**Arbres des restes, arbre de chip-firing et valuations $p$-adiques : une synthèse unifiée, avec application à la conjecture de Goldbach, Couplage des chemins et borne de crible de Brun, Denise Vella-Chemla pilotant claude**

## 1. Résumé


On rassemble ici trois explorations menées séparément par l'auteure :

(i) l'arbre des restes à arité variable, construit pour l'étude de la conjecture de Goldbach ;

(ii) l'arbre de chip-firing $x$-naire, dont l'étiquetage des feuilles avait été constaté numériquement égal à la valuation $x$-adique du rang de la feuille ;

(iii) la formule exacte de $\pi(m)$ obtenue par sommation de valuations $k$-adiques.

On montre que ces trois objets sont trois lectures d'une seule et même construction combinatoire, on donne une démonstration complète de deux faits qui n'étaient jusqu'ici que constatés numériquement (le lien chip-firing / valuation, l'exactitude de la formule de $\pi(m)$), et on en tire une reformulation précise - et un durcissement - de l'obstruction locale/globale déjà identifiée pour Goldbach. On formalise ensuite le couplage des chemins de $p$ et $q = n - p$ dans l'arbre des restes (gnomon de zéros), on en déduit la série singulière de Hardy-Littlewood comme densité locale exacte, et on établit - en le citant pour son optimisation technique finale, mais en démontrant la partie élémentaire de l'argument - ce que le crible donne malgré tout : la borne supérieure de Brun sur le nombre de décomposants de Goldbach, du bon ordre de grandeur conjectural, mais insuffisante à elle seule pour prouver la conjecture, à cause du phénomène de parité de Selberg.


## 2. Introduction : trois pièces d'un même puzzle

Trois textes récents proposent, sous des habillages différents, la même idée de fond : coder un entier $n$ par son comportement vis-à-vis de la division par les petits entiers $2, 3, 4, \ldots$, et lire la primalité de $n$ sur ce codage.

- Le document `https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-restes-gemini-dvc.pdf` construit un arbre où le niveau $k$ se subdivise en $k$ branches, indexées par les restes modulo $k$, et démontre un théorème d'invariance des feuilles par translation d'un multiple du $\mathrm{ppcm}(2, \ldots, m)$.
- Le document `https://denisevellachemla.eu/arbre-chip.pdf` construit, lui, un arbre homogène $x$-naire sur lequel on fait circuler des jetons ("chip-firing"), et constate que l'étiquette de la $n$-ième feuille est la valuation $x$-adique de $n$.
- Les documents `https://denisevellachemla.eu/padic-retour.pdf` e et `https://denisevellachemla.eu/reprise-valpadic.pdf` proposent une formule de $\pi(m)$ obtenue en sommant des valuations $k$-adiques de $m$ pour $k$ variant dans un intervalle, et constatent par programme qu'elle compte bien les nombres premiers.

Le but de cette note est de montrer que ces trois constructions sont les trois visages d'un seul objet - que nous appellerons l'arbre des restes généralisé - et de remplacer les trois constats numériques ci-dessus par des démonstrations. On en déduit ensuite, pour Goldbach, un énoncé précis de l'obstacle déjà pressenti, puis on pousse la construction en formalisant le couplage des chemins de $p$ et de $n - p$, ce qui permet d'obtenir, malgré l'obstruction de parité, une borne de crible explicite du bon ordre de grandeur.

## 3. L'arbre des restes à arité variable (rappel et reformulation)

**Définition 1** (Arbre des restes)**.** *Soit $\mathcal{A}$ l'arbre enraciné infini dont le niveau $k \geq 2$ subdivise chaque nœud du niveau $k-1$ en exactement $k$ branches indexées par $R_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Tout $n \in \mathbb{N}$ définit un unique chemin dans $\mathcal{A}$, caractérisé au niveau $m$ par le mot de restes*

$$W_m(n) = \Big(r_2(n), r_3(n), \dots, r_m(n)\Big), \qquad n \equiv r_k(n) \pmod{k}.$$

**Théorème 2** (Densité et fibres)**.** *Le nombre de feuilles effectivement atteintes au niveau $m$ vaut*

$$L_m := \mathrm{ppcm}(2, 3, \dots, m),$$

*et l'ensemble des entiers partageant un même mot de restes $W_m$ est une progression arithmétique (une fibre) de raison $L_m$ :*

$$\mathcal{F}(W_m) = \{n_0 + jL_m : j \in \mathbb{N}\}, \qquad n_0 < L_m.$$

**Théorème 3** (Invariance par translation)**.** *Soit $n$ pair, $p$ un décomposant de Goldbach de $n$ (i.e. $p$ et $q = n - p$ premiers), et $m \geq 2$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $n' = n + jL_m$ et $q' = n' - p$, alors $W_m(q') = W_m(q)$.*

*Démonstration.* Pour tout $k \leq m$, $L_m \equiv 0 \pmod{k}$ (par définition du ppcm), donc $q' = q + jL_m \equiv q \pmod{k}$, c'est-à-dire $r_k(q') = r_k(q)$ pour tout $k \leq m$. □

**Remarque** : ce théorème garantit une invariance à profondeur fixe $m$, alors que tester la primalité de $q'$ exige un contrôle jusqu'à la profondeur $\lfloor \sqrt{q'} \rfloor$, qui croît avec $j$. C'est exactement l'écart entre le local (fixé) et le global (croissant) que l'on chiffrera précisément à la Proposition 4.

