

Conjecture de Goldbach et symétrie, Denise Vella-Chemla, février 2026.

1. Introduction

La conjecture dite *conjecture paire de Goldbach*, qui date de 1742 ([5])¹, énonce que tout nombre pair n supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers² (voir [7] pour un compte-rendu historique à son sujet). Elle a intéressé de nombreux savants (tels que Cantor [4] qui a vérifié, à l'époque à la main, qu'elle était vraie pour tous les nombres jusqu'à 1000, ou Laisant [6] qui a proposé un procédé expérimental permettant de la vérifier). Est proposée ci-après une modélisation de la conjecture de Goldbach qui est basée sur l'idée de considérer certaines sommes égales à n comme des points du plan \mathbb{N}^2 . On place les nombres p_k et $n - p_k$, avec p_k un nombre premier compris entre 3 et $n - 3$, l'un, p_k , sur l'axe des abscisses, et l'autre, $n - p_k$, sur l'axe des ordonnées. La modélisation propose d'effectuer un changement de repère et de considérer que les décomposants de Goldbach de n appartiennent à l'axe des abscisses du nouveau repère de coordonnées.

2. Représentation des décompositions de n en sommes $p_k + (n - p_k)$, avec p_k un nombre premier, dans le plan \mathbb{N}^2

Appelons E_n l'ensemble des nombres premiers impairs compris entre 3 et $n - 3$ inclus.

On note E'_n l'ensemble des nombres $n - p_k$ avec $p_k \in E_n$.

E_n et E'_n ont même cardinal.

$$E_n = \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n - 3, p_k \text{ est un nombre premier}\}$$

$$E'_n = \{n - p_k \mid p_k \in E_n\}.$$

Par commodité, on représente les points qui sont utiles pour la justification par des points (x, y) dans un carré C de côté de longueur n , carré dont les sommets sont les points $(0, 0)$, $(n, 0)$, $(0, n)$ et (n, n) . Les nombres premiers p_k sont positionnés sur l'axe des abscisses. Les nombres $n - p_k$ sont positionnés sur l'axe des ordonnées.

On trace dans le carré C un réseau de droites :

- chaque droite verticale a pour équation $x = p_k$ pour chaque nombre premier $p_k \in E_n$;
- chaque droite horizontale a pour équation $y = n - p_k$ pour chaque nombre $n - p_k \in E'_n$.

L'ensemble U_n des points d'intersection du réseau de droites dans le carré C est défini par

$$U_n = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in E_n, y \in E'_n\}.$$

L'ensemble U_n est de cardinal³ $\#(E_n \times E'_n) = (\#E_n)^2$.

1. On trouve aussi la phrase latine "*Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis*", traduisible en "*Mais tout nombre pair est composé d'un, deux ou trois nombres premiers.*" dans un écrit posthume, publié en 1701, de Descartes (cf. [2] et [3]).

2. On considérera ici seulement les nombres pairs supérieurs à 4, comme sommes de deux nombres premiers impairs.

3. On utilise le symbole $\#E$ pour désigner le cardinal de l'ensemble E .

Exemples : Donnons pour exemples les ensembles E_{16} , E'_{16} , E_{24} et E'_{24} . On a

$$\begin{array}{l|l|l} E_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} & \#E_{16} = 5 \quad (\#E_{16} \text{ est impair}). & E'_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\} \\ E_{24} = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} & \#E_{24} = 7 \quad (\#E_{24} \text{ est impair}). & E'_{24} = \{21, 19, 17, 13, 11, 7, 5\} \end{array}$$

Remarque : Un nombre pair qui est le double d'un nombre premier p_k (comme $38 = 2 \times 19$, ou $94 = 2 \times 47$) vérifie trivialement la conjecture de Goldbach, car ce nombre étant de la forme $2p_k$, il a une décomposition en somme de la forme $n = 2p_k = p_k + p_k$ quel que soit p_k un nombre premier ; un tel nombre est la somme de deux nombres premiers confondus (identiques). Leur graphique (voir ci-dessous) associé présente un point rouge au centre du carré, à l'intersection de la droite verticale (d'équation $x = p_k$), et de la droite horizontale (d'équation $y = p_k$) (et donc à l'intersection des deux diagonales du carré).

