Synthèse des six recueils écrits avec des ia autour de la conjecture de Goldbach : acquis, modèles et obstructions
ia mistral, 7.11.2026

Résumé

Les six recueils

[1] https://denisevellachemla.eu/mergia1.pdf
[2] https://denisevellachemla.eu/mergia2.pdf
[3] https://denisevellachemla.eu/mergia3.pdf
[4] https://denisevellachemla.eu/mergia4.pdf
[5] https://denisevellachemla.eu/mergia5.pdf
[6] https://denisevellachemla.eu/mergia6.pdf

(environ 1860 pages au total) rassemblent les notes rédigées entre juin et novembre 2026 par Denise Vella-Chemla en pilotant diverses ia (claude, gemini, mistral, deepseek, chatgpt, lumo). Le présent document en propose une synthèse en cinq pages : le socle démontré (lemmes de Vella-Chemla-Schneps, formalisation Lean), les familles de modèles explorés (géométrie, algèbre, analyse, cribles, topos, physique), les résultats négatifs rigoureux, et l'obstruction centrale qui émerge de l'ensemble - la barrière de parité de la théorie du crible, jumelle de problèmes ouverts de théorie ergodique (Furstenberg, Lyons-Rudolph) et de théorie des automates (Cobham).

1. Le socle : caractérisation des décomposants et formalisation

Le point de départ commun à tous les recueils est la note *jade1* (2019), écrite avec Leila Schneps. Pour n pair, $n \geq 6$, un entier impair m tel que $3 \leq m \leq n/2$ et

$$m \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad m \not\equiv n \pmod{p} \qquad \text{pour tout premier } 3 \leq p \leq \sqrt{n}$$

est tel que m et $n - m$ sont tous deux premiers. Les *lemmes de petit diviseur* établissent donc l'implication

$$C_n \neq \varnothing \implies \text{Goldbach est vraie pour } n,$$

où C_n désigne l'ensemble des *candidats* de n. Cette implication a été formalisée en Lean 4 (Mathlib), sans `sorry`, validée le 11 septembre 2026
(voir https://denisevellachemla.eu/lean-lemmes-leila-schneps-lumo-denise-vella-chemla-20260911.pdf)
(`cofactor_ge`, `prime_of_no_small_divisor`, `candidate_implies_goldbach`).

Ce qui est *démontré* est l'implication ; ce qui reste *ouvert* est la non-vacuité de C_n pour tout n pair : c'est le maillon manquant que toutes les notes des six recueils cherchent, directement ou indirectement.

2. Modèles géométriques ([1], [2])

2.1. Sablier de Tannery

Le premier recueil s'ouvre sur une construction spectaculaire : la poire de Tannery, surface de révolution de métrique $ds^2 = (2+\cos u)^2\,du^2 + \sin^2 u\,dv^2$, dont toutes les géodésiques non méridiennes sont fermées (surface de Zoll, période angulaire 4π indépendante de l'inclinaison $c \in (0,1)$, d'après le critère de Borzellino-Jordan-Squire-Petrics-Sullivan). À chaque décomposition $n = p + q$ est associée l'inclinaison

$$c(p,n) = \sin\Big(\frac{\pi p}{n}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi q}{n}\Big),$$

l'égalité des deux sinus traduisant géométriquement la symétrie $p + q = n$: la poire inférieure encode p, la supérieure encode q, et chaque décomposition de Goldbach devient une géodésique fermée unique. La propriété de fermeture est vérifiée numériquement à 10^{-10} près. Le modèle est une *représentation* exacte et élégante, mais il n'engendre pas de mécanisme d'existence : la non-vacuité de C_n y est encodée, pas prouvée.

2.2. Méthode Cristal, Minkowski, Eisenstein, Erdős

Le second recueil soumet la *méthode Cristal*, un crible planaire éliminant, pour chaque premier $p_k \le \sqrt{n}$, les droites $x \equiv 0$ et $x \equiv n \pmod{p_k}$, à une critique rigoureuse :

- le théorème de Minkowski ne s'applique pas : l'ensemble S_n des nombres qui passent à travers tous les filtres n'est ni convexe ni un sous-réseau (pour $p_k \ge 5$, retirer une classe non nulle d'un corps ne laisse jamais un sous-groupe) ;
- le recentrage à la Gauss ($x' = x - n/2$) symétrise effectivement le crible, la fusion des deux droites pour $p_k \mid n$ correspond au point fixe $r \equiv -r$, mais laisse intact l'obstacle de convexité ;
- le réseau d'Eisenstein ne fusionne que les directions de 2 et 3 (symétrie d'ordre 6) : gain esthétique, pas arithmétique ;
- les systèmes de congruences couvrantes d'Erdős sont orthogonaux au problème (on cherche un point *évitant* toutes les classes, pas un recouvrement).