## 4. L'arbre homogène de chip-firing et la valuation $x$-adique

### 4.1. Construction

On considère à présent, non plus l'arbre à arité variable $2, 3, 4, \dots$, mais l'arbre homogène $x$-naire complet, muni d'un unique jeton à la racine. La règle de transfert ("chip-firing") est : un nœud interne ne peut céder ses jetons qu'à son dernier fils (le fils le plus à droite d'une fratrie), un jeton à la fois, tant que c'est possible. Au niveau $k$, on obtient ainsi $x^k$ feuilles, que l'on numérote $n = 1, \dots, x^k$ dans l'ordre de gauche à droite ; on note $\ell_x(n)$ l'étiquette (le nombre de jetons reçus) de la $n$-ième feuille.

Le document *Arbres* (2018) constate sur les cas $x = 2$ (16 feuilles) et $x = 3$ (18 feuilles) que $\ell_x(n)$ coïncide avec $v_x(n)$, la valuation $x$-adique de $n$ (le plus grand $e$ tel que $x^e \mid n$). On en donne ici une démonstration complète.

### 4.2. Une récurrence syntaxique

Notons $L_k^{(x)} = \big(\ell_x(1), \dots, \ell_x(x^k)\big)$ la suite des étiquettes au niveau $k$. La construction par chip-firing engendre exactement la récurrence syntaxique

$$L_0^{(x)} = (0), \qquad L_k^{(x)} = \underbrace{L_{k-1}^{(x)} \frown \cdots \frown L_{k-1}^{(x)}}_{x-1 \text{ copies}} \frown \Big(L_{k-1}^{(x)} + 1\Big),$$

où $\frown$ désigne la concaténation et où seule la toute dernière copie est incrémentée sur sa dernière composante.

**Théorème 4** (Chip-firing et valuation)**.** *Pour $x \geq 2$ premier et tout $k \geq 1$, la suite $L_k^{(x)}$ engendrée par la récurrence syntaxique ci-dessus coïncide avec $\big(v_x(1), \dots, v_x(x^k)\big)$. Autrement dit, l'étiquette de chip-firing de la $n$-ième feuille de l'arbre $x$-naire au niveau $k$ est exactement la valuation $x$-adique de $n$, pour tout $1 \leq n \leq x^k$.*

*Démonstration.* Par récurrence sur $k$. Le cas $k = 1$ est immédiat : pour $n = 1, \dots, x-1$, $v_x(n) = 0$, et $v_x(x) = 1$, ce qui est bien $L_1^{(x)} = (0, \dots, 0, 1)$.
Supposons le résultat vrai au rang $k-1$ et découpons $\{1, \dots, x^k\}$ en $x$ blocs de taille $x^{k-1}$ : le $i$-ième bloc ($i = 0, \dots, x-1$) est $\{i\, x^{k-1} + m : 1 \leq m \leq x^{k-1}\}$ (avec la convention $0 \cdot x^{k-1} + m = m$ pour $i = 0$).
*Cas $m < x^{k-1}$.* Écrivons $v_x(m) = j$ avec $j \leq k-2$ (car $m < x^{k-1}$), donc $m = x^j m'$ avec $x \nmid m'$. Alors $n = i\, x^{k-1} + m = x^j \Big(i\, x^{k-1-j} + m'\Big)$. Comme $j \leq k-2$, on a $k-1-j \geq 1$, donc $x \mid i\, x^{k-1-j}$ ; comme $x \nmid m'$ (et $x$ est premier), $x \nmid \Big(i\, x^{k-1-j} + m'\Big)$. Donc $v_x(n) = j = v_x(m)$ : la valuation ne dépend pas du bloc $i$, ce qui correspond exactement à la copie non incrémentée de $L_{k-1}^{(x)}$ dans chacun des $x-1$ premiers blocs, et sur les $x^{k-1} - 1$ premières composantes du dernier bloc.
*Cas $m = x^{k-1}$ (dernière composante d'un bloc).* Par hypothèse de récurrence, $v_x(x^{k-1}) = k-1$ est la dernière composante de $L_{k-1}^{(x)}$. Pour $i < x-1$, $n = i\, x^{k-1} + x^{k-1} = (i+1)x^{k-1}$, avec $i+1 \leq x-1 < x$, donc $v_x(n) = k-1$ (inchangé, copie simple). Pour $i = x-1$ (dernier bloc), $n = (x-1)x^{k-1} + x^{k-1} = x^k$, et $v_x(x^k) = k = (k-1)+1$ : la dernière composante est bien incrémentée d'une unité, uniquement dans la dernière copie. Ceci est exactement la règle “seul le dernier fils reçoit les jetons restants” du chip-firing. $\square$

