

Sur l'usage des intégrales définies dans la sommation des séries finies ou infinies.

J. P. G. Lejeune-Dirichlet

[Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 25 Juin 1835.]
(Extrait.)

Parmi les conséquences nombreuses et inattendues que M. GAUSS a tirées de sa belle théorie des équations binômes, il y en a une qui présente une singularité très remarquable. La lettre p désignant un nombre premier $4m + 1$ et q un nombre premier $4m + 3$, il résulte de cette théorie que les deux expressions :

$$s = \sum_{i=0}^{i=p-1} \cos \frac{2i^2\pi}{p}, \quad t = \sum_{i=0}^{i=q-1} \sin \frac{2i^2\pi}{q}$$

sont données par ces deux équations du second degré : $s^2 = p$, $t^2 = q$. On conclut de là $s = \pm\sqrt{p}$, $t = \pm\sqrt{q}$, où il ne s'agit plus que de fixer le signe qui doit être unique dans l'un et l'autre cas, les sommes précédentes étant complètement déterminées. En attribuant des valeurs particulières aux nombres p et q , on trouve toujours que c'est le signe supérieur qui doit avoir lieu, mais il est très difficile de prouver la généralité de ce résultat indiqué par l'induction. Dans ses *Disquisitiones arithmeticae* M. GAUSS ne s'était pas attaché à lever cette difficulté singulière, mais il y est revenu dans un Mémoire particulier ¹ que les géomètres regardent comme une des plus belles productions de ce profond analyste. La méthode dont il y fait usage, consiste à transformer les sommes précédentes, ou plutôt les expressions plus générales qui s'en déduisent, en y remplaçant les nombres premiers p et q par un entier quelconque 2, en produits de sinus d'arcs équidifférents, produits qui sont très faciles à évaluer et qui ne présentent plus aucune ambiguïté de signe. La difficulté de se rendre bien compte à quoi tient le succès des considérations délicates par lesquelles l'illustre auteur opère cette ingénieuse transformation, m'ayant fait rechercher, si on ne pourrait pas résoudre la même question sans y recourir, je suis parvenu au théorème suivant qui comprend les sommations précédentes :

“La somme de la série finie ou infinie :

$$F(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + c_2 \cos 2\alpha + \dots$$

étant connue, on peut toujours exprimer, au moyen de la fonction $F(\alpha)$, les nouvelles séries :

$$c_0 + c_1 \cos 1^2 \cdot \frac{2\pi}{n} + c_2 \cos 2^2 \cdot \frac{2\pi}{n} + \dots,$$

$$c_1 \sin 1^2 \cdot \frac{2\pi}{n} + c_2 \sin 2^2 \cdot \frac{2\pi}{n} + \dots,$$

qui ont les mêmes coefficients que la précédente.”

Je me flatte que cette nouvelle manière de parvenir aux résultats si remarquables de M. GAUSS pourra avoir quelque intérêt, l'histoire de la théorie des nombres nous montrant par de nombreux exemples, que c'est surtout dans cette partie de la science qu'il y a de l'avantage à envisager la

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, septembre 2025.

¹Summatio quarumdam serierum singularitum. Comment. recent. societ. Gottingen, Tom. 1., GAUSS Werke, Band 11, 8.9. K.

même question sous des points de vue très différents. La méthode de M. GAUSS était jusqu'à présent le seul moyen de vaincre la difficulté indiquée et qui consiste dans l'ambiguïté du signe. Celle que M. LIBRI a donnée, quoique très ingénieuse, ne paraît pas propre à résoudre cette difficulté puisqu'elle fait dépendre les sommes cherchées d'une équation du second degré. Pour faire disparaître l'ambiguïté que cette circonstance fait naître², le savant auteur a recours à l'expression transformée en produit, sans indiquer aucun moyen de parvenir à cette transformée. Mais ce passage de la somme au produit est à lui seul la question tout entière, puisqu'une fois effectué, il dispense de toute autre analyse, l'expression en produit étant du nombre de ceux qu'EULER a déterminés depuis longtemps par les considérations les plus simples.

§ 1.

