associés à 0 et 1 reliés par $[0, 1]$ (cas pairs et impairs).

Les fonctions propres classiques sont entières et le spectre classique peut également être interprété comme un spectre analytique associé aux données des deux “points” $-\infty$ et $+\infty$ reliés par un simple chemin continu évitant ± 1 et reliant deux solutions oscillantes distinctes (paires ou impaires).

4.2. CM-Spectre

4.2.1. Une estimation d'ordre exponentiel

Le résultat suivant est dû à Reinhard Schäfke. (La preuve utilise notamment un résultat de [26].)

Proposition 9. *Soit $\Lambda > 0$ fixé et $\mu \in \mathbb{C}$. Considérons la solution y_1 de $(W_\Lambda - \mu)y$, avec $y_1(x, \mu) \sim \frac{1}{x}e^{2i\pi\Lambda x}$ lorsque $|x| \rightarrow \infty$, pour un petit $\arg x$ ($\sim$ signifie équivalent au sens où le quotient tend vers 1). Soit $x_0 > \Lambda$ fixé. Alors $y_1(x_0, \mu)$ est une fonction entière de μ et sa croissance exponentielle est au plus égale à $1/2$.*

Conjeturons que $1/2$ est l'ordre exact. Il existe des variantes, remplaçant y_1 par la somme de $\widehat{y}^+$ ou $\widehat{y}^-$ dans une direction non singulière d et x_0 par un point de d tel que $|x_0| > \Lambda$. Il existe également des variantes remplaçant W_Λ par $\mathcal{D}_\tau$.

Meixner et Schäfke ont obtenu des résultats similaires pour les cas plus simples d'un point ordinaire ou d'un point singulier régulier : cf. [17, 1.3, phrase 1 et 2, p. 48-49] (cf. aussi [26]).

4.2.2. Déterminant spectral du CM-spectre

En théorie spectrale, un déterminant spectral est une fonction entière $F(\mu)$ dont les zéros sont les valeurs propres. Dans certains travaux, les déterminants spectraux sont obtenus par continuation analytique [33]. Nous utilisons une idée similaire, définissant les déterminants spectraux par un appariement analytique de solutions distinguées. Une méthode similaire est utilisée par Sibuya dans [28, chapitre 6, 29, p. 130]. Nous admettons des multiplicités pour les zéros de nos déterminants spectraux, a priori indépendantes des propriétés des valeurs propres.

Nous travaillons avec $D_\tau - \mu$. Soit $\psi = -\frac{\sin \tau x}{x} + O(1/x^2)$ interprété comme une somme borélienne d'une solution formelle. Nous disposons d'une base de solutions ¹² de $D_\tau - \mu$ en $x = 1$: (y_I, y_{II}) , y_I est analytique, $y_I(1) = 1$, $W(y_I, y_{II}) = \frac{1}{1 - x^2}$ (cf. (17, 3.12, phrase 5, p. 222 et ci-dessus le résultat similaire pour $W_\Lambda - \mu$).

Nous avons une formule de connexion pour $1 \leftrightarrow +\infty$: $\psi = \alpha y_I + \beta y_{II}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Alors

$$\alpha = W(\psi, y_{II})/W(y_I, y_{II}) = (1 - x^2)W(\psi, y_{II})$$

$$\beta = -W(\psi, y_I)/W(y_I, y_{II}) = (x^2 - 1)W(\psi, y_I)$$

Pour $\tau = \tau_0$ et $x_0 \in]1, +\infty[$ fixés, $y_I(x_0, \mu)$ et $\psi(x_0, \mu)$ sont des fonctions entières du paramètre

¹²Nous utilisons abusivement les mêmes notations pour la base locale de $D_\tau - \mu$ et $W_\Lambda - \mu$.

spectral μ , d'ordre $\leq 1/2$. En choisissant $x_0 = \sqrt{2}$, on obtient

$$F(\tau_0, \mu) = W(\psi, y_I)(\sqrt{2})(\tau_0, \mu) = \beta.$$

Les fonctions entières $\psi(\sqrt{2}, \mu)$ et $y_I(\sqrt{2}, \mu)$ sont d'ordre $\leq 1/2$. Ceci découle de la proposition 9 pour ψ et de [17, 1.3, phrase 2, p. 49] pour y_I . Par conséquent, F est un déterminant fonctionnel du CM-spectre et une fonction entière d'ordre $\leq 1/2$.