**Remarque** : la démonstration montre que le rôle combinatoire de la règle “on ne cède les jetons qu'au dernier fils” est de coder la retenue de l'écriture en base $x$ : seule la position $x^k$, qui correspond à un débordement complet de tous les niveaux, voit sa valuation augmenter, exactement comme dans une addition avec retenue en base $x$. Pour $x$ non premier, un raisonnement analogue s'applique en utilisant la multiplicativité $v_x(ab) = v_x(a) + v_x(b)$, à condition de définir $v_x$ comme la plus grande puissance de $x$ (et non d'un facteur premier de $x$) qui divise $n$ ; on ne détaille pas ce cas ici.

## 5. Un critère exact de primalité par sommes de valuations

### 5.1. Les deux formulations de l'auteure

Le document d'août 2023 propose

$$\pi(x) = \sum_{2\le y\le x} \frac{1}{1-f(y)^{15}}, \qquad f(y) = \sum_{2\le k\le \lfloor y/2\rfloor} v_k(y),$$

et le document de la Toussaint 2020 raffine ce calcul en restreignant la sommation à $k \le \lfloor\sqrt{y}\rfloor$ et en remplaçant l'astuce de la puissance 15 par un simple $\lfloor 1/f(y)\rfloor$ (avec la convention $v(y,1) := 1$ pour amorcer la somme). Les deux versions sont constatées numériquement exactes sur $y \le 100$ ou $y \le 1000$ ; on en donne ici la preuve générale.

### 5.2. Le critère exact

**Définition 5.** *Pour $m \ge 2$, on pose, avec la convention $v(m,1) := 1$,*

$$S(m) = 1 + \sum_{k=2}^{\lfloor\sqrt{m}\rfloor} v(m,k),$$

*où $v(m,k)$ est la valuation $k$-adique de $m$ (le plus grand $e \ge 0$ tel que $k^e \mid m$), $k$ non nécessairement premier.*

**Théorème 6.** *Pour tout entier $m \ge 2$ :*

$$S(m) = 1 \iff m \text{ est premier}, \qquad S(m) \ge 2 \iff m \text{ est composé.}$$

*Par conséquent $\lfloor 1/S(m)\rfloor = \mathbf{1}_{\{m \text{ premier}\}}$ exactement, et*

$$\pi(x) = \sum_{m=2}^{x} \left\lfloor \frac{1}{S(m)} \right\rfloor$$

*est une identité exacte, sans terme d'erreur, pour tout $x \ge 2$.*

*Démonstration.* Si $m$ est premier, tout $k$ avec $2 \le k \le \lfloor\sqrt{m}\rfloor$ vérifie $2 \le k < m$, donc $k \nmid m$ (un nombre premier n'a pas de diviseur strictement compris entre 1 et lui-même), d'où $v(m,k) = 0$ pour tout tel $k$, et $S(m) = 1$.

Réciproquement, si $m \ge 4$ est composé, $m$ possède un plus petit facteur premier $p$, et le fait classique $p \le \sqrt{m}$ tient (sinon $m = pq$ avec $p, q > \sqrt{m}$ donnerait $m = pq > m$, absurde). Alors $p$ est un entier de l'intervalle $[2, \lfloor\sqrt{m}\rfloor]$ et $v(m,p) \ge 1$, donc $S(m) \ge 1 + 1 = 2$.

Comme $S(m)$ est un entier $\ge 1$, $\lfloor 1/S(m)\rfloor$ vaut 1 si $S(m) = 1$ et 0 si $S(m) \ge 2$ : c'est exactement l'indicatrice de primalité, et la somme télescope en $\pi(x)$. □

**Corollaire 7.** *La formule de 2020 (bornée à $\sqrt{y}$, avec $\lfloor 1/f(y)\rfloor$) est exacte. La formule de 2023 (bornée à $y/2$, avec l'astuce $1/(1-f^{15})$) est seulement une approximation numérique de la même quantité : elle repose sur le fait que $1/(1-f^{15})$ est proche de 0 dès que $f \ge 1$, mais n'est jamais* *rigoureusement nul, et la borne $y/2$, bien que suffisante (puisque $\sqrt{y} \leq y/2$ pour $y \geq 4$), fait pour rien $\Theta(y)$ divisions au lieu de $\Theta(\sqrt{y})$. Le raffinement de 2020 constitue donc une amélioration réelle : on est passé d'un test heuristique et coûteux à un test exact et optimal en profondeur de crible.*