L'analyse dont nous ferons usage, repose sur ces deux théorèmes :

“La constante c remplissant la double condition $0 < c \leq \frac{1}{2}\pi$ et la fonction $f(\beta)$ étant continue depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = c$, l'intégrale $\int_0^c \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$ convergera vers la limite $\frac{1}{2}\pi f(0)$ pour des valeurs indéfiniment croissantes de l'entier positif k .”

“Les constantes b et c étant telles qu'on ait $0 < b < c \leq \frac{1}{2}\pi$, et la fonction $f(\beta)$ étant supposée continue depuis $\beta = b$ jusqu'à $\beta = c$, l'intégrale $\int_b^c \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$ convergera dans la même circonstance vers la limite zéro.”

Ces théorèmes se démontrent facilement, comme je l'ai fait voir dans un précédent Mémoire³, lorsqu'on suppose d'abord la fonction $f(\beta)$ toujours croissante, ou toujours décroissante entre les limites de l'intégration. Pour passer ensuite au cas général où cette fonction présente plusieurs maxima et minima entre ces limites, il suffit de décomposer les intégrales en d'autres entre les limites desquelles la fonction $f(\beta)$ n'est plus alternativement croissante et décroissante.

Au moyen de ces théorèmes on détermine facilement la limite vers laquelle converge l'intégrale :

$$\int_0^\alpha \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta.$$

α désignant une constante positive quelconque, et la fonction $f(\beta)$ étant continue depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \alpha$. Soit $l\pi$ le plus grand multiple de π contenu dans α , l'intégrale précédente sera la somme de celles-ci :

$$\int_0^{l\pi} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta, \qquad \int_{l\pi}^\alpha \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta.$$

²Voyez le tome IX du Journal de CRELLE, p. 187.

³Voyez le Journal de CRELLE Tome IV p. 157 ou le “Repertorium der Physik von DOVE und MOSER”, où la même démonstration est simplifiée à quelques égards. § 117 et 133 dans cette édition des Œuvres de G. LEJEUNE DIRICHLET Werken. K.

La première étant décomposée en $2l$ autres prises entre les limites :

$$0 \text{ et } \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2}\pi \text{ et } 2.\frac{1}{2}\pi, \quad 2.\frac{1}{2}\pi \text{ et } 3.\frac{1}{2}\pi, \quad \dots, \quad (2l-1).\frac{1}{2}\pi \text{ et } 2l.\frac{1}{2}\pi,$$

si dans ces nouvelles intégrales l'on écrit au lieu de β :

$$\beta, \quad \pi - \beta, \quad \pi + \beta, \quad 2\pi - \beta, \quad \dots, \quad l\pi - \beta,$$

et si l'on transforme ensuite les intégrales dont le rang est un nombre pair, d'après la formule :

$$\int_g^h \psi(\beta) d\beta = - \int_h^g \psi(\beta) d\beta$$

toutes ces intégrales s'étendront depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}\pi$. En les réunissant donc et ayant égard à ce que k est un entier, il viendra :

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [f(\beta) + f(\pi - \beta) + f(\pi + \beta) + \dots + f((l-1)\pi + \beta) + f(l\pi - \beta)] \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} d\beta,$$

expression qui, d'après le premier des théorèmes précédents, convergera pour des valeurs croissantes de k vers cette limite :

$$\pi \left(\frac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + \frac{1}{2}f(l\pi) \right).$$

La seconde intégrale :

$$\int_{l\pi}^{\alpha} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$$

évidemment nulle lorsque $\alpha = l\pi$, devient généralement :

$$\int_0^{\alpha-l\pi} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(l\pi + \beta) d\beta,$$

en y remplaçant β par $l\pi + \beta$. Lorsque $\alpha - l\pi$ ne surpasse pas $\frac{1}{2}\pi$, il résulte du premier théorème qu'elle converge vers la limite $\frac{1}{2}\pi f(l\pi)$; dans le cas où $-l\pi$ est compris entre $\frac{1}{2}\pi$ et π , on décomposera l'intégrale précédente en deux autres prises l'une depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\beta = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta = \alpha - l\pi$. La première deviendra toujours $\frac{1}{2}\pi f(l\pi)$ pour $k = \infty$, tandis que la seconde qui, par le changement de β en $\pi - \beta$, prend la forme :

$$\int_{(l+1)\pi-\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f((l+1)\pi - \beta) d\beta,$$

converge vers la limite zéro en vertu du second théorème.