On conjecture que les zéros de F sont simples. (Ceci est confirmé par quelques expériences numériques.) Si c'est le cas, alors on a une formule de produit infini pour F et cette fonction est indépendante du choix de x_0 à multiplication près par une constante non nulle.

4.2.3. Calcul des valeurs propres

Soit $\Lambda = \sqrt{2}$, soit $\tau = 4\pi$. Si μ est une CM-valeur propre non classique, alors $\beta = 0$ et $\alpha = \psi(1) = \pm\sqrt{2}\pi$ (cf. Proposition 7). Ceci permet de contrôler le calcul numérique des valeurs propres par appariement analytique. Pour une valeur propre classique, on a $\alpha = \psi(1) = \pm\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\pi$.

Tous les calculs sont effectués avec SageMath. Nous calculons numériquement ψ en tronquant les séries apparaissant dans les solutions proches de l'infini, puis nous évaluons y_I et y_{II} à l'aide des outils développés par Marc Mezzarobba pour le calcul des fonctions D-finies (ou holonomes) [19], avec une grande précision (certifiée). Nous avons remplacé la valeur par un nombre rationnel approximant la valeur exacte avec une précision de 300 chiffres.

Voici deux exemples. Sur chaque ligne :

- la première valeur est l'approximation donnée dans [8] ;
- la deuxième est la valeur obtenue en recherchant les zéros de β par dichotomie ;
- la troisième valeur est la valeur de β , qui doit être proche de 0 ;
- la dernière valeur est la valeur correspondante de α , qui doit être proche de $\pm\sqrt{2}\pi = \pm 4.44288293815837$ alternativement.

μ_{-2}	-39	-39.3832165744668224	$-2.09497516339781 \cdot 10^{-18}$	-4.44288293889868
μ_{-148}	-9100	-9104.3331714128495040	$1.88990889191427 \cdot 10^{-18}$	4.44288293815837

5. Nouvelles fonctions propres pour le CM-spectre négatif

5.1. Le spectre naïf de $\mathcal{D}_\tau$ sur l'axe imaginaire

Les valeurs propres prolates classiques sont les $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{D}_\tau - \mu$ admette une solution bornée sur $] -1, 1[$. Si $\tau \in \mathbb{R}^*$, elles sont réelles positives.

Considérons maintenant, pour $\tau > 0$, les valeurs propres naïves sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire les $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{D}_\tau - \mu$ admette une solution bornée sur $\mathbb{R}i =] - i\infty, +i\infty[$. Nous verrons plus loin que μ est une valeur propre naïve sur $\mathbb{R}i$ si et seulement si elle est une CM-valeur propre non classique (cf. théorème 14). Cela implique que le spectre naïf est infini, en particulier non vide, ce qui ne semble pas évident ! Cela implique également que les valeurs propres des CM-fonctions propres non classiques sont négatives.

La clé réside dans le fait, démontré dans [8], que pour les CM-valeurs propres non classiques μ , les fonctions propres appartiennent à l'espace de Sonin.

Lemme 10. *Une fonction propre naïve appartient à l'espace de Schwartz $S(\mathbb{R}i)$ et à $L^2(\mathbb{R}i)$. Le spectre naïf est l'ensemble des $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{D}_\tau - \mu$ admette une solution dans $S(\mathbb{R}i)$ (resp. $L^2(\mathbb{R}i)$).*

Proposition 11.

- (i) Si $f, g \in S(\mathbb{R}i)$, alors $\langle \mathcal{D}_\tau, f, g \rangle = \langle f, \mathcal{D}_\tau g \rangle$;
- (ii) Les valeurs propres naïves sont réelles et négatives ;
- (iii) Les espaces propres naïfs sont de dimension un ;
- (iv) Les fonctions propres naïves sont paires ou impaires et admettent une décroissance exponentielle à l'infini sur $\mathbb{R}i$ (en $\pm i\infty$).

5.2. Décomposition des espaces de Hardy

Nous obtenons des résultats de type Paley-Wiener [9, 21, 25].

