Synthèse des six recueils de notes écrites avec des ia autour de la conjecture de Goldbach : acquis, modèles et obstructions
ia lumo, 7.11.2026

1. Vue d'ensemble

Les six recueils sont aux adresses suivantes :

[1] https://denisevellachemla.eu/mergia1.pdf
[2] https://denisevellachemla.eu/mergia2.pdf
[3] https://denisevellachemla.eu/mergia3.pdf
[4] https://denisevellachemla.eu/mergia4.pdf
[5] https://denisevellachemla.eu/mergia5.pdf
[6] https://denisevellachemla.eu/mergia6.pdf

Ces six documents forment un corpus cohérent : ils explorent la *conjecture de Goldbach* (tout entier pair $n \geq 6$ est somme de deux nombres premiers) par une série d'approches originales - géométrique (sablier de Tannery), géométrico-cribliste ("méthode Cristal"), algébrique et combinatoire ("treillis de Goldbach"), analytique (calcul asymptotique du nombre de décompositions), spectrale (signaux arithmétiques et convolution), visuelle et computationnelle (réseaux de diffraction, suites de récurrence, algèbre min-plus, zéros de la fonction zêta). Le fil conducteur est constant : chaque construction est présentée avec un bilan critique honnête - *elle illustre, reformule ou vérifie empiriquement la conjecture, mais ne la démontre pas.* Les documents identifient précisément *pourquoi* chaque piste bute sur un obstacle structurel, ce qui en fait autant des bilans d'échecs fructueux que des propositions.

2. [1] - Géodésiques du sablier de Tannery et décompositions de Goldbach

Objet. Codage géométrique des décompositions de Goldbach sur la "poire de Tannery", surface de révolution engendrée par une demi-lemniscate de Gérono, dont la paramétrisation exacte est $x(u,v) = \big(g(u),\, \sin u \cos v,\, \sin u \sin v\big)$ avec $g(u) = 4\sqrt{2}\,\sin(u/2)$ et $E(u) = (2+\cos u)^2$. Le *sablier* s'obtient en accolant deux poires par leur col (point conique d'ordre 3, $z = 0$).

Résultats mathématiques.

- *relation de Clairaut* : toute géodésique vérifie $h(u)\sin\psi = c$ (l'"inclinaison"), avec la formule

$$\frac{dv}{du} = \frac{c\sqrt{E(u)}}{h(u)\sqrt{h(u)^2 - c^2}}.$$

  Une erreur classique (omettre la racine au dénominateur) produit des courbes non refermées.
- *propriété de Zoll* (Tannery 1892, Borzellino et al. 2006) : *toutes* les géodésiques non méridiennes sont fermées, de période angulaire constante $\Phi = 4\pi$, indépendante de l'inclinaison c

- deux tours complets par oscillation, d'où une forme de "huit courbé". C'est une conséquence du choix $E(u) = (c_0 + \cos u)^2$ avec $c_0 = 2$. Vérifié numériquement à 10^{-10} près.
- *encodage de Goldbach* : à chaque décomposition $n = p + q$ on associe l'inclinaison $c(p, n) = \sin(\pi p/n) = \sin(\pi q/n)$; la poire inférieure encode p, la supérieure encode q, l'égalité des inclinaisons traduisant la symétrie $p + q = n$. *Remarque importante du document* : cette construction *représente* la décomposition mais ne révèle aucune arithmétique - les premiers ne se distinguent pas géométriquement des non-premiers.

Point pédagogique fort. Une géodésique n'est pas une courbe tracée librement : elle est déterminée par un point et une direction initiale (contrainte différentielle). Une géodésique générique *ne peut pas passer par le col* : par Clairaut, passer en $h = 0$ imposerait $c = 0$ (donc être un méridien), et l'intégrale diverge - la courbe s'enroulerait indéfiniment sans atteindre le col. Les deux poires portent donc des géodésiques indépendantes.

Implémentation. Un programme Python autonome [1] intègre dv/du avec `scipy.integrate.quad` et déclaration des singularités en b_0 et $b_1 = \pi - b_0$, décompose l'oscillation en deux demi-oscillations et vérifie la fermeture $\Phi = 4\pi$.

3. [2] - Profils d'involutions, lien π–φ, et bilan critique de la méthode Cristal

Première partie.

Deux figures sont commentées : une distribution de points fixes de profils d'involutions discrets pour de nombreux entiers pairs (structures en faisceaux, interprétées - avec prudence - comme la trace visuelle des sauts de multiplicité des décomposants de Goldbach) et une corrélation empirique entre la fonction de comptage $\pi(x)$ et l'indicatrice d'Euler $\varphi(x)$.