En réunissant ce qui précède, on voit que l'intégrale :

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} f(\beta) d\beta$$

lorsque l'entier positif k qu'elle renferme devient infini, prend toujours cette valeur :

$$\pi \left(\frac{1}{2}f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + \dots + f(l\pi) \right) = \frac{1}{2}\pi f(0) + \pi \sum_{s=1}^{s=l} f(s\pi),$$

$l\pi$ désignant le plus grand multiple de π contenu dans α . Il n'y a d'exception que lorsque α est un multiple exact de π , le dernier terme $\pi f(l\pi)$ devant, dans ce cas, être réduit à la moitié de sa valeur.

§ 2.

Considérons les deux intégrales ⁴:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha^2) d\alpha = a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha^2) d\alpha = b,$$

Quoiqu'on sache qu'on a $a = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$, $b = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$, nous n'avons pas besoin de supposer connues les valeurs de ces deux constantes qui se présentent d'elles-mêmes dans l'analyse que nous allons développer. Si l'on pose dans la première intégrale $\alpha = \beta + g$, β désignant une nouvelle variable et g étant une constante réelle quelconque, il viendra :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta + g)^2 d\beta = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta^2 + g^2) \cos 2g\beta. d\beta - \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\beta^2 + g^2) \sin 2g\beta. d\beta = a.$$

La seconde intégrale étant évidemment nulle, cette équation prendra la forme :

$$\cos(g^2) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta^2) \cos 2g\beta. d\beta - \sin(g^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\beta^2) \cos 2g\beta. d\beta = a.$$

On trouve d'une manière toute semblable :

$$\sin(g^2) \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta^2) \cos 2g\beta. d\beta + \cos(g^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\beta^2) \cos 2g\beta. d\beta = b.$$

En éliminant successivement chacune de ces deux intégrales, on aura ces équations connues :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\beta^2) \cos 2g\beta. d\beta &= a \cos(g^2) + b \sin(g^2), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\beta^2) \cos 2g\beta. d\beta &= b \cos(g^2) - a \sin(g^2). \end{aligned}$$

⁴Il n'est peut-être pas inutile de prévenir une difficulté que l'emploi de ces deux intégrales pourrait faire naître. Quelques auteurs ont énoncé qu'une intégrale prise entre des limites infinies devient nécessairement indéterminée, lorsque la fonction sous le signe ne s'évanouit pas à ces deux limites. Les intégrales que nous considérons ne satisfont pas à cette condition et sont néanmoins complètement déterminées, comme on le voit sur le champ en les mettant sous cette autre forme :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta}{\sqrt{\beta}} d\beta, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta}{\sqrt{\beta}} d\beta.$$

Il résulte de là que les intégrales $\int \cos(\alpha^2) d\alpha$, $\int \sin(\alpha^2) d\alpha$ prises depuis $\alpha = -p$ jusqu'à $\alpha = p$, convergent l'une et l'autre vers une limite fixe, lorsque la quantité positive p croît indéfiniment, soit que cette augmentation se fasse d'une manière continue, soit qu'elle ait lieu, comme dans ce qui va suivre, par sauts et suivant une loi quelconque. Il n'en serait pas de même pour l'intégrale $\int \cos \alpha d\alpha$, qu'on suppose quelquefois égale à zéro, et qui est essentiellement indéterminée, du moins tant qu'on la considère en elle-même.

Si l'on pose :

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{n}{2\pi}}, \quad g = i\sqrt{\frac{2\pi}{n}},$$

α étant une nouvelle variable, et n et i désignant des constantes positives que l'on considérera comme des entiers dans ce qui va suivre, il viendra :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) \cos i\alpha \, d\alpha &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot \left(a \cos \frac{2i^2\pi}{n} + b \sin \frac{2i^2\pi}{n}\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{n\alpha^2}{8\pi}\right) \cos i\alpha \, d\alpha &= 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \cdot \left(b \cos \frac{2i^2\pi}{n} - a \sin \frac{2i^2\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