Nous notons $\Pi^+ = \{\Im x > 0\}$ et $\Pi^- = \{\Im x < 0\}$ les demi-plans supérieur et inférieur. Nous considérons les espaces de Hardy $H^2(\Pi^\pm)$. Nous obtenons des applications linéaires (non surjectives):

$$\text{BL} : H^2(\Pi^\pm) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

les limites non tangentielles du bord.

On fixe $\tau > 0$. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et $\psi = \mathbb{F}_{i\tau}\varphi$. On définit :

$$\begin{aligned} \psi^+(x) &= \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\tau t x} dt \quad \text{pour } \Im x < 0, \\ \psi^-(x) &= \int_{-\infty}^0 \varphi(t) e^{-i\tau t x} dt \quad \text{pour } \Im x > 0. \end{aligned}$$

Alors : $\psi^+ \in {}^2(\Pi^-) \subset \mathcal{O}(\Pi^-)$ et $\psi^- \in H^2(\Pi^+) \subset \mathcal{O}(\Pi^+)$. On obtient la décomposition de Hardy de ψ :

$$\psi = \mathbb{F}_{i\tau}\varphi = \text{BL}\psi^+ + \text{BL}\psi^-,$$

$$L^2(\mathbb{R}) = H^2(\Pi^-) \oplus H^2(\Pi^+).$$

Si φ (ou de manière équivalente ψ) appartient à l'espace de Sonin défini par $] - 1, 1[$, alors on a

$$\text{BL}\psi^+(x) + \text{BL}\psi^-(x) = 0 \quad \text{pour } -1 < x < 1.$$

Si μ est une CM-valeur propre non classique et φ une fonction propre correspondante, alors ψ est aussi une fonction propre correspondante et ψ^+ (resp. ψ^-) est une solution holomorphe de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ sur le demi-plan inférieur (resp. supérieur) Π^- (resp. Π^+). Les fonctions φ, ψ appartiennent à l'espace de Sonin.

Par conséquent, en utilisant les prolongements analytiques des solutions $\psi^\pm$ sur la bande ouverte verticale $U = \{-1 < \Re x < 1\}$ (notée abusivement de la même manière), on obtient $\psi^-(x) + \psi^+(x) = 0$ pour $x \in] - 1, 1[$ et donc

$$\psi^- = -\psi^+ \quad \text{sur } U.$$

Les fonctions $\psi^\pm$ sont des sommes boréliennes de solutions formelles purement exponentielles à l'infini. Elles sont sous-dominantes respectivement dans les directions verticales inférieure et supérieure. Par conséquent, $\psi^+ = -\psi^-$ relie deux solutions sous-dominantes par continuation analytique le long de l'axe imaginaire. On obtient une nouvelle interprétation du CM-spectre prolate non classique comme spectre analytique.

La fonction analytique ψ^+ est une solution sous-dominante de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ sur le demi-plan inférieur Π^- . C'est (à une échelle près) la somme y^- de $\widehat{y}^-$ à $-i\infty$.

La fonction analytique ψ^- est une solution sous-dominante de $\mathcal{D}_\tau - \mu$ sur le demi-plan supérieur Π^+ . C'est (à une échelle près) la somme y^+ de $\widehat{y}^+$ à $+i\infty$.

Proposition 12. *Une CM-valeur propre est une valeur propre naïve sur l'axe imaginaire.*

5.3. Les CM-fonctions propres comme valeurs limites des nouvelles fonctions propres

Une valeur propre naïve sur l'axe imaginaire est une CM-valeur propre non classique et il est possible de retrouver les CM-fonctions propres (non classiques) sur l'axe réel à partir des nouvelles fonctions propres sur l'axe imaginaire.

On rappelle que si $U \subset \mathbb{C}$ est ouvert et si f est holomorphe sur U , alors f admet une valeur limite à $t \in U \cap \mathbb{R}$ si la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0} f(t - i\varepsilon) - f(t + i\varepsilon)$$

existe. Par définition, cette limite est la valeur limite $\text{BV}f(t)$.

