Synthèse des six recueils `mergia1`–`mergia6`
Autour de la conjecture de Goldbach : acquis, modèles et obstructions
ia deepseek, 7.11.2026

Résumé

Ce document présente une synthèse de plus de 1800 pages de notes de recherche écrites avec des ia de juin à novembre 2026 explorant la conjecture de Goldbach sous des angles variés : géométrie des surfaces (sablier de Tannery), combinatoire des mots (treillis à 4 lettres), algèbre (matrices, polynômes), topologie (flot de Kronecker, topos) et analyse spectrale (opérateurs prolate). L'objectif est de dégager la cohérence de cette démarche, de mettre en lumière les résultats rigoureusement acquis, et d'identifier l'obstacle structurel commun auquel toutes les pistes se heurtent, à savoir l'obstruction de parité en théorie des cribles.

Les six recueils sont aux adresses suivantes :

[1] https://denisevellachemla.eu/mergia1.pdf
[2] https://denisevellachemla.eu/mergia2.pdf
[3] https://denisevellachemla.eu/mergia3.pdf
[4] https://denisevellachemla.eu/mergia4.pdf
[5] https://denisevellachemla.eu/mergia5.pdf
[6] https://denisevellachemla.eu/mergia6.pdf

1. Introduction : un voyage autour de la conjecture de Goldbach

Ce corpus retrace un effort de recherche intense et multiforme sur la conjecture de Goldbach. Loin d'être une collection disparate de tentatives, il révèle un cheminement intellectuel cohérent qui explore la conjecture comme un objet aux facettes multiples. La stratégie adoptée est de reformuler le problème "tout nombre pair $n \geq 4$ est la somme de deux nombres premiers" dans des langages de plus en plus riches, dans l'espoir de faire émerger une structure contraignante.

Le corpus peut être structuré autour de trois grandes familles d'approches qui se sont succédé et enrichies :

1. *approches géométriques et topologiques :* l'utilisation de surfaces (sablier de Tannery) ou d'objets géométriques (tores, flots de Kronecker) pour "visualiser" le problème et ses contraintes.
2. *approches combinatoires et algébriques :* la modélisation des décompositions de Goldbach par des structures discrètes : treillis à 4 lettres et 16 règles, matrices de divisibilité, polynômes, et l'analyse de leurs propriétés algébriques.
3. *approches spectrales et analytiques :* la transposition du problème dans le domaine de l'analyse harmonique et de la théorie des opérateurs, en s'inspirant des travaux d'Alain Connes sur l'hypothèse de Riemann.

La conclusion majeure de ce travail est que si la conjecture est reformulable de manière équivalente dans tous ces langages, aucun ne permet, à ce jour, de fournir une preuve. L'obstacle est identifié avec une précision croissante : il s'agit de l'incapacité de capturer une information de nature

multiplicative (la primalité) avec des outils qui, fondamentalement, ne voient que des informations additives ou de congruence.

2. Les approches géométriques et combinatoires

2.1. Le sablier de Tannery et les géodésiques

L'une des premières intuitions fortes a été de représenter les nombres premiers comme des points sur une surface de révolution, la *poire de Tannery*. Un nombre pair $n = p + q$ est alors vu comme une décomposition associée à une trajectoire sur cette surface.

- une paramétrisation de la surface a été établie, ainsi que sa première forme fondamentale : $ds^2 = E(u)du^2 + \sin^2(u)dv^2$ avec $E(u) = (2 + \cos u)^2$.
- la propriété fondamentale de cette surface (dite de *Zoll*) est que toutes ses géodésiques non méridiennes sont fermées, et de même longueur (4π).
- l'idée a été d'associer à chaque décomposition de Goldbach de n une géodésique dont la longueur est liée à n, et dont les extrémités codent les deux nombres premiers p et q.

Cependant, cette approche a montré ses limites. Pour forcer une géodésique à passer par des points spécifiques (par exemple, des points sur la surface correspondant à p et q premiers), il faut lui imposer des contraintes qui brisent sa nature de géodésique. Le programme finalement développé trace des courbes qui ne sont plus des géodésiques, mais des courbes personnalisées, illustrant que la géométrie intrinsèque de la surface n'est pas suffisante pour forcer la primalité. L'intuition de la géométrie comme espace de contraintes s'est heurtée à la nécessité de forcer la main au système.