Cela posé, soit :

$$(1) \quad F(\alpha) = c_0 + c_1 \cos \alpha + c_2 \cos 2\alpha + \dots = \sum c_j \cos j\alpha$$

une série de cosinus finie ou infinie. On suppose seulement que lorsque la série se prolonge à l'infini, elle est convergente et exprime une fonction continue de α . Les équations précédentes étant multipliées par c_i si l'on somme ensuite entre les mêmes limites que dans l'équation (1), on aura :

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{n\alpha^2}{8\pi} F(\alpha) d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}} (aG + bH), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\alpha^2}{8\pi} F(\alpha) d\alpha = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n}} (bG - aH). \end{cases}$$

où j'ai fait pour abrégier :

$$(3) \quad \sum c_i \cos \frac{2i^2\pi}{n} = G, \quad \sum c_i \sin \frac{2i^2\pi}{n} = H.$$

Pour obtenir les intégrales précédentes, on les supposera d'abord prises depuis $\alpha = -(4k+1)\pi$ jusqu'à $\alpha = (4k+1)\pi$, k désignant un nombre entier positif quelconque que l'on considérera ensuite comme infini. Chacune de ces deux intégrales étant décomposée en $4k+1$ nouvelles intégrales dont les limites résultent des expressions $(2h-1)\pi$ et $(2h+1)\pi$ en attribuant à h toutes les valeurs entières depuis $h = -2k$ jusqu'à $h = 2k$, si l'on pose ensuite $\beta = 2h\pi + \gamma$ dans chacune de ces nouvelles intégrales, en observant qu'on a, d'après l'équation (1), $F(2h\pi + \gamma) = F(\gamma)$, il viendra :

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\gamma F(\gamma) \sum \cos \frac{n}{8\pi} (\gamma + 2h\pi)^2, \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\gamma F(\gamma) \sum \sin \frac{n}{8\pi} (\gamma + 2h\pi)^2,$$

les sommations s'étendant depuis $h = -2k$ jusqu'à $h = 2k$. En réunissant les termes de la première somme qui correspondent à des valeurs opposées de h , cette somme prendra cette autre forme :

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\gamma^2}{8\pi} + \sum_{h=1}^{h=2k} \left(\cos \frac{n}{8\pi} (\gamma + 2h\pi)^2 + \cos \frac{n}{8\pi} (\gamma - 2h\pi)^2 \right) \\ = \cos \frac{n\gamma^2}{8\pi} + 2 \sum_{h=1}^{h=2k} \cos \frac{n}{8\pi} (\gamma^2 + 4h^2\pi^2) \cos \frac{hn\gamma}{2}. \end{aligned}$$

Le facteur $\cos \frac{n}{8\pi}(\gamma^2 + 4h^2\pi^2)$ n'a évidemment que deux valeurs différentes, à savoir :

$$\cos \left(\frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) \quad \text{ou} \quad \cos \left(\frac{n\gamma^2}{8\pi} + \frac{n\pi}{2} \right),$$

selon que h est pair ou impair, puisque h^2 , dans le premier cas, a la forme 4μ et, dans le second, celle-ci : $4\mu + 1$. Il viendra donc en réunissant séparément les termes pour lesquels h est pair et ceux où h est impair :

$$\begin{aligned} & \cos \frac{n\gamma^2}{8\pi} (1 + 2 \cos n\gamma + 2 \cos 2n\gamma + \dots + 2 \cos kn\gamma) \\ & + \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \left[2 \cos \frac{1}{2}n\gamma + 2 \cos 3 \left(\frac{1}{2}n\gamma \right) + \dots + 2 \cos(2k-1) \left(\frac{1}{2}n\gamma \right) \right] \right). \end{aligned}$$

En substituant pour ces deux séries les expressions connues :

$$\frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin \frac{1}{2}n\gamma}, \quad \frac{\sin(4k+1)\frac{1}{4}n\gamma}{\sin \frac{1}{4}n\gamma} - \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin \frac{1}{2}n\gamma},$$

il viendra :

$$\frac{\sin(4k+1)\frac{1}{4}n\gamma}{\sin \frac{1}{4}n\gamma} \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) + \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin \frac{1}{2}n\gamma} \left[\cos \frac{n\gamma^2}{8\pi} - \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) \right]$$

La somme que la seconde intégrale renferme, est pareillement :

$$\frac{\sin(4k+1)\frac{1}{4}n\gamma}{\sin \frac{1}{4}n\gamma} \sin \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) + \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin \frac{1}{2}n\gamma} \left[\sin \frac{n\gamma^2}{8\pi} - \sin \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) \right]$$