Seconde partie (la note centrale) : que peut et ne peut pas prouver la méthode Cristal ?

La méthode Cristal place les entiers $1, \ldots, n$ sur un réseau planaire et, pour chaque premier $p_k \leq \sqrt{n}$, élimine les droites $x \equiv 0$ et $x \equiv n \pmod{p_k}$ - c'est le crible de Legendre-Ératosthène appliqué simultanément à x et $n - x$. Les nombres quin passent à travers tous les filtres sont les candidats décomposants de Goldbach. Trois tentatives de rendre cette construction démonstrative sont examinées et *rejetées, chacune pour une raison structurelle précise* :

L'obstacle réel, isolé dans le document.

Le module cumulé $P = \prod_{p_k \leq \sqrt{n}} p_k \approx e^{\sqrt{n}}$ croît bien plus vite que n : une classe de résidu survit modulo P, mais rien ne garantit qu'un représentant tombe dans la fenêtre cible $[\sqrt{n},\, n - \sqrt{n}]$, de longueur $n \ll P$. C'est le *problème du niveau de distribution* de la théorie analytique des cribles, aggravé par l'*obstruction de parité de Selberg* (aucun crible pur ne distingue un premier d'un produit de deux premiers - ce qui borne les résultats à la Chen, 1973). Conclusion : la méthode Cristal est

1. Voir https://denisevellachemla.eu/mergia1.pdf page 6.

illustrative et non démonstrative, mais pédagogiquement fidèle, notamment sur le rôle privilégié des petits premiers 2 et 3.

Piste	Apport réel	Pourquoi elle échoue
Théorème de Minkowski	-	L'ensemble des nombres qui passent à travers tous les filtres S_n n'est ni convexe ni un sous-réseau (retirer une classe non nulle dans $\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}$ ne laisse jamais un sous-groupe pour $p_k \geq 5$)
Recentrage "à la Gauss" ($x' = x - n/2$)	Symétrie centrale réelle ; la fusion des droites quand $p_k \mid n$ devient un point fixe de $x' \mapsto -x'$	Minkowski exige aussi la convexité, qui reste absente
Réseau triangulaire d'Eisenstein	Densité d'empilement optimale, met en valeur les directions de 2 et 3	Le gain porte sur le réseau ambiant, pas sur S_n ; seuls 2 et 3 s'y alignent naturellement
Systèmes de congruences couvrants d'Erdős	Cadre conceptuel élégant	S_n n'est jamais un système couvrant : la densité de l'ensemble des nombres qui passent à travers tous les filtres $\delta(n) \sim C/(\ln n)^2$ est *strictement positive*

4. [3] - Le treillis de Goldbach : algèbre, arithmétique et limites de l'approche locale

Construction. Pour chaque pair $n \geq 6$, la colonne C_n code les décompositions $n = p + q$ (p impair, $3 \leq p \leq n/2$) par des couples de bits $(u, v) \in \{0,1\}^2$: $a = (0,0)$ p et q premiers ; $b = (1,0)$; $c = (0,1)$; $d = (1,1)$. Le passage de C_n à C_{n+2} obéit à une unique règle locale

$$R\Big((u_1, v_1),\, (u_2, v_2)\Big) = (u_1, v_2),$$

associative, idempotente, satisfaisant $xyx = x$: c'est une *bande rectangulaire* au sens de la théorie des semi-groupes (Howie). La conjecture de Goldbach équivaut à : *chaque colonne C_n contient au moins une lettre $a = (0,0)$.*
Contenu critique.

- un *lemme algébrique* montre que toute itération de R ne sélectionne que des composantes extrêmes (u_i, v_j) : l'algèbre décrit comment les bits se recopient, mais ne crée jamais de 0 nouveau.
- *la "rigidité" ne suffit pas* : affirmer que la structure de bande + la saturation des bords garantissent un a dans chaque colonne est incorrect. L'existence d'un a dépend de la suite S des primalités des impairs ($s_i = 0$ ssi $3 + 2i$ est premier), et aucune propriété algébrique de R ne peut l'imposer - avec une suite S arbitraire sans 0 en positions symétriques, les colonnes correspondantes n'auraient pas de a.
- *limites du modèle probabiliste* : le modèle de Cramér donnerait une probabilité de colonne sans a d'environ $\exp\Big(-n/(4(\ln n)^2)\Big)$ (donc un nombre fini d'exceptions par Borel-Cantelli), mais la suite S n'est pas aléatoire : c'est une *suite fractale au sens de Kimberling*, aux fortes corrélations p-adiques. C'est cette rigidité, non l'absence de structure, qui rend Goldbach difficile.