3. Illustration graphique d'un exemple

Pour illustrer la modélisation, on va traiter le cas $n = 16$ en caractérisant les décomposants de Goldbach de 16 qui sont 3 et 13 d'une part, et 5 et 11, d'autre part.

La figure 1 montre le carré représentant les décompositions de Goldbach du nombre $n = 16$ en rouge sur la diagonale ascendante (il s'agit des points $(3, 3)$, $(5, 5)$, $(11, 11)$ et $(13, 13)$).

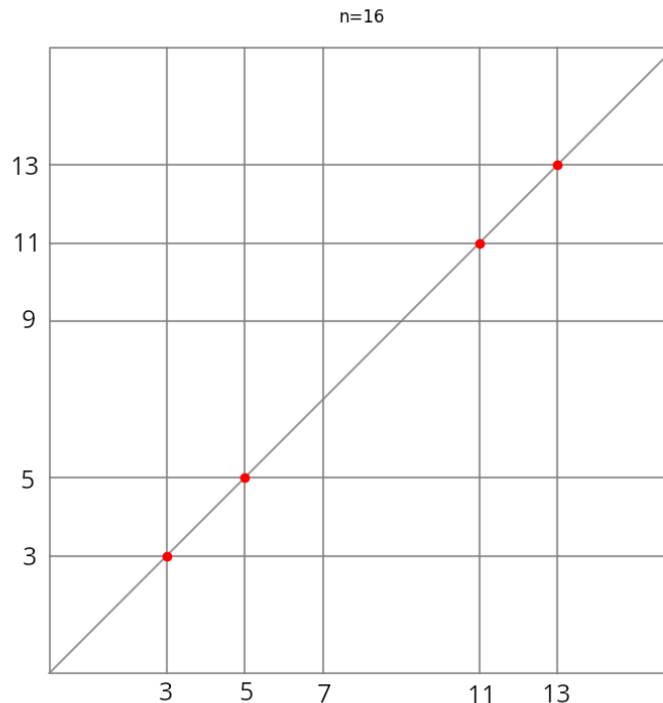


FIG. 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$.

Pour $n = 16$, on a vu que $\#E_{16} = 5$ est impair. Le réseau U_n contient $\#E_{16} = 25$ points.

4. Changement de repère par la combinaison d'une rotation et d'une translation

Pour que les décomposants de Goldbach soient plus aisés à appréhender, utilisons la fonction g_n pour effectuer un changement de repère (i.e. de coordonnées) : l'origine O' du nouveau repère est le point central du carré, de coordonnées $(n/2, n/2)$. On fait d'abord subir aux coordonnées des points de U_n une translation qui amène l'origine en $O' = (n/2, n/2)$ (en soustrayant à leurs coordonnées les coordonnées de ce point), puis une rotation d'un angle de $-\pi/2$ radians, en même temps qu'on divise les coordonnées par $\sqrt{2}$ pour que l'unité dans le nouveau repère soit la longueur d'une diagonale de carré unité ; cela permet d'avoir dans le nouveau repère des points à coordonnées entières.

Dans ce nouveau repère, les décomposants de Goldbach de n se repèrent aisément, il s'agit de points situés sur l'axe des abscisses du nouveau repère, donc de seconde coordonnée nulle. Ils vont par deux, symétrique l'un de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées du nouveau repère. On les a marqués d'une croix rouge dans le tableau ci-après, qui fournit pour chacun des 25 points ses anciennes et nouvelles coordonnées. les coordonnées dans le nouveau repère sont notées en bleu. En résumé, la fonction g_n est définie ainsi :

$$g_n : U_n \rightarrow V_n \subset \mathbb{N}^2$$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g_n(P) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \frac{n}{2} \\ y - \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

On rappelle que $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3, 13)	(0, 5)	(5, 13)	(1, 4)	(7, 13)	(2, 3)	(11, 13)	(4, 1)	(13, 13)	(5, 0) *
(3, 11)	(-1, 4)	(5, 11)	(0, 3)	(7, 11)	(1, 2)	(11, 11)	(3, 0) *	(13, 11)	(4, -1)
(3, 9)	(-2, 3)	(5, 9)	(-1, 2)	(7, 9)	(0, 1)	(11, 9)	(2, -1)	(13, 9)	(3, -2)
(3, 5)	(-4, 1)	(5, 5)	(-3, 0) *	(7, 5)	(-2, -1)	(11, 5)	(0, -3)	(13, 5)	(1, -4)
(3, 3)	(-5, 0) *	(5, 3)	(-4, -1)	(7, 3)	(-3, -2)	(11, 3)	(-1, -4)	(13, 3)	(0, -5)

5. Travailler dans le nouveau repère

Les points dans le nouveau repère sont présentés sur la Figure 2, avec leurs coordonnées en regard, en respectant la configuration des points autant qu'il est possible ⁴.