Proposition 13. *Si μ est une valeur propre naïve sur $i\mathbb{R}$, alors la fonction propre naïve est la somme d'une solution en série entière (paire ou impaire) en 0 de $\mathcal{D}_\tau - \mu$. Cette solution se prolonge analytiquement en une fonction holomorphe f sur le plan de coupe $\mathbb{C} \setminus ([1, +\infty[\cup] - \infty, -1])$. Alors μ est une CM-valeur propre non classique et la valeur limite $\text{BV}f$ est une CM-fonction propre. Si f est paire (resp. impaire), alors $\text{BV}f$ est impaire (resp. paire).*

5.4. Le CM-spectre non classique et le nouveau spectre

Le CM-spectre non classique coïncide avec le spectre naïf sur l'axe imaginaire. Ceci découle de 5.2 et 5.3.

Théorème 14. *Soit $\mu < 0$.*

- (i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
 - (a) *μ est une CM-valeur propre paire ;*
 - (b) *μ est une valeur propre naïve paire sur l'axe des imaginaires ;*
 - (c) *$D_\tau - \mu$ admet une solution non triviale en série entière impaire à l'origine, se prolongeant analytiquement le long de l'axe des imaginaires en une fonction à décroissance exponentielle à l'infini (à $\pm i\infty$).*
- (ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
 - (a) *μ est une CM-valeur propre impaire ;*
 - (b) *μ est une valeur propre naïve impaire sur l'axe des imaginaires ;*
 - (c) *$D_\tau - \mu$ admet une solution non triviale en série entière paire à l'origine, se prolongeant analytiquement le long de l'axe des imaginaires en une fonction à décroissance exponentielle à l'infini (à $\pm i\infty$).*

Corollaire 15. *Les CM-valeurs propres non classiques sont négatives.*

Ceci répond à une question de [8]. D'après [8], il pourrait exister un ensemble fini de CM-valeurs propres positives non classiques. Le résultat ci-dessus prouve que ce n'est pas le cas.

Par sommation de $\hat{y}^+(\tau, \mu)$ dans la direction $i\mathbb{R}_+$, on obtient une fonction analytique $y^+(\tau, \mu)(x)$ pour $x \in \mathbb{R}i$. En utilisant la proposition 9 et [17, 1.3, phrase 1, p. 48], on obtient le résultat suivant.

Proposition 16. *Pour un $\tau > 0$ fixé, les fonctions $y_{\tau, \mu}^+(0)$ et $(y^+)_{\tau, \mu}'(0)$ sont entières d'ordre $\leq 1/2$. Leurs zéros sont respectivement les CM-valeurs propres paires négatives et impaires négatives.*

Ceci donne des déterminants spectraux pour le CM-spectre négatif. Nous conjecturons que les zéros sont simples. (Cette conjecture est corroborée par quelques expériences numériques.)

Remarque 17. Notre nouveau spectre est un spectre analytique. Une fonction propre relie deux solutions sous-dominantes dans deux secteurs de Stokes différents (le long d'un chemin passant entre les deux singularités régulières). Fedoryuk et Sibuya ont étudié des spectres similaires pour les équations de Schrödinger à potentiels polynomiaux [13, 28] (cf. également [27, Définition 1]).

5.5. Calcul numérique des valeurs propres

5.5.1. La méthode du rideau

Connes et Moscovici ont utilisé un calcul assez approximatif de leurs valeurs propres basé sur un appariement de fonctions oscillantes (cela leur suffit pour les zéros de zêta). Nous avons décrit ci-dessus, en 4.2.3, une méthode efficace (“appariement analytique”), basée sur la continuation analytique et la sommation borélienne. Cependant, les calculs sont assez complexes et longs, principalement en raison de problèmes de sommation numérique ¹³. Cette méthode peut être adaptée au calcul des valeurs propres sur l’axe imaginaire : nous connectons une somme borélienne de $\widehat{v}^-$ (ou sa dérivée) et 0 (cf. Proposition 16). En fait, grâce à nos nouvelles fonctions propres, nous avons obtenu une méthode très simple, rapide et efficace que nous allons décrire ¹⁴.

En 1981, dans sa thèse à Strasbourg [2], Jean-Louis Callot a proposé une description du spectre d’Hermite (et similaire) : “en ouvrant les rideaux”. Nous avons adapté cette idée.