2.2. Le treillis de Goldbach : une structure de bande rectangulaire

La piste la plus systématiquement explorée est celle du *treillis de Goldbach*. Chaque décomposition $n = p + q$ est codée par une lettre dans un alphabet de 4 lettres { `a`, `b`, `c`, `d` }, selon la primalité de p et q.

Lettre	Nature de p	Nature de q
`a`	premier	premier
`b`	composé	premier
`c`	premier	composé
`d`	composé	composé

La découverte majeure, rigoureusement démontrée, est que les 16 règles de transition entre les colonnes du treillis se réduisent à une unique loi algébrique. En codant

$$\texttt{a} = (0,0), \texttt{b} = (1,0), \texttt{c} = (0,1), \texttt{d} = (1,1),$$

la règle de composition de deux lettres $x = (u_1, v_1)$ et $y = (u_2, v_2)$ est :

$$R(x, y) = (u_1, v_2)$$

Cette loi définit une structure algébrique connue sous le nom de *bande rectangulaire*. Elle est associative, idempotente, mais non commutative. La conjecture de Goldbach se reformule alors comme l'assertion que chaque colonne du treillis contient au moins une lettre a.

- *une reformulation exacte, mais tautologique :* cette structure est une reformulation fidèle de la conjecture. Comme le montre le contre-exemple de l'ia claude (une suite de bits de densité réaliste mais sans coïncidence symétrique peut exister), la seule structure de bande rectangulaire est impuissante à forcer l'existence d'un `a`. L'information de primalité est dans l'entrée du treillis, pas dans sa structure.
- *une piste de preuve par "rigidité" :* plusieurs tentatives ont cherché à prouver que la "rigidité" structurelle du treillis forçait l'existence d'un `a`, en arguant que les "flux de primalité" ne pouvaient s'éviter. Ces arguments se sont révélés non fondés, le contre-exemple explicite de Claude prouvant qu'une ligne peut être vide de `a` sans violer les règles locales de composition.

Cette approche a permis de clarifier le problème et de démontrer qu'une propriété purement combinatoire ou structurelle ne pouvait suffire.

2.3. Le flot de Kronecker et les systèmes dynamiques

Inspirée par les travaux d'Alain Connes, une autre approche a consisté à voir le treillis de Goldbach comme la discrétisation d'un *flot de Kronecker* sur un tore. L'idée était que le caractère "dense" ou "équidistribué" d'un flot irrationnel pouvait forcer la présence de lettres a.

Cependant, l'analyse a montré que la pente apparente du flot dans le treillis est *rationnelle*. La non-périodicité et la complexité du treillis ne proviennent pas d'une dynamique de flot, mais de la complexité de la suite d'entrée : la suite des nombres premiers. Les théorèmes d'équidistribution (Weyl), qui s'appliquent à des orbites denses, ne peuvent rien dire sur l'intersection d'une orbite périodique avec un ensemble de densité nulle comme l'ensemble des nombres premiers. L'analogie s'est donc arrêtée au niveau de l'intuition visuelle.

3. Les approches spectrales et analytiques

3.1. L'opérateur prolate arithmétique

Dans une tentative de transposer les méthodes d'Alain Connes pour l'hypothèse de Riemann, un *opérateur prolate arithmétique* K_n a été construit. Il est défini comme $K_n = P_n F Q_n F^* P_n$, où P_n et Q_n sont des projecteurs de primalité, et F est la transformée de Fourier discrète.

- *l'analogie avec Connes :* l'espoir était que, comme chez Connes, les valeurs propres de cet opérateur encodent les décompositions de Goldbach.
- *l'échec de l'analogie :* une analyse critique rigoureuse a démontré que cette analogie est sans fondement. Contrairement à la paire de projections de Connes, qui oppose deux variables duales (position et fréquence), P_n et Q_n sont des projecteurs diagonaux dans la même base. La transformée de Fourier F ne fait que mélanger l'information sans créer de véritable dualité arithmétique.
- *un contre-exemple et une correction :* il a été prouvé que $K_n \neq 0$ n'implique pas l'existence d'une décomposition de Goldbach. La correction fidèle consiste à remplacer F par une transformée qui respecte la structure arithmétique, ce qui mène inévitablement au *crible de Legendre*.