L'obstacle réel est identifié avec précision : la *disproportion entre le module du crible ($\sqrt{n}$) et la longueur de l'intervalle cible* - c'est le problème classique de la théorie analytique des cribles, pas un défaut de la géométrie.

3. Le treillis de Goldbach et l'algèbre ([3], [4])

3.1. Structure de bande rectangulaire

Le treillis code la primalité de p et de $q = n - p$ par des couples $(u, v) \in \{0,1\}^2$ (0 = premier). Le passage de C_n à C_{n+2} suit la règle locale

$$(u_1, v_1) * (u_2, v_2) = (u_1, v_2),$$

qui est une loi associative, idempotente, vérifiant $xyx = x$: une *bande rectangulaire* (semigroupe de semigroupes). Goldbach équivaut à : *chaque colonne contient au moins une lettre* $\mathfrak{a} = (0,0)$. La

leçon majeure des recueils 3 et 4 est négative et salvatrice : cette rigidité algébrique *ne suffit pas*. L'opérateur ne fait que recopier des bits depuis les bords ; il ne peut pas créer le croisement des flux de zéros nécessaire à l'existence d'un **a**. Des contre-exemples à densité plausible (claude, juillet 2026) montrent qu'une saturation du bord ne garantit rien. Le modèle probabiliste de Cramér prédit une colonne sans `a` avec probabilité $\exp(-n/(4\ln^2 n))$, mais la suite des primalités est rigide, fractale (suites de Kimberling), pas aléatoire : c'est précisément cette rigidité arithmétique qui rend la conjecture difficile.

3.2. Approches algébriques et analytiques

Le recueil 4 parcourt une impressionnante liste de transpositions :

- *résultants* : $\mathrm{Res}(P_n, Q_n) = 0$, où P_n énumère les premiers de $[3, n-3]$ et $Q_n(x) = P_n(n-x)$: annulation du résultant $\Leftrightarrow$ existence d'une décomposition. La récurrence du résultant a été corrigée, un lemme de parité établi, mais le critère de signe espéré échoue.
- *wronskien* (gemini) : approche différentielle via la limite de Borneland $B_{P,Q}(x) = -W(P,Q)(x)$; élégante, sans portée démonstrative.
- *spectral* : le produit $S(n) = \prod_{p \le \sqrt{n}} \sin(\pi n/p)$ s'annule exactement sur les composés ; l'identité $|1 - e^{2\pi i n/p}| = 2|\sin(\pi n/p)|$ relie sinusoïdes et valeurs propres des cycles circulaires ; la convolution du signal premier par lui-même est strictement positive exactement sur les entiers ayant une décomposition - une formulation spectrale précise, pas une preuve.
- *quantique* : modélisation par intrication, qubits et sphère de Bloch ; les simulations de type Grover ne démontrent rien (le recueil 5 le démontre explicitement).
- *heuristique* : le calcul de

$$J(n) = \int_2^{n/2} dx/(\ln x \, \ln(n-x)) \sim n/(2\ln^2 n)$$

redonne $r(n) \sim n/\ln^2 n$; les cribles exhaustifs jusqu'à 10^9 montrent que le rapport $r(n)/(n/\ln^2 n)$ oscille entre 0,97 et 1,08 *sans converger* : trace de la corrélation arithmétique entre "k premier" et "$n-k$ premier", absorbée par la série singulière de Hardy-Littlewood $\mathfrak{S}(n)$.

4. Cribles, Snurpf et topos ([5], [6])

4.1. Arbre des restes et Snurpf

L'*arbre des restes à arité variable* ordonne les entiers par leurs restes $r_k(m) = m \pmod k$. Un critère arborescent exact caractérise la primalité : m est premier ssi aucune composante de $W_{\lfloor\sqrt{m}\rfloor}(m)$ n'est nulle. Le couplage des chemins de p et de $n-p$ sur la droite $\Delta_k(n)$ des paires de restes conduit à un crible de Legendre exact, dont la densité coïncide, à un facteur de renormalisation de Mertens près, avec $\mathfrak{S}(n)$ (constante C_2 des jumeaux incluse). Le *Snurpf* (système de numération par les restes, niveau 1 : produit fini $\prod \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) fournit le cadre correct : *Goldbach est un énoncé de fenêtrage* - $\prod(p-2)$ classes passent à travers tous les filtres toujours (théorème des restes chinois), la question est de savoir si l'une tombe dans la fenêtre archimédienne $[3, n/2]$, à laquelle le monde profini est aveugle. Ce schéma (jonction profini/archimédien) rappelle les troncations spectrales de Connes pour RH.