Nous partons d’une solution en série entière impaire (ou paire) pour $x = 0$ et nous cherchons μ tel que sa somme reste bornée sur $i\mathbb{R}_+$. Nous utilisons une méthode de dichotomie. Elle est similaire au cas de la “chasse au canard” ¹⁵ étudié par l’école de G. Reeb.

Si $\tilde{\mu}$ est proche d’une valeur propre naïve $\mu < 0$ avec $\tilde{\mu} \neq \mu$, alors la fonction propre correspondante “explose à $\pm i\infty$ ”. On tourne l’image en remplaçant x par ix et on considère les graphes des fonctions sur $[0, +\infty[$. On observe alors une explosion à $\approx x_0$: le graphe ressemble à une demi-droite verticale montant ou descendant. Avant on observe un domaine d’oscillations sur $[0, x_0[$. On déplace $\tilde{\mu}$ (vers le haut ou vers le bas). Si l’explosion se produit plus tard (x_0 plus grand), alors on est plus proche de μ . Si une demi-droite verticale supérieure devient une demi-droite verticale inférieure (ou inversement), alors on a franchi μ .

5.5.2. Expérimentations numériques

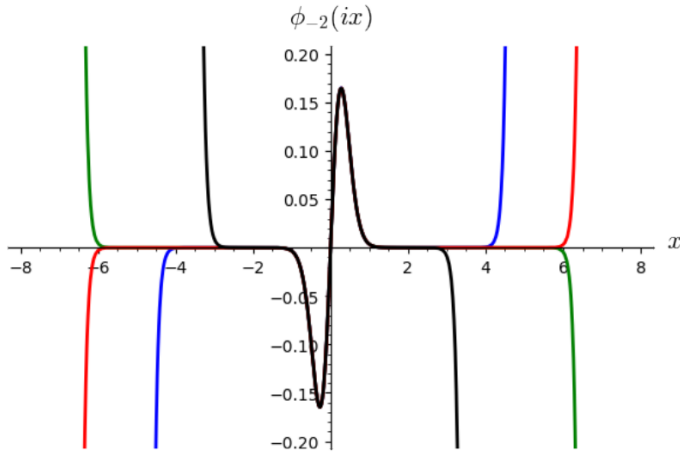
Illustrons la méthode du rideau à l’aide de deux exemples. Dans cette partie, $\tau = 4\pi$. Le choix entre une explosion supérieure ou inférieure sur nos images est “certain”, même s’il n’est pas formellement certifié. Nos intervalles pour les valeurs propres sont “certains”. Des conjectures sur le nombre de zéros permettent de deviner le signe attendu (haut ou bas) pour l’explosion.

¹³Un autre inconvénient est le choix arbitraire du point de connexion.

¹⁴Avec cette méthode, la sommation borélienne n’est pas nécessaire.

¹⁵*duck hunting*.

Première valeur propre paire négative μ_{-2} .



Noir : $\mu = -39.3832165744668224$

Bleu : $\mu = -39.3832165742615394$

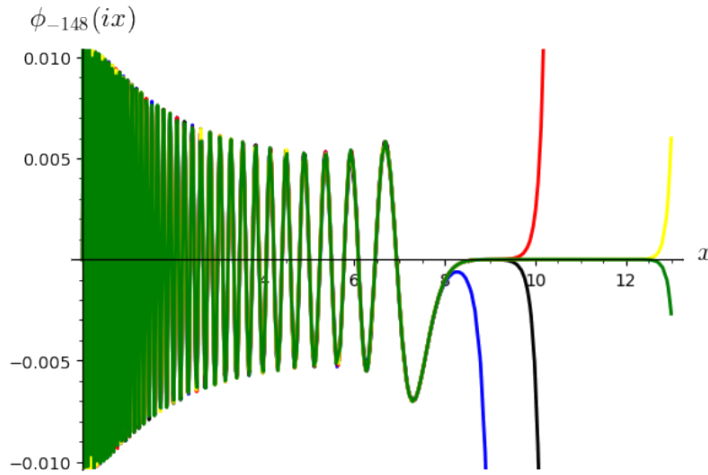
Vert : $\mu = -39.38321657426153947615056322$

Rouge : $\mu = -39.38321657426153947615056317$

On en déduit que

$$-39.38321657426153947615056322 < \mu_{-2} < -39.38321657426153947615056317.$$

Valeur propre négative de rang 148.