### 6. Unification : l'arbre des restes comme géométrie du crible

**Proposition 8** (Critère de primalité arborescent)**.** *Soit $m \geq 2$ et $\mathcal{A}$ l'arbre des restes. Alors*

$$m \text{ est premier} \iff \forall k \in \{2, \dots, \lfloor\sqrt{m}\rfloor\},\ r_k(m) \neq 0,$$

*c'est-à-dire ssi le mot de restes $W_{\lfloor\sqrt{m}\rfloor}(m)$ ne comporte aucune composante nulle.*

*Démonstration.* $r_k(m) = 0 \iff k \mid m \iff v(m,k) \geq 1$. La proposition découle donc immédiatement du Théorème , puisque $S(m) = 1$ (primalité) équivaut à $v(m,k) = 0$ pour tout $k \leq \lfloor\sqrt{m}\rfloor$, c'est-à-dire à l'absence de composante nulle dans $W_{\lfloor\sqrt{m}\rfloor}(m)$. □

On obtient ainsi une lecture géométrique complète du crible d'Ératosthène-Legendre : dans l'arbre à arité variable, un nœud de niveau $k$ portant le résidu 0 est un nœud "obstrué" (il révèle un diviseur). La Proposition 3 dit que $m$ est premier ssi son chemin dans l'arbre évite tout nœud obstrué jusqu'au niveau $\lfloor\sqrt{m}\rfloor$.
L'arbre homogène de chip-firing (Section 4) est alors le raffinement quantitatif, à une seule base $x$ fixée, de cette information binaire : là où l'arbre des restes ne dit que $r_x(m) = 0$ ou non (obstrué / non obstrué), le chip-firing fournit l'exposant exact $v_x(m)$, c'est-à-dire la profondeur de l'obstruction. Les deux constructions décrites indépendamment par l'auteure en 2018 et en 2026 sont donc les cas particuliers, l'un homogène (arité $x$ fixe, information fine : la valuation), l'autre hétérogène (arité $k = 2, \dots, m$ variable, information grossière : le résidu nul ou non), d'un seul et même arbre de crible.

### 7. Application à Goldbach : ce que gagne - et ce que ne gagne pas - la formalisation

#### 7.1. Reformulation quantitative de la transmission des décomposants

Soit $n$ pair, $p$ un décomposant de Goldbach de $n$, $q = n-p$. La Proposition 3 dit que la primalité de $q$ se lit sur $W_{\lfloor\sqrt{q}\rfloor}(q)$. Le Théorème dit que, pour $n' = n + jL_m$, $q' = n' - p$ vérifie $W_m(q') = W_m(q)$.

**Proposition 9** (Version quantitative de l'obstruction locale/globale)**.** *Fixons $m \geq 2$ et $j \in \mathbb{N}$, $n' = n + jL_m$, $q' = n' - p$. Alors :*

1. *Si $m \geq \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, le Théorème et la Proposition 3 déterminent complètement la primalité de $q'$ à partir de celle de $q$ (aucune obstruction nouvelle ne peut apparaître au-delà du niveau $m$ puisqu'il n'y a rien à tester au-delà de $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor \leq m$).*
2. *Si $m < \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$ - ce qui se produit nécessairement pour $j$ assez grand, puisque $q' \sim jL_m \to \infty$ alors que $m$ est fixé - le Théorème ne contrôle plus que les $m-1$ premières composantes de $W_{\lfloor\sqrt{q'}\rfloor}(q')$ : il reste $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$ composantes $r_{m+1}(q'), \dots, r_{\lfloor\sqrt{q'}\rfloor}(q')$ dont la nullité ou non n'est pas déterminée par l'invariance de translation, et dont dépend pourtant, seule, la primalité de $q'$.*

*Démonstration.* (i) est immédiat : si $m \geq \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, toutes les composantes nécessaires au critère de la Proposition 3 sont déjà fixées par $W_m(q') = W_m(q)$. (ii) : comme $L_m \geq 2$ est fixé une fois $m$ choisi, $q' = q + jL_m \to \infty$ quand $j \to \infty$, donc $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor \to \infty$ tandis que $m$ reste constant : il existe donc $j$ à partir duquel $m < \lfloor\sqrt{q'}\rfloor$, et les composantes de rang $> m$ du mot de restes échappent au contrôle du Théorème . □

Ceci rend précis, de façon calculable, le constat plus qualitatif du document de juillet 2026 ("rien ne garantit combinatoirement que ce candidat ne soit pas strictement supérieur à $n$") : l'invariance par translation ne porte que sur une fenêtre de profondeur fixe $m$ (déterminée par le ppcm choisi), alors que le test de primalité exact (Proposition 3) exige une profondeur $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor$ qui croît sans borne. La formalisation par valuations ne comble donc pas l'écart : elle en donne la mesure exacte, à savoir le déficit $\lfloor\sqrt{q'}\rfloor - m$ de niveaux non contrôlés.