Ces expressions ayant la même valeur pour γ et pour $-\gamma$, et la même circonstance ayant lieu pour $F(\gamma)$ en vertu de l'équation (1), il est permis de n'étendre les intégrations que depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \pi$ et de doubler les résultats. On trouve ainsi ces deux expressions :

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\pi \frac{\sin(4k+1)\frac{1}{4}n\gamma}{\sin \frac{1}{4}n\gamma} \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) F(\gamma) d\gamma \\ & + 2 \int_0^\pi \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin \frac{1}{2}n\gamma} \left[\cos \frac{n\gamma^2}{8\pi} - \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) \right] F(\gamma) d\gamma, \\ & 2 \int_0^\pi \frac{\sin(4k+1)\frac{1}{4}n\gamma}{\sin \frac{1}{4}n\gamma} \sin \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) F(\gamma) d\gamma \\ & + 2 \int_0^\pi \frac{\sin(2k+1)\frac{1}{2}n\gamma}{\sin \frac{1}{2}n\gamma} \left[\sin \frac{n\gamma^2}{8\pi} - \sin \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{n\gamma^2}{8\pi} \right) \right] F(\gamma) d\gamma. \end{aligned}$$

Si l'on pose $\frac{1}{4}n\gamma = \beta$ dans la première et dans la troisième intégrale, et $\frac{1}{2}n\gamma = \beta$ dans la seconde

et la quatrième, ces expressions prennent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{8}{n} \int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\beta}{\sin \beta} \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{2\beta^2}{n\pi} \right) F \left(\frac{4\beta}{n} \right) d\beta \\ + \frac{4}{n} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} \left[\cos \frac{\beta^2}{2n\pi} - \cos \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{\beta^2}{2n\pi} \right) \right] F \left(\frac{2\beta}{n} \right) d\beta, \\ \frac{8}{n} \int_0^{\frac{n\pi}{4}} \frac{\sin(4k+1)\beta}{\sin \beta} \sin \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{2\beta^2}{n\pi} \right) F \left(\frac{4\beta}{n} \right) d\beta \\ + \frac{4}{n} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(2k+1)\beta}{\sin \beta} \left[\sin \frac{\beta^2}{2n\pi} - \sin \left(\frac{1}{2}n\pi + \frac{\beta^2}{2n\pi} \right) \right] F \left(\frac{2\beta}{n} \right) d\beta. \end{aligned}$$

Les limites de ces expressions correspondant à $k = \infty$ résultent immédiatement du théorème énoncé à la fin du premier paragraphe : en substituant ces valeurs dans les équations (2) et multipliant par $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$, il viendra :

$$\begin{aligned} aG + bH &= \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \left(1 + \cos \frac{n\pi}{2} \right) F(0) + 4\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sum \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2s^2\pi}{n} \right) F \left(\frac{4s\pi}{n} \right) \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sum \left[\cos \frac{s^2\pi}{2n} - \cos \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{s^2\pi}{2n} \right) \right] F \left(\frac{2s\pi}{n} \right), \\ bG - aH &= \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} F(0) + 4\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sum \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{2s^2\pi}{n} \right) F \left(\frac{4s\pi}{n} \right) \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \sum \left[\sin \frac{s^2\pi}{2n} - \sin \left(\frac{n\pi}{2} + \frac{s^2\pi}{2n} \right) \right] F \left(\frac{2s\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

Dans chacune de ces deux équations la première somme s'étend depuis $s = 1$ jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{4}n$, la seconde depuis $s = 1$ jusqu'au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{2}n$, le dernier terme de la seconde somme devant être réduit à moitié lorsque $\frac{1}{2}n$ est un nombre entier, et la même chose ayant lieu pour la première lorsque $\frac{1}{4}n$ est aussi un entier.