Bleu : $\mu = -9104$

Noir : $\mu = -9104.3331$

Rouge : $\mu = -9104.3332$

Jaune : $\mu = -9104.3331714128495040$

Vert : $\mu = -9104.3331714128495039$

Alors :

$$9104.3331714128495040 < \mu_{-148} < -9104.3331714128495039.$$

Nos meilleures bornes supérieure et inférieure sont :

$$-9104.333171412849503999\mathbf{4} < \mu_{-148} < -9104.33317141284950399\mathbf{85}.$$

5.6. Comparaison avec zêta

5.6.1. Zéros non triviaux de zêta et spectre négatif prolate

Dans son article de 1859 [24], Riemann a introduit la fonction.

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(1-s)\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s).$$

C'est une fonction entière d'ordre un. L'équation fonctionnelle de zêta devient $\xi(s) = \xi(1-s)$. On a $s = \frac{1}{2} + it$, $z = (s - 1/2)^2 = -t^2$. Alors $\xi(\frac{1}{2} + it) = \xi(\frac{1}{2} - it)$ et $\xi(\frac{1}{2} + it)$ est une fonction analytique de $z = -t^2$. On pose $\Xi(z) = \Xi(-t^2) = \xi(s)$. La fonction Ξ est une fonction entière d'ordre $1/2$ de z dont les zéros sont les opposés des carrés des parties imaginaires des zéros non triviaux de zêta.

D'après les résultats de Connes-Moscovici et nos résultats, un analogue prolate de $\Xi(z)$ est, pour $\Lambda > 0$ fixé, la fonction entière de μ , d'ordre $\leq 1/2 : y_{\Lambda, \mu}^+(0)$ (cf. Proposition 16).

5.6.2. Zéros triviaux de zêta et spectre classique prolate

Rappelons [8, 6, B].

L'ensemble des zéros triviaux de zêta est $\{-2n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Posons $-2n = \frac{1}{2} + u$. Alors $u^2 = (2n + 1/2)^2 = 2n(2n + 1) + 1/4$. On obtient, à une translation près, le spectre de Legendre pair.

Les zéros triviaux correspondent par analogie aux zéros de $y_{\Lambda, I}(0)y'_{\Lambda, I}(0)$ décalés de $-1/4$. Les asymptotes sont similaires pour tout $\Lambda \geq 0$:

$$\mu_{2n} = (2n + 1/2)^2 + O(1), \quad n \longrightarrow +\infty.$$

6. Conclusion

6.1. Résultats obtenus

Nous avons interprété les spectres prolates de Connes-Moscovici à l'aide d'outils analytiques complexes. En particulier, nous avons introduit la notion de spectre analytique et prouvé que tous les spectres prolates intéressants peuvent être interprétés comme tels. Cela a permis la définition explicite de certains déterminants spectraux, qui sont des fonctions entières d'ordre $\leq 1/2$, et le calcul précis des valeurs propres.

Nous avons introduit, de manière très élémentaire, un nouveau spectre prolate sur l'axe imaginaire. Nous avons prouvé que ce nouveau spectre coïncide avec le CM-spectre non classique et que les valeurs limites des nouvelles fonctions propres sont les CM-fonctions propres non classiques, qui appartiennent à l'espace de Sonin. Cette nouvelle approche a permis de prouver une conjecture de Connes-Moscovici : toutes les CM-valeurs propres non classiques sont négatives. Cela a également

permis un nouveau calcul rapide et précis des valeurs propres négatives.

6.2. Généralisations. Problèmes ouverts

(1) La notion de spectre analytique peut être étendue à toutes les équations linéaires rationnelles du second ordre. En particulier à la famille de Heun et à toutes ses formes confluentes. Ces spectres présentent de bonnes propriétés d'invariance : par transformations de Möbius sur la variable indépendante et par transformations s-homotopes et transformations de jauge¹⁶ sur la variable dépendante. Nous prévoyons de revenir sur cette question dans de futurs travaux, cf. également [10].