- *perspective proposée* : étudier les corrélations de S (intersection de l'ensemble des premiers avec ses translatés) par les méthodes du cercle, du crible ou de la théorie des premiers en progression arithmétique. Le treillis reste un cadre de reformulation et de visualisation, pas une preuve.

Notes annexes dans le même fichier.

Une tentative de preuve "par invariance du flux de primalité" (saturation des frontières, conservation par projection, "principe de collision inévitable"), pilotée avec Gemini, est présentée mais retombe elle-même sur la question non résolue : le signal 0 peut-il être "éteint" par une configuration locale ? Une synthèse historique (Mistral) rappelle que ce travail, commencé en 2014-2018, a été repris en 2026 avec les ia génératives.

5. [4] - Nombre asymptotique de décompositions et approche spectrale

Partie 1 : calcul explicite de $J(N)$. En encadrant $\ln(N-x) \sim \ln N$ sur $[2, N/2]$, on obtient

$$J(N) = \int_2^{N/2} \frac{dx}{\ln x \, \ln(N-x)} \sim \frac{N}{2(\ln N)^2}, \qquad \text{et, en doublant par symétrie,} \qquad r(N) \sim \frac{N}{(\ln N)^2}$$

pour le nombre de décompositions de Goldbach. Validation numérique par crible exhaustif jusqu'à $N = 10^9$:

N	$N/(\ln N)^2$	vraie valeur $r(N)$	rapport
10^4	118	127	1,077
10^6	5 239	5 402	1,031
10^8	294 706	291 400	0,989
10^9	2 328 540	2 274 205	0,977

L'ordre de grandeur est correct, mais *le rapport oscille autour de 1 au lieu de converger* : c'est la trace de la corrélation entre "k premier" et "$N-k$ premier", qui dépend de la factorisation de N (un N riche en petits facteurs premiers a plus de décompositions que la moyenne) - invisible dans le modèle d'indépendance naïve, et exactement ce qu'absorbe la constante singulière de Hardy-Littlewood.

Partie 2 : des sinusoïdes aux valeurs propres. Lien entre deux modélisations antérieures (oscillateurs harmoniques et permutations circulaires) via l'identité $|1 - e^{2\pi i n/p}| = 2|\sin(\pi n/p)|$. Construction du signal

$$a(n) = \prod_{p \le \sqrt{n}} \sin^2\Big(\frac{\pi n}{p}\Big),$$

dont le *support est exactement celui des nombres premiers* ($a(n) = 0 \iff n$ composé, car tout composé a un diviseur premier $\le \sqrt{n}$). Interprétation spectrale : $\sin^2(\pi n/p)$ mesure, à un facteur près, le carré de la distance entre le mode propre $\omega_p^n = e^{2\pi i n/p}$ du cycle de longueur p et le mode stationnaire 1 - la primalité correspond à l'absence de retour d'un mode sur 1.

Formulation spectrale de Goldbach. Posons $G(N) = (a * a)(N) = \sum_x a(x)\, a(N-x)$, somme de termes positifs : $G(N) > 0 \iff N = p + q$. La conjecture équivaut à la positivité de cette autocorrélation. Par Fourier, $\widehat{G}(k) = \Lambda_k^2$ (carré des coefficients de la DFT de a) ; dans le cadre circulaire, $G(N) = \frac{1}{M} \sum_k \Lambda_k^2\, e^{2\pi i k N/M}$. L'architecture est analogue à la *méthode du cercle* de Hardy-Littlewood (arcs majeurs / arcs mineurs). *Mais ce n'est pas une preuve* : le passage à Fourier ne rend pas la positivité automatique (les termes spectraux ont des phases différentes) ; il faudrait contrôler quantitativement amplitudes et phases des Λ_k. Question de recherche suggérée : le spectre de $a(n)$ a-t-il une structure absente du spectre de l'indicatrice $\mathbf{1}_{\mathcal{P}}$ ou de la fonction de von Mangoldt, permettant de contrôler $a * a$?

6. [5] - Motifs, réseaux de diffraction, primalité et récurrences

D'après le plan du document, il comprend plusieurs volets :

- *somme pour un motif carré (ordre 4)* et *grille de résolution* ;
- *superposition de réseaux mod 3, 5, 7 "via Fraunhofer discret"* : création de grilles où les positions vérifiant x_1 mod 3 (en rouge), x_4 mod 5 (en bleu), x_5 mod 7 (en vert) sont marquées, superposition en image RGB, puis *calcul de la transformée de Fourier et affichage de la figure de diffraction* - une visualisation physique (optique de Fourier) des structures de congruences, dans l'esprit des approches spectrales du fichier 4 ;
- *un théorème "1" : aucun diviseur de p ni de q dans* $[2, p-1]$, avec pour chaque exception "p premier, q composé, plus petit facteur premier de $q \geq p$", et un *test de primalité* ("aucun facteur $\leq \sqrt{n}$ trouvé $\Rightarrow$ n est premier") ;
- *un pipeline de récurrences* : calcul de $a_n = 1$ si $2n+3$ est premier, puis t_n par récurrence, puis g_n par récurrence - visiblement la construction d'une suite "g" (nombre de décompositions de Goldbach ?) à partir de l'indicatrice des impairs, avec précalcul coûteux de "zéros" réutilisés pour tout N.