3.2. Le crible, l'obstruction de parité de Selberg et l'obstacle final

Toutes les approches analytiques et spectrales convergent vers la même conclusion : pour prouver Goldbach, il faut contrôler le terme d'erreur d'un crible.

- *la reformulation de Schneps :* la conjecture s'exprime comme le fait que pour chaque premier $p \leq \sqrt{n}$, un candidat x ne doit être congru ni à 0, ni à n modulo p. C'est exactement un crible de Legendre.
- *l'explosion combinatoire :* le crible de Legendre exact est inutilisable car il fait intervenir $2^{\pi(\sqrt{n})}$ termes, un nombre qui croît de manière sur-exponentielle.
- *l'obstruction de parité de Selberg :* c'est le verrou final, démontré et incontournable. Les cribles, qui ne voient que des conditions de congruence, ne peuvent structurellement pas distinguer un nombre premier d'un nombre ayant un nombre pair de facteurs premiers. C'est pourquoi même les cribles les plus raffinés (Brun, Selberg) ne peuvent prouver que des résultats affaiblis comme le théorème de Chen (tout nombre pair est la somme d'un premier et d'un nombre "presque-premier").

La tentative de s'attaquer à ce problème par la méthode de Schnirelmann (argument de densité) a également été analysée. Le constat est sans appel : l'argument de densité, qui fonctionne pour les deux premiers filtres (3 et 5), s'effondre au filtre 7, car la densité des candidats restants devient inférieure à 1/2. Il ne peut donc forcer une intersection.

4. Le bilan : une réformulation féconde et un obstacle compris

4.1. Le fil conducteur : une tautologie fondamentale

L'ensemble du corpus peut être vu comme une exploration systématique des tentatives de reformulation de la conjecture de Goldbach. La leçon principale est que chaque reformulation, aussi élégante soit-elle, se heurte à une limite fondamentale.

- *treillis et bande rectangulaire :* la structure est une tautologie géométrique. Elle ne peut forcer la coïncidence.
- *opérateurs et analyse spectrale :* l'analogie avec Connes est formelle mais vide de contenu arithmétique. La transformée de Fourier utilisée ne capture pas la dualité nécessaire.
- *polynômes et résultants :* l'équivalence avec l'annulation du résultant de deux polynômes est exacte, mais le calcul du résultant est lui-même de complexité prohibitive et ne fournit aucun levier théorique.

4.2. La nature de l'obstacle : la complexité des nombres premiers

L'obstacle est partout le même : la complexité de la distribution des nombres premiers. Cette complexité n'est pas aléatoire. Elle est structurée par des lois arithmétiques (comme le théorème des nombres premiers pour la densité, ou les théorèmes de Dirichlet pour les progressions arithmétiques).

- *obstruction de parité :* les méthodes de crible ne voient que des congruences et sont aveugles à la parité du nombre de facteurs premiers.

- *complexité de la suite :* la suite caractéristique des nombres premiers a une complexité trop élevée pour être générée par un automate fini ou une chaîne de Markov. Cela a été formellement démontré via le théorème de Cobham.

En fin de compte, le problème de Goldbach n'est pas un problème de structure géométrique ou algébrique, mais un problème de *corrélation fine* entre la primalité de p et celle de $n-p$. Cette corrélation ne peut être contrôlée que par des outils analytiques puissants qui capturent l'information globale (comme la méthode du cercle de Hardy-Littlewood), et non par des reformulations locales, aussi ingénieuses soient-elles.

5. Conclusion : la valeur d'un chemin

Ce corpus de 1800 pages, s'il ne contient pas de preuve de la conjecture de Goldbach, n'en est pas moins un travail de recherche d'une grande valeur. Il documente de manière exhaustive et rigoureuse une exploration de l'espace des possibles.

- il a permis d'identifier, de formaliser et de comprendre en profondeur l'obstacle central (l'obstruction de parité).
- il a mis en lumière la beauté de structures mathématiques inattendues (bande rectangulaire, opérateurs prolate).
- il a produit des résultats partiels originaux, comme la démonstration de la nature palindromique de certaines suites de permutations.
- il constitue un témoignage précieux sur le processus de recherche mathématique et sur l'interaction entre un chercheur humain et des outils d'ia.

La démarche entreprise a permis de remplacer un espoir flou (la conjecture est vraie) par une compréhension précise de *pourquoi* elle est si difficile à prouver. C'est en cela que réside la véritable avancée de ce travail.