(2) Il semble impossible d'étendre la définition de Connes-Moscovici du spectre prolate au cas général des équations prolates d'ordre arbitraire m . Cependant, il est facile d'étendre notre définition du spectre sur l'axe imaginaire. Les spectres correspondants sont analytiques, mais nous ignorons s'ils sont non vides. Des expériences numériques suggèrent que c'est le cas et nous conjecturons que ces spectres sont infinis. Plus généralement, il est possible, moyennant quelques modifications techniques, d'étendre notre définition du spectre sur l'axe imaginaire aux équations de Heun confluentes.

(3) Bender et Wu ont étudié l'oscillateur quartique avec un paramètre et ont conjecturé qu'il n'y a qu'une seule valeur propre paire et une seule valeur propre impaire à une continuation analytique près dans le paramètre. Cette conjecture a été démontrée par Eremenko et Gabrielov [11]. Dans leur monographie [17], J. Meixner et F. W. Schäfke ont fait une étude très complète des équations prolates $\mathcal{D}_{\tau,\mu}$ pour des valeurs complexes de τ et μ . Dans [23], nous avons conjecturé que, par analogie avec le cas de l'oscillateur quartique, il n'y a qu'une seule valeur propre paire et une seule valeur propre impaire à une continuation analytique près selon le paramètre τ ¹⁷.

En utilisant notre nouvelle définition du spectre prolate non classique, il est possible de définir un spectre pour des valeurs complexes arbitraires (non nulles) de τ . Cependant, dans ce cas étendu, les directions des raies de Stokes ne sont en général plus sur l'axe imaginaire et, pour obtenir une théorie satisfaisante, il est nécessaire d'utiliser des chemins γ plus compliqués pour la définition des spectres analytiques. De tels chemins peuvent effectuer plusieurs tours autour de ∞ . La "bonne variable" n'est pas τ mais $\log \tau$. Les déterminants spectraux de la proposition 16 peuvent être interprétés comme des fonctions analytiques entières de $\log \tau$. Il est alors possible d'étudier l'extension analytique des valeurs propres en fonction de $\log \tau$. Nous conjecturons qu'il n'y a qu'une seule valeur propre paire et qu'une seule valeur propre impaire à une continuation analytique près selon le paramètre $\log \tau$.

¹⁶En particulier les transformations de Darboux.

¹⁷Ceci est vrai pour le "cas Mathieu", c'est-à-dire $\cong \pm 1/2$. Cela a été prouvé par F. W. Schäfke (1975), cf. [18, Théorème, p. 88].

Références

- [1] H. Bateman, "On the inversion of a definite integral", *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) 4 (1907), p. 461-498.
- [2] J. L. Callot, *Bifurcation du portrait de phase pour des équations linéaires du second ordre ayant pour type l'équation d'Hermite*, PhD thesis, Université de Strasbourg (France), 1981.
- [3] A. Connes, "Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function", *Sel. Math., New Ser.* 5 (1999), n° 1, p. 29-106.
- [4] A. Connes and C. Consani, "Spectral triples and zeta-cycles", 2021. Online at <https://arxiv.org/abs/2106.01715>.
- [5] A. Connes and C. Consani, "Weil positivity and trace formula, the archimedean place", *Sel. Math., New Ser.* 27 (2021), n° 4, article n° 77 (70 pages).
- [6] A. Connes, C. Consani and H. Moscovici, "Zeta zeros and prolate wave operators", 2021. Online at <https://arxiv.org/abs/2310.18423v2>.
- [7] A. Connes and M. Marcolli, *Noncommutative geometry, quantum fields and motives*, Colloquium Publications, American Mathematical Society; Hindustan Book Agency, 2008, xxii+785 pages.
- [8] A. Connes and H. Moscovici, "The UV prolate spectrum matches the zeros of zeta", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 119 (2022), n° 22, article n° e2123174119 (7 pages).
- [9] G.-T. Deng, H.-C. Li and T. Qian, "Hardy space decompositions of $L^p(\mathbb{R}^n)$ for $0 < p < 1$ with rational approximation", 2017. Online at <https://arxiv.org/abs/1711.04918v1>.
- [10] A. Duval, M. Loday-Richaud and J.-P. Ramis, "Liouvillian solutions of Heun's and confluent Heun's equations, towards a new approach of special functions". In preparation.
- [11] A. Eremenko and A. Gabrielov, "Analytic continuation of eigenvalues of a quartic oscillator", 2009. Online at <https://arxiv.org/abs/0802.1461v1>.
- [12] F. Fauvet, J.-P. Ramis, E. Richard-Jung and J. Thomann, "Stokes phenomenon for the prolate spheroidal wave equation", *Appl. Numer. Math.* 60 (2010), n° 12, p. 1309-1319.
- [13] M. V. Fedoryuk, "Asymptotics of the discrete spectrum of the operator $w''(x) - \lambda^2 p(x)w(x) = 0$ ", *Mat. Sb., N. Ser.* 68 (1965), n° 110, p. 81-110.
- [14] C. Flammer, *Spheroidal wave functions*, Stanford University Press, 1957, ix+220 pages.
- [15] V. Katsnelson, "Self-adjoint boundary conditions for the prolate spheroid differential operator", in *Indefinite inner product spaces, Schur analysis, and differential equations*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 263, Birkhäuser/Springer, 2018, p. 357-386.
- [16] M. Klimeš, "Wild monodromy of the Fifth Painlevé equation and its action on wild character variety: an approach of confluence", *Ann. Inst. Fourier* 74 (2024), n° 1, p. 121-192.
- [17] J. Meixner and E. W. Schäfke, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, 1954, xii+414 pages.