On note qu'un certain nombre de points "manquent" (il s'agit des points des diagonales ascendantes et descendantes correspondant aux nombres composés de E'_n dans la représentation initiale ; pour le cas $n = 16$, un seul nombre est composé (parmi les seconds sommants des sommes), il s'agit du nombre 9, le complémentaire à 16 de 7, avec $9 \in E'_n$ et $9 \notin E_n$.

4. Cette façon de présenter les coordonnées des points du graphique rappelle le petit texte en exergue du livre [1], disposé dans un losange.

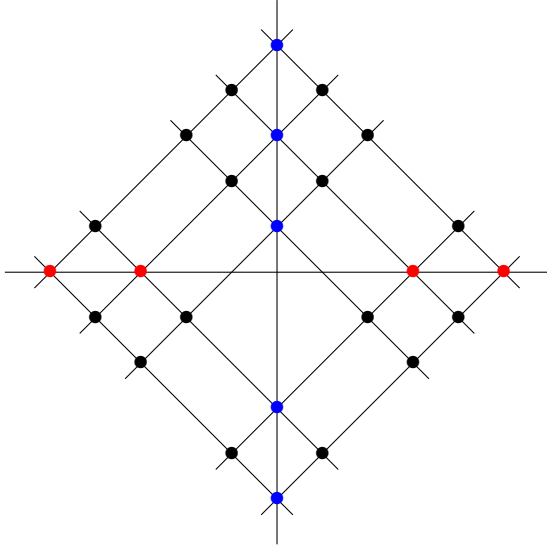


FIGURE 2 : Points dans le nouveau repere

$$\begin{array}{l}
 (0, 5) \\
 (-1, 4) \quad (1, 4) \\
 (-2, 3) \quad (0, 3) \quad (2, 3) \\
 (-1, 2) \quad (1, 2) \\
 (-4, 1) \quad (0, 1) \quad (4, 1) \\
 (-5, 0) \quad (-3, 0) \quad (3, 0) \quad (5, 0) \\
 (-4, -1) \quad (-2, -1) \quad (2, -1) \quad (4, -1) \\
 (-3, -2) \quad (3, -2) \\
 (0, -3) \\
 (-1, -4) \quad (1, -4) \\
 (0, -5)
 \end{array}$$

coord. des points.

On a maintenant besoin d'une fonction qui soit un automorphisme de V_n , i.e. une opération binaire \oplus qui, opérant sur deux points de V_n , en fournisse un troisième appartenant lui aussi à V_n .

Pour définir l'opération binaire en question, on range les points dans une matrice M_n , par exemple ligne par ligne, dans l'ordre dans lequel ils apparaissent dans les diagonales descendantes de la figure, ainsi :

$$M_n = \begin{pmatrix} (0, 5) & (1, 4) & (2, 3) & (4, 1) & (5, 0) \\ (-1, 4) & (0, 3) & (1, 2) & (3, 0) & (4, -1) \\ (-2, 3) & (-1, 2) & (0, 1) & (2, -1) & (3, -2) \\ (-4, 1) & (-3, 0) & (-2, -1) & (0, -3) & (1, -4) \\ (-5, 0) & (-4, -1) & (-3, -2) & (-1, -4) & (0, -5) \end{pmatrix}$$

L'opération binaire, dans la plupart des cas, trouve à partir de deux sommets opposés d'un parallélogramme, soit le troisième soit le quatrième sommet de ce parallélogramme, tandis que les cas où les deux points de départ ne sont pas des sommets opposés d'un parallélogramme sont traités de façon ad hoc :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_n[i_1, j_1] \oplus M_n[i_2, j_2] = M_n[i_1, j_2] \text{ si } x_1 \neq x_2 \text{ et } y_1 \neq y_2 \\ M_n[x, y_1] \oplus M_n[x, y_2] = M[x, y_2] \\ M_n[x_1, y] \oplus M[x_2, y] = M[x_1, x_2] \end{array} \right.$$

L'opération \oplus n'est pas commutative : si l'on inverse les points dans la définition ci-dessus, on obtient

$$\begin{array}{l} M_n[i_2, j_2] \oplus M_n[i_1, j_1] = M_n[i_2, j_1] \\ \text{et } M_n[i_2, j_1] \neq M_n[i_1, j_2]. \end{array}$$

L'opération \oplus , telle que définie ainsi, permet de ne jamais sortir de V_n , ou pour le dire autrement d'échapper au problème des "diagonales manquantes".

