Synthèse de six recueils écrits avec des ia autour de la conjecture de Goldbach : acquis, modèles et obstructions
ia gemini, 7.11.2026

Résumé

Ce document présente une synthèse compacte et rigoureuse en 5 pages des six manuscrits et notes de recherche portant sur la modélisation géométrique, cinématique et algébrique de la conjecture de Goldbach, le théorème de Morley appliqué aux polygones supérieurs, ainsi que les cribles géométriques et les opérateurs affines non commutatifs.

Les six recueils sont aux adresses suivantes :

[1] https://denisevellachemla.eu/mergia1.pdf
[2] https://denisevellachemla.eu/mergia2.pdf
[3] https://denisevellachemla.eu/mergia3.pdf
[4] https://denisevellachemla.eu/mergia4.pdf
[5] https://denisevellachemla.eu/mergia5.pdf
[6] https://denisevellachemla.eu/mergia6.pdf

1. Géodésiques sur le sablier de Tannery et décompositions de Goldbach

La poire de Tannery est une surface de révolution engendrée par la rotation d'une demi-lemniscate de Gérono affinée autour de son axe de symétrie. Sa paramétrisation dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$x(u,v) = (g(u), \sin u \cos v, \sin u \sin v), \quad u \in [0,\pi],\ v \in [0,2\pi], \quad g(u) = 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{u}{2}\right) \tag{1}$$

La métrique induite admet pour première forme fondamentale $ds^2 = E(u)du^2 + \sin^2 u\, dv^2$ avec $E(u) = (2+\cos u)^2$. Le sablier de Tannery s'obtient en accolant deux poires par leur col commun en $u = 0$.

1.1. Relation de Clairaut et propriété de Zoll

Toute géodésique unitaire vérifie la relation de Clairaut : $h(u)\sin\psi(u) = c$, où $h(u) = \sin u$ est le rayon du parallèle, ψ l'angle avec le méridien, et $c \in (0,1)$ l'*inclinaison*. L'équation différentielle du mouvement angulaire s'écrit :

$$\frac{dv}{du} = \frac{c\sqrt{E(u)}}{\sin u\sqrt{\sin^2 u - c^2}} \tag{2}$$

La propriété fondamentale de la poire de Tannery (surface de Zoll) garantit que toutes ses géodésiques non méridiennes sont fermées et possèdent une période angulaire universelle constante $\Phi = 4\pi$ (soit deux tours complets), indépendante de l'inclinaison c.

1.2. Encodage arithmétique et contraintes géométriques

Pour un entier pair n, chaque paire de Goldbach (p, q) avec $p + q = n$ est encodée par une unique géodésique fermée sur le sablier avec l'inclinaison :

$$c(p, n) = \sin\left(\frac{\pi p}{n}\right) = \sin\left(\frac{\pi q}{n}\right) \tag{3}$$

La poire inférieure ($z < 0$) encode p et la poire supérieure ($z > 0$) encode q.

Implicite des variétés : Il est rigoureusement interdit de tracer une géodésique "à la main" traversant le col d'une poire à l'autre avec $c \neq 0$. En effet, la relation de Clairaut impose $h(0) \sin \psi = 0 = c$. Une géodésique passant par le col est nécessairement un méridien ($c = 0$). Pour $c > 0$, l'intégrale diverge à l'approche de $u = 0$, de sorte que les géodésiques oscillent strictement entre deux parallèles de rebroussement $b_0 = \arcsin c$ et $b_1 = \pi - b_0$.

2. Analyse de la borne inférieure de la comète de Goldbach ($n = 2p$)

L'analyse de la borne inférieure de la comète de Goldbach sous échelle log-log ($X = \ln x, Y = \ln y$) révèle une structure linéaire remarquable pour les nombres pairs de la forme $n = 2p$ (p premier).