- [18] J. Meixner, F. W. Schäfke and G. Wolf, *Mathieu functions and spheroidal functions and their mathematical foundations*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1980, vii+126 pages.
- [19] M. Mezzarobba, "Rigorous multiple-precision evaluation of D-finite functions in Sage-Math", 2016. Online at <https://arxiv.org/abs/1607.01967v1>.
- [20] A. Osipov, V. Rokhlin and H. Xiao, *Prolate spheroidal wave functions of order zero.*, Applied Mathematical Sciences, Springer, 2013, xii+379 pages.
- [21] R. E. A. C. Paley and N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain*, Colloquium Publications, American Mathematical Society, 1934, viii+184 pages.
- [22] E. Paul and J.-P. Ramis, "Dynamics of the Fifth Painlevé foliation", in *Handbook of geometry and topology of singularities VI. Foliations* (F. Cano, J. L. Cisneros-Molina, L. Dng Tráng and J. Seade, eds.), Springer, 2024, p. 307-381.
- [23] F. Richard-Jung, J.-P. Ramis, J. Thomann and F. Fauvet, "New characterizations for the eigenvalues of the prolate spheroidal wave equation", *Stud. Appl. Math.* 138 (2017), n° 1, p. 3-42.
- [24] B. Riemann, "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", *Ber. Akad. Wiss. Berlin* 1859 (1859), (9 pages).
- [25] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 1966, xi+412 pages.
- [26] F. W. Schäfke and R. Schäfke, "Zur Parameterabhängigkeit bei Differentialgleichungen", *J. Reine Angew. Math.* 361 (1985), p. 1-10.
- [27] B. Shapiro, "On Evgrafov-Fedoryuk's theory and quadratic differentials", *Anal. Math. Phys.* 5 (2015), n° 2, p. 171-181.
- [28] Y. Sibuya, *Global theory of a second order linear ordinary differential equation with a polynomial coefficient*, North-Holland Mathematics Studies, North-Holland; Elsevier, 1975, xv+290 pages.
- [29] S. Y. Slavyanov and W. Lay, *Special functions*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000, xvi+293 pages.
- [30] D. Slepian, "Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. IV. Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions", *Bell Labs Tech. J.* 43 (1964), p. 3009-3057.
- [31] D. Slepian, "Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling", *SIAM Rev.* 25 (1983), n° 3, p. 379-393.
- [32] J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, J. D. C. Little and F. J. Corbató, *Spheroidal wave functions, including tables of separation constants and coefficients*, John Wiley & Sons, 1956, xiii+613 pages.
- [33] H. Volkmer, "On Riemann surfaces of analytic eigenvalue functions", *Complex Variables, Theory As ppl.* 49 (2004), n° 3, p. 169-182.