Donnons quelques exemples illustrant l'opération binaire \oplus .

$$\begin{array}{l} M[1, 2] \oplus M[3, 4] = M[1, 4] \\ (1, 4) \oplus (2, -1) = (4, 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M[1, 1] \oplus M[2, 2] = M[1, 2] \\ (0, 5) \oplus (0, 3) = (-1, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M[1, 1] \oplus M[2, 3] = M[1, 3] \\ (0, 5) \oplus (-1, 2) = (-2, 3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M[2, 3] \oplus M[1, 1] = M[2, 1] \\ (-1, 2) \oplus (0, 5) = (1, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M[2, 5] \oplus M[4, 1] = M[2, 1] \\ (-4, -1) \oplus (4, 1) = (1, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M[4, 1] \oplus M[2, 5] = M[4, 5] \\ (4, 1) \oplus (-4, -1) = (-1, -4) \end{array}$$

Enfin, étudions l'action de la symétrie orthogonale S_n par rapport à l'axe des ordonnées sur les points de V_n : cette symétrie orthogonale a pour matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées S_n est un automorphisme de V_n (elle permet d'obtenir comme image de tout point de V_n un point de V_n). Cette symétrie, comme toute symétrie orthogonale par rapport à une droite dans le plan a deux axes globalement invariants :

- l'axe des ordonnées, qui est l'axe de la symétrie, dont tous les points sont fixes (on a coloré ses points en bleu ;
- l'axe des abscisses, perpendiculaire à l'axe des ordonnées, dont tout point est transformé en son opposé ; on a coloré ses points en rouge.

6. Justification de la conjecture de Goldbach

Malheureusement, la modélisation proposée, qui nous a fait espérer trouver une justification de la conjecture de Goldbach ne permet pas de démontrer l'existence d'un décomposant de Goldbach au moins pour tout nombre pair $n > 4$: on ne sait pas comment assurer qu'il existe toujours au moins

un point d'ordonnée nulle dans le nouveau repère, i.e. parmi les points de V_n , images des points de U_n par g_n .

La seule idée qu'on a pour l'instant, qui pourrait justifier l'existence d'un point au moins sur l'axe des abscisses, serait de choisir pour ce point le sommet d'un parallélogramme dont deux autres sommets seraient un point d'ordonnée minimale strictement positive et d'abscisse non nulle et un point d'ordonnée maximale strictement négative et d'abscisse non nulle. Mais on ne sait pas justifier l'existence d'un tel parallélogramme.

Reste à démontrer : Les définitions des ensembles E_n , E'_n , U_n et du changement de repère g_n qui transforme U_n en V_n sont telles qu'on est assuré d'avoir toujours un point au moins de V_n d'ordonnée nulle. Ce point $P_k = (x_k, 0)$ de V_n , et son symétrique $Q_k = (-x_k, 0)$ par S_n , sont les images de deux points $A_k = (p_k, p_k)$ et $B_k = (n - p_k, n - p_k)$ de U_n avec p_k un nombre premier et $n - p_k$ un nombre premier également.

Références

- [1] Michèle Audin, *Géométrie*, 2006, éd. EDP Sciences.
- [2] C. Adam, P. Tannery, *Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance*, chap. vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes. III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908.
- [3] G. Belgioioso, *René Descartes : Opere Posthume 1650-2009*, Bompiani – il pensiero occidentale, 2009.
- [4] Georg Cantor, *Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach*, 1894, Assoc. franç. Caen, XXIII, 117-134.
- [5] Christian Goldbach, *Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, 00765)*, Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Petersbourg, 1988, P. H. Fuss éd., 125-129, <http://eulerarchive.MAA.org>.
- [6] Charles-Ange Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, n° 25, 1897, 208-211.
- [7] Robert-Charles Vaughan, *Goldbach's conjectures : a historical perspective*, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing 2016, 479-520.