2.1. Justification théorique via Hardy-Littlewood

D'après la formule asymptotique de Hardy-Littlewood, le nombre de décompositions $G(n)$ vérifie :

$$G(n) \sim 2C_2 \prod_{\substack{q|n \\ q>2}} \frac{q-1}{q-2} \cdot \frac{n}{\ln^2 n} \tag{4}$$

où $C_2 \approx 0{,}66016$ est la constante des nombres premiers jumeaux. Pour $n = 2p$, le produit d'Euler s'effondre car n n'a aucun facteur premier impair distinct de p, ce qui donne la borne inférieure absolue :

$$G(2p) \approx 2C_2 \frac{2p}{\ln^2(2p)} \implies \ln G(2p) \approx \ln(2p) - 2\ln(\ln(2p)) + \ln(2C_2) \tag{5}$$

Bien que le terme $-2\ln(\ln x)$ introduise une lente variation de la pente locale $\left(A(x) = 1 - \dfrac{2}{\ln x}\right)$, sur l'intervalle numérique accessible ($x \leq 10^7$), l'écart à la linéarité est imperceptible à l'œil nu. Une régression linéaire globale sur les données réelles donne l'ajustement optimal $Y = 0{,}8412X - 3{,}2969$, confirmant un rapport réel/théorique oscillant très près de 1.

3. Théorème de Morley et extensions aux polygones supérieurs

Inspirée par la démonstration algébrique d'Alain Connes du théorème de Morley (basée sur le groupe affine $z \mapsto az + b$ et la racine cubique de l'unité $j = e^{2i\pi/3}$ vérifiant $1 + j + j^2 = 0$), la tentative d'extension aux quadrilatères ($n = 4$) et pentagones ($n = 5$) se heurte à des obstructions fondamentales.

3.1. Ordre $n = 4$ et rigidité des diagonales

Pour $n = 4$, l'opérateur de quadrisection fait intervenir les racines quatrièmes de l'unité $(\pm 1, \pm i)$ et l'identité $1 + i + i^2 + i^3 = 0$. L'algèbre annule les termes asymétriques d'ordre impair, couplant les sommets opposés. Cependant, la figure centrale obtenue à partir d'un quadrilatère quelconque est au mieux un parallélogramme.
Rupture conceptuelle : Contrairement au triangle dont la forme est totalement verrouillée par la loi des sinus (rigidité affine), dès $n = 4$, le polygone devient articulé. La présence des diagonales offre deux chemins d'accès indépendants entre sommets opposés, créant une "fuite d'énergie algébrique" que l'algèbre affine ne peut résorber.

3.2. Ordre $n = 5$ et obstruction d'Abel-Galois

Pour le pentagone ($n = 5$), l'intersection des droites issues de la pentasection nécessite la résolution de systèmes polynomiaux dont l'équation résolvante générale est de degré ≥ 5. Par le théorème d'Abel-Galois, le groupe de Galois des équations aux intersections devient le groupe symétrique non résoluble S_5. La décomposition en sous-groupes affines commutatifs s'effondre, interdisant toute régularisation automatique de la figure centrale.

4. Modélisations cinématiques, matricielles et crible Cristal

4.1. Représentations physiques du crible d'Ératosthène

Trois modélisations alternatives de la primalité ont été formalisées :

1. **Tore de phases :** Système cinématique de k tiges rotatives ou particules évoluant sur un tore k-dimensionnel avec des fréquences $\dfrac{1}{p_k}$. La primalité de n correspond à l'absence de retour simultané à la position angulaire 0.
2. **Oscillateurs harmoniques :** Décomposition en onde sin $\left(\dfrac{\pi n}{p}\right)$. La primalité est vue comme une rupture de symétrie correspondant à des interférences constructives évitant tous les nœuds de résonance des modes composés.
3. **Opérateur de permutation globale :** Définition de la matrice booléenne $G = \bigoplus_{p=2}^{\infty} C_p$ composée de blocs de permutation circulaire de taille p.

Théorème 1 (Caractérisation par la trace)**.** *Un entier k est premier si et seulement si* $\mathrm{Trace}(G^k) = k$.

4.2. Analyse critique de la méthode Cristal

La méthode Cristal crible les décomposants de Goldbach sur un réseau planaire (carré ou d'Eisenstein) en éliminant les droites $\mathcal{D}_0(p_k) : x \equiv 0 \pmod{p_k}$ et $\mathcal{D}_n(p_k) : x \equiv n \pmod{p_k}$. L'observation selon laquelle ces droites fusionnent lorsque $p_k | n$ explique le gain de densité asymptotique lié à la

constante de Hardy-Littlewood $\mathfrak{S}(n)$.