Lecture détaillée non effectuée : la signification exacte de t_n et g_n, les énoncés précis du théorème 1 et les résultats numériques restent à confirmer.

7. [6] - Comptages modulaires, algèbre min-plus et zéros de zêta

D'après le plan du document :

- *classification des premiers modulo 6* ("3, seul premier de classe 3 mod 6, forme une classe à part"), avec listings détaillés pour $6 \leq n \leq 100$ et *comptages par type pour* $6 \leq n \leq 1000$;
- *caractérisations élémentaires* : $x \geq 2$ premier ssi x/y non entier pour tout $2 \leq y \leq x-1$ (test restreint à $y \leq \sqrt{x}$) ; $a(k)$ = nombre de diviseurs de k strictement compris entre 1 et k ($a(k) = 0$ ssi k premier) ;
- *convolution en min-plus* : $(a \oplus a)(N) = \min_{2 \leq p \leq N-2} \big(a(p) + a(N-p)\big)$ - l'analogue min-plus (tropical) de la convolution $G(N)$ du fichier 4 : Goldbach(N) ssi cette trace vaut 0 ; *matrice*

de Goldbach sur les résidus mod N, dont la trace "vaut $N \cdot g(N)$", recensant l'observable qualifiée de "série singulière" (écho de la constante singulière de Hardy-Littlewood) ;

- *valeurs propres min-plus* : poids moyen minimal d'un cycle, en $O(m^3)$ - transposition tropicale de l'approche spectrale (cycles circulaires $\to$ valeurs propres) du fichier 4 ;
- ***`zeta_minimal.py`*** : un programme "ultra-simplifié" en pur Python (sans numpy ni scipy, juste le module `math`) calculant *les parties imaginaires des premiers zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann "par la construction CCM"* - un prolongement computationnel audacieux reliant la répartition des premiers à celle des zéros de ζ.

Lecture détaillée non effectuée : la définition exacte de la "construction CCM", les tableaux de comparaison des zéros obtenus avec les valeurs connues (Odlyzko) et les conclusions numériques restent à confirmer.

8. Fils conducteurs du corpus

1. *une même conjecture, cinq langages.* Goldbach est successivement : une famille de géodésiques fermées (géométrie de Zoll), un ensemble de nombres qui passent à travers tous les filtres d'un crible planaire (méthode Cristal), l'existence d'une lettre a dans chaque colonne d'un treillis (algèbre des semi-groupes), la positivité d'une autocorrélation $a * a$ (analyse et spectre), et un objet tropical/min-plus et computationnel (fichiers 5 et 6).
2. *un bilan critique systématique.* Chaque note identifie l'obstacle propre à son approche : non-convexité et explosion du module $e^{\sqrt{n}}$ (Cristal) ; l'algèbre ne crée pas de corrélations (treillis) ; le rapport $r(N) \,/\, \left(N/\ln^2 N\right)$ oscille - la corrélation "k premier / $N-k$ premier" résiste au modèle d'indépendance ; les phases des Λ_k ne se contrôlent pas par Fourier seul. L'obstruction de parité de Selberg et le niveau de distribution des cribles sont nommés comme bornes structurelles communes.
3. *une méthode de travail originale.* Ces documents illustrent un dialogue homme-ia (claude, gemini, deepseek, mistral) où l'humain pilote, propose les constructions et impose l'honnêteté critique, et où les ia servent à formaliser, démontrer ou *réfuter* - plusieurs notes consistent précisément à prouver qu'une idée séduisante ne fonctionne pas.
4. *ce qui reste vrai.* Toutes les constructions confirment massivement la conjecture empiriquement (cribles jusqu'à 10^9, vérifications numériques à 10^{-10}, estimations asymptotiques aux bons ordres de grandeur), mais aucune n'en constitue une preuve - ce que chaque document déclare explicitement.

9. Note de lecture

Les fichiers 1 à 4 ont été lus en détail (premières pages, cœur mathématique) ; les fichiers 5 et 6 sont résumés d'après leur plan et leurs commentaires. Une lecture complémentaire permettrait de préciser leurs résultats (récurrences t_n/g_n, construction CCM des zéros de zêta, comptages modulaires).