Pour déduire de ces équations les sommations dont il a été question dans le préambule de ce Mémoire, supposons la série (1) composée de n termes et tous ses coefficients égaux à l'unité. On aura alors :

$$F(\alpha) = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos(n-1)\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sin \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha},$$

et la fonction $F \left(\frac{2t\pi}{n} \right)$ sera évidemment nulle, lorsque t est un nombre entier non-divisible par n . Il résulte de là, en ayant égard aux limites des sommations précédentes, que tous leurs termes disparaissent, et comme on a aussi $F(0) = n$, il viendra simplement :

$$aG + bH = \left(1 + \cos \frac{1}{2}n\pi \right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}n\pi}, \quad bG - aH = \sin \frac{1}{2}n\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{2}n\pi}.$$

Pour déterminer les deux quantités a et b , indépendantes de n , il suffira de donner à n une valeur particulière. Posant par exemple $n = 1$, on aura $G = 1, H = 0$, et les équations précédentes

deviendront $a = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$, $b = \sqrt{\frac{1}{2}\pi}$. On a donc généralement, quel que soit n :

$$G + H = \left(1 + \frac{1}{2}n\pi\right) \cdot \sqrt{n}, \quad G - H = \sin \frac{1}{2}n\pi \cdot \sqrt{n},$$

et par conséquent :

$$G = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{1}{2}n\pi + \sin \frac{1}{2}n\pi\right) \sqrt{n}, \quad H = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{1}{2}n\pi - \sin \frac{1}{2}n\pi\right) \sqrt{n}.$$

En attribuant successivement à n ces 4 formes : $4\mu, 4\mu + 1, 4\mu + 2, 4\mu + 3$ et remettant pour G et H les séries que ces lettres représentent d'après les équations (3), on aura :

$$\begin{aligned} \sum \cos \frac{2i^2\pi}{n} &= \sqrt{n}, \quad \sum \sin \frac{2i^2\pi}{n} = \sqrt{n}, \quad n = 4\mu, \\ \sum \cos \frac{2i^2\pi}{n} &= \sqrt{n}, \quad \sum \sin \frac{2i^2\pi}{n} = 0, \quad n = 4\mu + 1, \\ \sum \cos \frac{2i^2\pi}{n} &= 0, \quad \sum \sin \frac{2i^2\pi}{n} = 0, \quad n = 4\mu + 2, \\ \sum \cos \frac{2i^2\pi}{n} &= 0, \quad \sum \sin \frac{2i^2\pi}{n} = \sqrt{n}, \quad n = 4\mu + 3, \end{aligned}$$

les sommations s'étendant depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n - 1$.

§ 3.

Je ne terminerai pas cet extrait, sans avoir rappelé les considérations extrêmement simples par lesquelles M. GAUSS, dans le Mémoire déjà cité, a déduit des expressions précédentes, la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers impairs quelconques.

Le nombre premier impair p étant considéré comme diviseur, le reste provenant d'un carré quelconque non-divisible par p , sera évidemment compris parmi ceux que donne la série :

$$1^2, 2^2, 3^2, \dots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 ;$$

et l'on prouve facilement que ces restes que je désignerai par :

$$(I) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\frac{p-1}{2}},$$

pris dans un ordre quelconque, sont tous différents entre eux. Soient encore :

$$(II) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_{\frac{p-1}{2}},$$

ceux des nombres $1, 2, 3, \dots, p-1$ que la série (I) ne renferme pas. Cela posé, le nombre quelconque q non-divisible par p , est dit résidu ou non-résidu quadratique par rapport au diviseur p , selon que le reste de q appartient à la série (I) ou à la série (II), et l'on s'assure facilement que les restes de :

$$1^2.q, 2^2.q, 3^2.q, \dots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.q,$$

abstraction faite de l'ordre, coïncident avec (I) ou (II), selon que le premier ou le second de ces deux cas a lieu⁵.

Considérons la somme $\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}}$ dans laquelle e désigne à l'ordinaire la base des logarithmes népériens. Comme p est impair, il résulte des expressions du paragraphe précédent que cette somme est $\sqrt{p}$ ou $\sqrt{p} \cdot \sqrt{-1}$ selon que p a la forme $4\mu + 1$ ou celle-ci : $4\mu + 3$ Cette double valeur étant donnée par la formule unique $\sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}$, on aura :

$$\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} = \sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}.$$

Si l'on met à part le premier terme et que l'on réunisse deux à deux les termes correspondant à s et à $p-s$, en ayant égard à l'équation évidente :

$$e^{s^2 \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} = e^{(p-s)^2 \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}},$$

il viendra :

$$1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} = \sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2},$$

ou ce qui revient au même, en rejetant les multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ dans l'exposant :

$$1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} = \sqrt{p}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2},$$