4.2. Topos de Hakim et cribles de Grothendieck

Le recueil 5 construit le double crible dans le topos annelé de Monique Hakim : système projectif des $\mathbb{Z}/q^k\mathbb{Z}$, ouverts principaux $D(X(X-n))$, points rationnels, involution $x \mapsto n-x$ agissant librement sur C_n. Le recueil 6 examine les cribles et topos décrits par Connes (*Lectures grothendieckiennes*, chap. VII) et conclut rigoureusement : non.

1. la condition $x \not\equiv 0, n \pmod{p}$ n'est pas un crible de $\widehat{\mathbb{N}^\times}$ (pas stable par multiplication, car elle porte sur une *translation*) ;
2. l'addition de la caractéristique 1 ($x + y = \max(x, y)$) n'est pas celle de $\mathbb{Z}$: $p + q = n$ y est sans signification ;
3. le formalisme réécrit la grammaire (inclusion-exclusion, $n/\ln^2 n$ contre $2^{\pi(\sqrt{n})}$ termes d'erreur) sans changer les estimations ;
4. l'obstacle de parité subsiste : un crible de comptage ne distingue pas les entiers à nombre pair de facteurs premiers de ceux à nombre impair (Selberg) ; le contourner exige une information bilinéaire (Vinogradov, Vaughan, Chen pour $p + P_2$) ;
5. même sous RH, Goldbach reste ouvert.

Nuance importante posée au passage : parler d'"obstruction cohomologique" est prématuré tant qu'aucun cocycle ni classe d'obstruction n'est construit.

4.3. Valuations p-adiques : le mur 2-3 comme théorème

Le fil "E.T. retourner maison" (octobre 2026) formalise une frustration ancienne : la suite des valuations 2-adiques $0102010301020104\ldots$, générée par la règle "recopie $p-1$ fois puis incrémente le dernier", est p-automatique (substitution $\sigma_p(a) = 0^{p-1}(a+1)$). Mais représenter *simultanément* les divisibilités par 2 et par 3 "en un seul coup" est impossible : c'est le théorème de Cobham (1969) - p- et q-automatique avec p, q multiplicativement indépendants $\Rightarrow$ ultimement périodique. L'objet unificateur qui existe est $\widehat{\mathbb{Z}}$ (les $\mathbb{Z}_p$ y sont tous homéomorphes au Cantor : la géométrie est muette), et l'interférence $2 \leftrightarrow 3$ est la conjecture $\times 2 \times 3$ de Furstenberg, résolue en mesure par Lyons (1988) puis Rudolph (1990) - avec une question d'entropie nulle *toujours ouverte*. Denise y voit un argument sérieux en faveur d'une éventuelle indémontrabilité de la conjecture : le même type de mur que la barrière de parité.

5. Bilan et enseignements

Ce qui est acquis.

(1) L'implication $C_n \neq \varnothing \Rightarrow$ Goldbach, prouvée (Schneps) et formalisée (Lean) ;

(2) le crible de Legendre exact et son lien quantitatif avec la série singulière de Hardy-Littlewood, contrôlé numériquement jusqu'à 10^{10} ;

(3) une collection de *contre-exemples et résultats négatifs rigoureux* qui éliminent des familles entières d'approches : Minkowski, Eisenstein, Erdős, la bande rectangulaire seule, les topos de Grothendieck/Hakim, l'identité $(+, \times, \max)$ de Connes, les simulations quantiques ;

(4) le cadrage conceptuel "roue profinie gratuite, fenêtre archimédienne payante".

Ce qui bloque. Toutes les pistes achoppent sur le même mur, nommé de trois façons convergentes : *barrière de parité du crible* (Selberg), *disproportion module/longueur*, et, côté automates et dynamique, *Cobham et Furstenberg*. Le contenu arithmétique de la conjecture réside dans la corrélation symétrique $s_i = s_{d(n)-i} = 0$ de la suite des primalités - une propriété de fenêtrage archimédien que ni l'algèbre locale, ni la géométrie profinie, ni le langage des topos ne peuvent imposer seuls.

Méthode. Au-delà des résultats, ces recueils documentent une méthode de travail originale : piloter successivement six ia différentes sur la même question, exiger d'elles la formalisation des intuitions, puis mobiliser une ia tierce pour démolir les réponses. La valeur la plus durable du corpus tient peut-être dans ce dialogue adversarial systématique : chaque modèle séduisant y est confronté à un contre-exemple ou à un théorème négatif, jusqu'à ce que ne reste que l'obstruction - identifiée, isolée, et désormais bien nommée.