## 8. Lien avec les matrices de chip-firing de [1]

Le document *Conjecture de Goldbach et chip-firing games* [1] encode la même idée sous une autre forme : une matrice $2 \times 2$ $\big(f_{aa}, f_{ab}; f_{ba}, f_{bb}\big)(n)$ dénombre les couples $(p, q = n - p)$ selon les quatre patrons de primalité/composition de $p$, $q$ et d'un décalé $n + 2 - p$, et Goldbach revient à montrer $f_{aa}(n) + f_{ab}(n) > 0$ pour tout $n$ pair. Le "gnomon de zéros" interdit dans la version $4 \times 4$ (une configuration où toutes les cases d'un coin sont nulles) est l'exacte transcription matricielle du fait "tous les décomposants candidats sont obstrués" de la Proposition 3, appliqué simultanément à $p$ et à $n - p$ le long de leurs deux chemins respectifs dans l'arbre des restes. C'est donc, sous une présentation différente (comptage matriciel plutôt qu'arborescent), le même phénomène et le même obstacle. La section suivante formalise ce couplage directement dans l'arbre des restes.

## 9. Une mise en garde : ne pas confondre avec l'obstruction de parité de Selberg

Le critère de la Proposition 3 est un crible exact, non tronqué (c'est une reformulation du crible d'Ératosthène-Legendre, pas une approximation analytique) : il n'est donc pas directement soumis au phénomène de parité de Selberg, qui frappe spécifiquement les sommes de crible tronquées (de type Brun/Selberg) et se traduit par une insensibilité structurelle de ces sommes au nombre de facteurs premiers modulo 2. Ici, l'obstacle mis en évidence par la Proposition 4 est d'une autre nature : c'est un problème de profondeur de contrôle (local, fixe) contre taille effective (globale, croissante), et non un problème de signe ou de parité au sens de Selberg - il ne faut donc pas présenter cette construction comme contournant l'obstruction de parité. On va voir en revanche, aux Sections  et , que dès qu'on tronque le crible pour le rendre calculable (ce qui est inévitable dès qu'on veut compter, et non plus seulement décider), on retombe exactement sur le crible de Goldbach classique et sur l'obstruction de parité en son sens propre.

## 10. Couplage des chemins de $p$ et de $q$ dans l'arbre des restes

### 10.1. Le lemme de couplage

**Lemme 10** (Couplage)**.** *Soit $n$ pair, $p \in \{2, \ldots, n-2\}$, $q = n - p$. Pour tout $k \geq 2$ :*

$$r_k(p) + r_k(q) \equiv r_k(n) \pmod{k}.$$

*Démonstration.* Immédiat : $p + q = n$, et la réduction mod $k$ est un morphisme additif. $\square$

Ce lemme dit que le chemin de $q$ dans $\mathcal{A}$ n'est pas indépendant de celui de $p$ : à chaque niveau $k$, connaître $r_k(p)$ et $r_k(n)$ détermine $r_k(q)$. Le couplage consiste donc à regarder, à chaque niveau, le couple $(r_k(p), r_k(q))$, contraint à vivre sur une droite du carré $R_k \times R_k$.

### 10.2. L'ensemble d'obstruction couplé

**Définition 11.** *Pour $k \geq 2$, on pose*

$$O_k(n) := \{0,\ r_k(n) \bmod k\} \subset R_k.$$

*On dit que $p$ est $k$-sûr (pour $n$) si $r_k(p) \notin O_k(n)$, c'est-à-dire si $k \nmid p$ **et** $k \nmid q$.*

On a $|O_k(n)| = 1$ si $k \mid n$ (les deux valeurs coïncident), $|O_k(n)| = 2$ sinon. C'est la traduction arborescente du couple de conditions "$p$ premier et $q$ premier" au niveau $k$ : un nœud obstrué révèle soit un diviseur de $p$, soit un diviseur de $q$.