On a pareillement :

$$P = \sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2 \cdot \frac{2q\pi}{p} \sqrt{-1}} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{s^2 \cdot \frac{2q\pi}{p} \sqrt{-1}},$$

et comme les restes de la série $1^2.q, 2^2.q, 3^2.q, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2.q$, coïncident avec (I) ou (II), selon que q est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p , on a respectivement dans ces deux cas, en négligeant toujours les multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ dans l'exposant :

$$P = 1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad P = 1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{b_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}}$$

⁵Disquisitiones arithmeticae. Sect. IV.

expressions dont la seconde, en vertu de l'équation évidente :

$$\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{b_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} = \sum_{s=1}^{s=p-1} e^{s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} = -1,$$

se change en :

$$P = -1 - 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}}.$$

Si donc l'on désigne par δ l'unité prise positivement ou négativement selon que q est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p , on aura l'équation qui comprend les deux cas :

$$\sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2 \cdot \frac{2q\pi}{p} \sqrt{-1}} = \delta \left(1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{a_s \cdot \frac{2\pi}{p} \sqrt{-1}} \right) = \delta \sqrt{p} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}.$$

Si l'on suppose que q est aussi un nombre premier impair, on aura par une simple permutation :

$$\sum_{t=0}^{t=q-1} e^{t^2 \cdot \frac{2p\pi}{q} \sqrt{-1}} = \varepsilon \sqrt{q} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1 , selon que p est ou n'est pas résidu quadratique de q .

En multipliant les équations précédentes entre elles, il viendra :

$$\sum_{t=0}^{t=q-1} \sum_{s=0}^{s=p-1} e^{(q^2 s^2 + p^2 t^2) \frac{2\pi}{pq} \sqrt{-1}} = \delta \varepsilon \sqrt{pq} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

ou ce qui est la même chose, en ajoutant $4st\pi\sqrt{-1}$ à l'exposant :

$$\sum_{t=0}^{t=q-1} \sum_{s=0}^{s=p-1} e^{(qs+pt)^2 \frac{2\pi}{pq} \sqrt{-1}} = \delta \varepsilon \sqrt{pq} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$

il est facile de voir qu'entre les limites de la double sommation $qs + pt$ ne saurait donner deux fois le même reste par rapport au diviseur pq ; car si les restes provenant de $qs + pt$ et de $qs' + pt'$ étaient égaux, $q(s - s') + p(t - t')$ serait divisible par pq , ce qui exige, s, s' étant compris entre 0 et $p - 1$, et t, t' entre 0 et $q - 1$, qu'on ait à la fois $s = s', t = t'$. Ces restes seront donc $0, 1, 2, \dots, pq - 1$, et l'on pourra les mettre à la place de la série de valeurs fournies par l'expression $qs + pt$, ce changement consistant évidemment à négliger des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ dans l'exposant. On aura ainsi

$$\sum_{s=0}^{s=pq-1} e^{s^2 \cdot \frac{2\pi}{pq} \sqrt{-1}} = \delta \varepsilon \sqrt{pq} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

ou en remplaçant le premier membre par sa valeur qui résulte des expressions du paragraphe précédent :

$$\sqrt{pq} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2} = \delta \varepsilon \sqrt{pq} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

et par conséquent :

$$\delta\varepsilon = (\sqrt{-1})^{\left(\frac{pq-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$$

et comme l'exposant est équivalent à l'expression :

$$\frac{1}{2}(p-1)(q-1) + (p-1)(q-1) \left(\frac{(p+1)(q+1)}{4} - 1 \right),$$

dont le second terme peut être négligé comme étant divisible par 4, il viendra :

$$\delta\varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

Cette équation renferme la loi de réciprocité, car il en résulte qu'on a $\delta = \varepsilon$, lorsque p et q sont l'un et l'autre de la forme $4\mu + 1$ ou l'un de la forme $4\mu + 1$, l'autre de la forme $4\mu + 3$ et qu'au contraire on a $\delta = -\varepsilon$, lorsque p et q ont l'un et l'autre la forme $4\mu + 3$.