Toutefois, cette construction ne peut conduire à une preuve rigoureuse d'existence pour quatre raisons structurelles :

1. **Échec de Minkowski :** L'ensemble des survivants S_n n'est ni convexe, ni un sous-réseau de $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}[\omega]$ pour $p_k \geq 5$.
2. **Invisibilité du recentrage de Gauss :** Bien que le changement de variable $x' = x - n/2$ rétablisse la symétrie centrale $x' \mapsto -x'$, l'absence de convexité persiste.
3. **Limites d'Eisenstein :** Le réseau triangulaire d'Eisenstein ($\mathbb{Z}[\omega]$) optimise l'empilement de disques mais n'accorde aucune structure de groupe propre à S_n.
4. **Obstacle analytique et théorème d'Erdős :** La densité des survivants reste strictement positive ($\delta(n) \sim \dfrac{C}{\ln^2 n} > 0$), garantissant qu'il existe une classe de reste modulo $P = \prod p_k$. Cependant, $P \sim e^{\sqrt{n}}$ croît immensément plus vite que la fenêtre d'observation $[1, n]$. L'obstacle relève du niveau de distribution et de l'obstruction de parité de Selberg.

5. Modèle des Scottish Squares, polynômes de Laurent et matrices de transfert

Pour dépasser le mur géométrique continu, le problème est transposé dans le grand carré complet de côté n pavé par les droites des nombres premiers $x = p_k$ et de leurs complémentaires $y = n - p_k$, formant un réseau complexe ("Scottish Squares" ou tartan).

5.1. L'involution et la géométrie des entiers de Gauss

Dans le repère habituel (origine en bas à gauche, $y = n - p_y$), l'involution structurelle s'écrit :

$$\sigma(z) = (n - \mathrm{Im}(z)) + i(n - \mathrm{Re}(z)) \tag{6}$$

Les points fixes de σ vérifient $p_x = p_y$, correspondant directement aux décompositions $p_x + p_y = n$. Lorsque le cardinal de l'ensemble des premiers P_n est impair, un lemme topologique sur les involutions d'ensembles impairs force l'existence d'au moins un point fixe.

5.2. Polynômes de Laurent locaux et tortue Logo

Pour éviter l'indifférenciation des rotations globales planes, la dynamique est localisée le long des mailles de largeurs $W = p_{k+1} - p_k$ et de hauteurs H. Une tortue Logo effectuant le tour d'une maille sous l'action de l'opérateur de rotation t ($t = i$ pour un quart de tour) engendre un polynôme de Laurent local :

$$P(t) = W + Ht - Wt^2 - Ht^3 = (W - Wt^2) + t(H - Ht^2) \tag{7}$$

Évalué en $t = i$, ce polynôme mesure le vecteur de décalage résiduel $(W - d_3) + i(H - d_4)$.

5.3. Matrices de transfert globales et géométrie sur le tore

En refermant le grand carré sur un tore (bords $x = 0 \equiv 24$ et $y = 0 \equiv 24$), le voyage complet de la tortue est codé par le produit des matrices de transition élémentaires $T(W, H) = \begin{pmatrix} t & W \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$.

Pour $n = 24$, le produit global sur la phase spectrale $t = i$ donne les matrices de transfert :

$$M_X = \begin{pmatrix} 1 & -6i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_Y = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Le terme $t^8 = i^8 = 1$ sur la diagonale confirme le bouclage périodique complet après 8 étapes. L'action conjointe produit une dérive géométrique $x - 6y$.

5.4. Évaluation spectrale et échelle d'harmonique

Lorsque le système est évalué sur sa fréquence spectrale fondamentale $\theta = \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\pi}{12}$ (soit 15°), la matrice de transfert agit comme un prisme optique. La dérive complexe se stabilise et révèle une règle graduée arithmétique rigoureuse d'unité fondamentale :

$$\Delta_{\text{base}} = 24 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 17{,}4641 \tag{9}$$

Chaque saut d'écart entre nombres premiers est converti en un multiple exact de cette pente spectrale (Écart $2 \to 17{,}4641$, Écart $4 \to 34{,}9282$), démontrant la conversion du chaos arithmétique en une métrique spectrale parfaitement réglée sur le tore.