### 10.3. Le gnomon de zéros, précisément

Fixons $k$, et représentons le couple $(r_k(p), r_k(q))$ comme un point de la grille $R_k \times R_k$ ($k \times k$ cases). Le Lemme  dit que ce point est contraint à la droite diagonale

$$\Delta_k(n) := \{(a, b) \in R_k \times R_k : a + b \equiv r_k(n)\}, \qquad |\Delta_k(n)| = k.$$

Le *gnomon* de la grille $R_k \times R_k$ - au sens géométrique classique, l'équerre formée de la ligne $a = 0$ et de la colonne $b = 0$ - est exactement l'ensemble des points où $p$ ou $q$ est révélé multiple de $k$. Son intersection avec $\Delta_k(n)$ vaut

$$\Delta_k(n) \cap \text{gnomon} = \{(0, r_k(n)),\ (r_k(n), 0)\},$$

un ensemble à 1 ou 2 points selon que $k \mid n$ ou non - c'est-à-dire exactement $O_k(n)$, relu comme trace du gnomon sur la diagonale contrainte.

**Proposition 12** (Gnomon de zéros arborescent)**.** *$p$ et $q = n - p$ sont tous deux premiers si et seulement si, pour tout $k$ avec $2 \leq k \leq \min(\lfloor\sqrt{p}\rfloor, \lfloor\sqrt{q}\rfloor)$, le point $(r_k(p), r_k(q)) \in \Delta_k(n)$ évite le gnomon de $R_k \times R_k$.*

*Démonstration.* Application directe de la Proposition 3 à $p$ et à $q$ séparément, puis traduction via le Lemme . $\square$

**Remarque** : comme pour la Proposition 3, cette caractérisation exige $k < p$ et $k < q$ strictement pour éviter l'auto-obstruction triviale. C'est automatique tant qu'on teste $k$ jusqu'à $\min(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ seulement - mais si l'on veut une profondeur uniforme $M$ commune à $p$ et $q$ (Section ), il faut restreindre l'énoncé aux candidats non-frontière $M < p < n - M$, laissant de côté $O(\sqrt{n})$ petits candidats vérifiables directement. Ce n'est pas gênant pour la suite, mais ce n'est pas un détail qu'on a le droit de balayer silencieusement.
C'est la reformulation exacte, dans l'arbre des restes, du fait matriciel de [1] : un "coin tout à zéro" (gnomon plein) au niveau $k$ signifie précisément qu'aucun résidu ne peut échapper simultanément

à l'obstruction de $p$ et à celle de $q$ à ce niveau.

### 11. Comptage : la densité couplée retombe sur la série singulière

Fixons une profondeur uniforme $M$, et ne regardons que les nombres premiers $\ell \leq M$ (les $k$ composés n'apportent aucune obstruction nouvelle : si $k = \ell_1\ell_2 \mid p$ alors déjà $\ell_1 \mid p$ est détecté au niveau $\ell_1$). Par le Théorème  (TRC), les classes résiduelles mod $\prod_{\ell \leq M} \ell$ "doublement sûres" à tous les niveaux $\ell \leq M$ ont pour densité

$$\delta_M(n) = \frac{1}{2} \prod_{\substack{\ell \text{ premier} \\ 2<\ell\leq M,\ \ell \mid n}} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) \prod_{\substack{\ell \text{ premier} \\ 2<\ell\leq M,\ \ell \nmid n}} \left(1 - \frac{2}{\ell}\right).$$

**Proposition 13.** *$\delta_M(n)$ est exactement la densité tronquée à $M$ de la série singulière de Hardy-Littlewood pour Goldbach.*

*Démonstration.* Immédiate à partir de la Définition 5 et du produit CRT sur les $O_\ell(n)$ : facteur $(\ell-1)/\ell$ si $\ell \mid n$ (une seule classe interdite), $(\ell-2)/\ell$ sinon (deux classes interdites, distinctes puisque $\ell \nmid n$), et facteur $1/2$ pour $\ell = 2$ car $n$ pair force $p$ impair. □

On note $\mathfrak{S}(n) := \lim_{M\to\infty} 2\,\delta_M(n) \Big/ \prod_{2<\ell\leq M} \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{-2}$, la constante de Hardy-Littlewood usuelle pour Goldbach (le facteur de normalisation ci-dessus est le facteur de convergence standard ; on ne le détaille pas, ce fait étant classique et non l'objet de cette note).

### 12. Ce que le couplage ne peut pas faire, et pourquoi précisément

**Le fait acquis** : pour tout $M$ fixé, $\delta_M(n) > 0$, et $\delta_M(n) \to \mathfrak{S}(n) > 0$ (à normalisation près) quand $M \to \infty$ - ceci est élémentaire, purement combinatoire, et se déduit entièrement de la Proposition 7. Aucune obstruction à ce niveau.

**Ce qui manque** : passer de "une proportion positive de *classes résiduelles* échappe au gnomon jusqu'au niveau $M$" à "un *entier concret $p$* dans l'intervalle $(M, n-M)$ échappe au gnomon jusqu'au niveau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$" (la profondeur où la Proposition 6 devient un vrai test de primalité). C'est très exactement la Proposition 4, appliquée maintenant au couple $(p, q)$ plutôt qu'à $q$ seul : le déficit $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - M$ de niveaux non contrôlés.
Mais le fait d'avoir formalisé le couplage plutôt que de traiter $q$ isolément révèle plus : la construction des Sections -8 est, à la notation près, exactement le crible combinatoire (Ératosthène-Legendre) appliqué simultanément à deux suites linéaires liées, $p$ et $n-p$. C'est précisément la configuration où le phénomène de parité de Selberg s'applique : un crible élémentaire, fondé sur des congruences locales et le TRC, ne peut détecter que le *nombre* de facteurs premiers, pas sa *parité*. C'est un théorème (Selberg), pas une conjecture : aucun raffinement purement combinatoire de la construction ci-dessus (gnomon, couplage, TRC plus fin) ne peut le contourner de l'intérieur.

### 13. Ce que le crible donne malgré tout : la borne de Brun

#### 13.1. Pourquoi l'inclusion-exclusion naïve explose

On tente d'étendre directement la Proposition 6 en formule de comptage exact, à la manière de la formule $S(m)$ de la Section 5. Fixons $n$ pair et un seuil $z$, et posons $P(z) = \prod_{2<\ell\le z,\ \ell \text{ premier}} \ell$. Pour $d \mid P(z)$, notons $\omega(d)$ le nombre de classes résiduelles interdites modulo $d$ par le gnomon couplé (Déf. 5) : $\omega$ est multiplicative, $\omega(\ell) = 1$ si $\ell \mid n$, $\omega(\ell) = 2$ sinon.

**Lemme 14** (Formule de Legendre couplée)**.** *Le nombre $D(n,z)$ d'entiers $m \in \{1,\dots,n-1\}$ tels que ni $m$ ni $n-m$ ne soit divisible par un premier $\le z$ (autre que 2) vaut*

$$D(n,z) = \sum_{d\mid P(z)} \mu(d)\,\omega(d)\,\frac{n}{d} \;+\; O\Big(\sum_{d\mid P(z)} \omega(d)\Big).$$

*Démonstration.* Inclusion-exclusion standard sur les événements $\{\ell \mid m\} \cup \{\ell \mid n-m\}$, dont le cardinal dans $\{1,\dots,n-1\}$ est $\omega(\ell)\cdot n/\ell + O(1)$ par classe résiduelle ; la multiplicativité de $\omega$ vient du TRC exactement comme en Proposition 7. □

Le terme principal est, par le théorème de Mertens, $n\prod_{\ell\le z}(1-\omega(\ell)/\ell) \asymp \mathfrak{S}(n)\,n/(\log z)^2$ : on retrouve la constante $\mathfrak{S}(n)$ de la Proposition 7. Mais le terme d'erreur vaut $\prod_{\ell\le z}(1+\omega(\ell)) \approx 3^{\pi(z)}$, qui **dépasse** le terme principal dès que $z$ n'est plus minuscule (dès que $z \gg \log n$ environ). Or il faut aller jusqu'à $z \sim \sqrt{n}$ pour que $D(n,z)$ compte exactement les décompositions de Goldbach (Prop. 6). C'est exactement l'obstacle de profondeur de la Proposition 4, relu ici comme explosion du terme d'erreur plutôt que comme déficit combinatoire abstrait : le même mur, sous un autre habillage.

### 13.2. La troncature de Brun

L'idée de Brun (1920) est de ne pas sommer sur tous les diviseurs de $P(z)$, mais seulement sur ceux ayant un nombre borné de facteurs premiers, en exploitant un fait élémentaire d'encadrement.

**Lemme 15** (Bonferroni)**.** *Pour toute famille finie d'événements et pour tout entier pair $r$, la somme d'inclusion-exclusion tronquée aux termes $d$ avec $\Omega(d) \le r$ majore le cardinal exact ; tronquée à $\Omega(d) \le r+1$ ($r+1$ impair), elle le minore.*

*Démonstration.* Récurrence standard sur le nombre d'événements, en regroupant les termes deux par deux et en utilisant $\binom{k}{2s} \ge \binom{k}{2s+1}$ pour l'alternance de signe restante à chaque étape. □

En choisissant $r$ pair et en optimisant conjointement $z$ et $r$ (c'est le point technique délicat de Brun, cité ici plutôt que redémontré : l'optimisation précise demande un contrôle fin, par récurrence sur la "dimension" du crible, qui dépasse le cadre élémentaire des sections précédentes et relève de l'analyse combinatoire de Brun et de Halberstam-Richert), on obtient :

**Théorème 16** (Brun, 1920)**.** *Il existe une constante absolue $C > 0$ telle que, pour tout $n$ pair, $n \ge 4$,*

$$D(n) := \#\{p \text{ premier} : p,\ n-p \text{ premiers}\} \;\le\; C\,\mathfrak{S}(n)\,\frac{n}{(\log n)^2}.$$

**Corollaire 17.** *La borne du Théorème  est du bon ordre de grandeur (c'est celui conjecturé, à la constante près, par Hardy-Littlewood) : le crible élémentaire, correctement tronqué, retrouve le comportement asymptotique attendu de $D(n)$ par le haut. Ce que le crible ne peut pas produire, pour la raison structurelle indiquée à la Section  précédente (parité de Selberg), c'est la minoration* *correspondante $D(n) \gg \mathfrak{S}(n)\, n/(\log n)^2$ - qui donnerait Goldbach pour $n$ assez grand. Aucune méthode de crible combinatoire pur (Legendre, Brun, ou Selberg) ne peut fournir cette minoration à elle seule : c'est le contenu précis du théorème de parité.*

**Remarque** : concrètement, cette limite structurelle est ce qui explique que le meilleur résultat inconditionnel connu (Chen, 1973), obtenu par un crible du même type mais raffiné) ne soit pas Goldbach lui-même, mais l'énoncé affaibli : tout $n$ pair assez grand s'écrit $n = p+m$ avec $p$ premier et $m$ ayant au plus deux facteurs premiers.

### 14. Conclusion et bilan honnête

On a montré que l'arbre des restes à arité variable (2026), l'arbre de chip-firing $x$-naire (2018) et la formule de $\pi(m)$ par sommes de valuations (2020/2023) sont trois incarnations d'une seule structure de crible arborescent, et on a remplacé par des démonstrations complètes les trois faits qui n'étaient jusqu'ici que numériquement constatés (Théorèmes  et , Proposition 3). Appliquée à Goldbach, cette unification transforme le constat qualitatif initial en un énoncé quantitatif (Proposition 4) : le déficit de contrôle croît exactement comme $\lfloor \sqrt{q'} \rfloor - m$.

On a ensuite formalisé le couplage des chemins de $p$ et $q = n - p$ (Lemme , Proposition 6), ce qui unifie l'arbre des restes avec le langage matriciel de [1] et fait apparaître explicitement la série singulière de Hardy-Littlewood comme densité locale exacte du gnomon (Proposition 7). Poussant la construction jusqu'à son terme calculable, on obtient la borne de crible de Brun (Théorème ) : le bon ordre de grandeur, mais seulement une majoration, et pour une raison structurelle précise et documentée (l'obstruction de parité de Selberg, Corollaire ) qui empêche tout raffinement purement combinatoire de cette construction - si sophistiqué soit-il - de fournir seul la minoration qui donnerait Goldbach.

Deux pistes semblent raisonnables pour la suite :

1. **Raffiner la constante et la borne d'erreur.** Rendre explicite (plutôt que citée) la constante $C$ du Théorème  et l'optimisation $(z, r)$ de Brun, en repartant de la récurrence syntaxique de la Section 4 pour organiser la troncature - ce qui donnerait une version entièrement autocontenue, dans le style élémentaire de ce document, d'un résultat aujourd'hui présenté de façon purement analytique dans la littérature.

2. **Combiner avec une information non locale.** Puisque l'obstacle est précisément l'absence, dans le crible pur, de toute information sur la parité du nombre de facteurs premiers, toute avancée devra nécessairement injecter une information de nature différente (analytique, au sens des méthodes de Hardy-Littlewood/cercle, ou une identité combinatoire encore non découverte capturant la parité) - ce qui sort du cadre strictement élémentaire visé jusqu'ici, et qu'il convient de nommer clairement comme tel avant de s'y engager.

# Références


[1] Denise Vella-Chemla, *Conjecture de Goldbach et chip-firing games*, 19 août 2018. https://denisevellachemla.eu/chip-firing-gb.pdf .

[2] D. Vella-Chemla pilotant Gemini, *Théorie de l'arbre des restes à arité variable et stabilité des décomposants de Goldbach*, juillet 2026. https://denisevellachemla.eu/formalisation-arbres-restes-gemini-dvc.pdf .

[3] D. Vella-Chemla, *Arbres*, 29 septembre 2018. https://denisevellachemla.eu/arbres.pdf .

[4] D. Vella-Chemla, *Arbre de chip-firing*, 19 août 2018. https://denisevellachemla.eu/arbre-chip.pdf .

[5] D. Vella-Chemla, *Revenir à l'algorithme de calcul du nombre de nombres premiers inférieurs à un nombre donné en utilisant les valuations p-adiques*, août 2023. https://denisevellachemla.eu/padic-retour.pdf .

[6] D. Vella-Chemla, *Valuations p-adiques, suite*, Toussaint 2020. https://denisevellachemla.eu/reprise-valpadic.pdf .