

Suites fractales de valuations et mise à l'échelle

Denise Vella-Chemla pilotant chatgpt, septembre 2026

J'ai fourni à chatgpt les documents

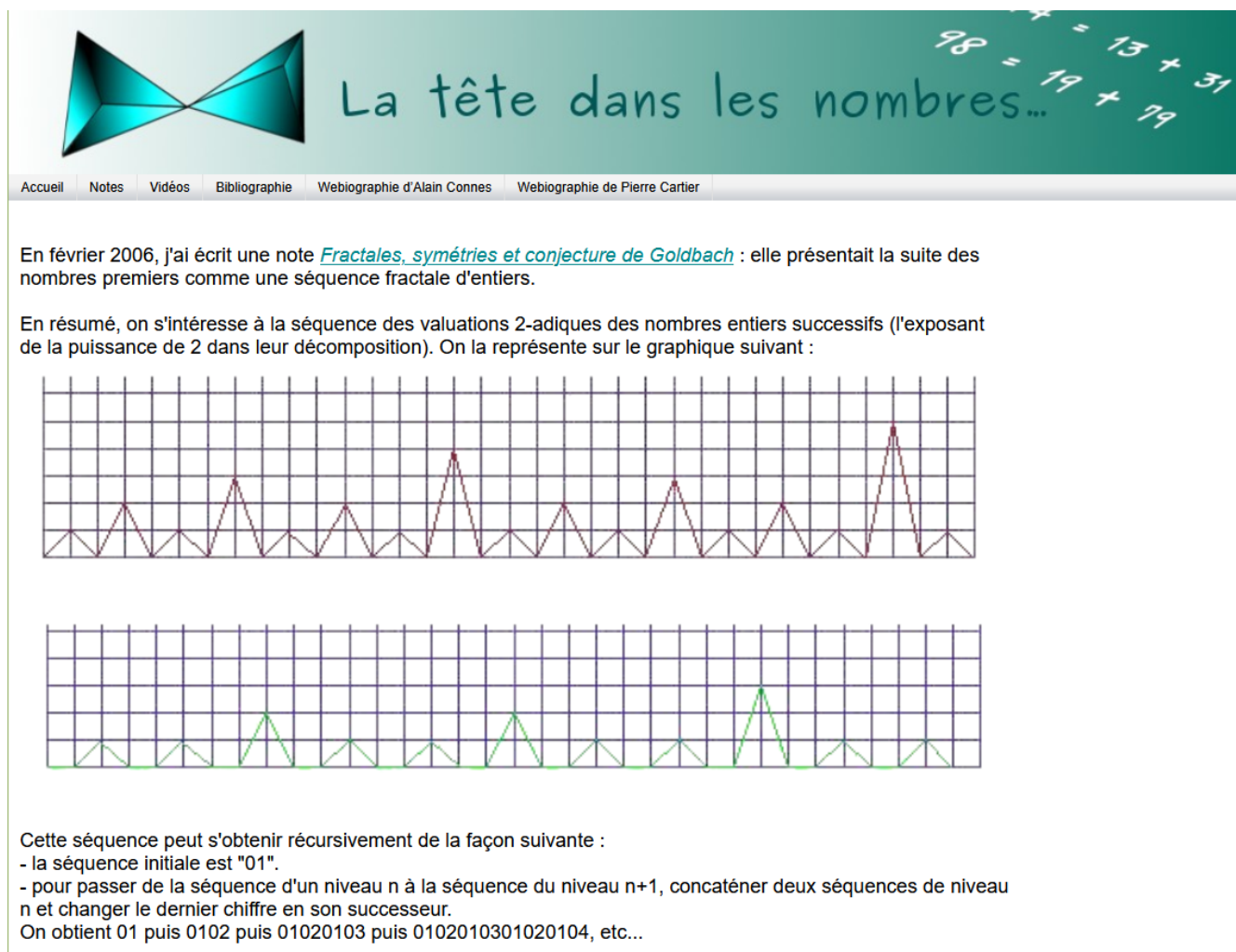
<https://denisevellachemla.eu/fevrier2006.pdf> et cette adresse

<https://denisevellachemla.eu/fractalesnp.html> et

<https://denisevellachemla.eu/castafiore.pdf>

en lui demandant de les étudier, de les relier et de les formaliser.

Fournissons une illustration pour rappel :



La suite de cette note a été rédigée par chatgpt (avec quelques petites modifications de Denise Vella-Chemla).

1. Objet de l'étude

Pour un nombre premier p , on considère la suite

$$a_p(n) = v_p(n),$$

où $v_p(n)$ désigne l'exposant de p dans la factorisation de n .

Pour $p = 2$:

$$0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 0, 1, 0, 2, \dots$$

Cette suite possède la propriété

$$a_p(pn) = a_p(n) + 1.$$

Ainsi, après extraction des termes d'indices multiples de p et soustraction de 1, on retrouve la suite initiale. C'est la structure auto-contenue discrète considérée ici.

2. Pourquoi $\ln p$ n'est pas directement la dimension euclidienne

Considérons les points

$$(n, a_p(n))$$

et la courbe polygonale obtenue en les reliant.

Sur tout intervalle borné, cette courbe est une courbe polygonale finie, donc rectifiable. Sa dimension de Hausdorff est donc

$$\boxed{\dim_H = 1}.$$

Par conséquent, $\ln 2$ et $\ln 3$ ne sont pas les dimensions de Hausdorff des courbes polygonales associées respectivement à v_2 et v_3 .

La raison est que la transformation fondamentale n'est pas une similitude euclidienne. Elle est donnée par

$$a_p(pn) = a_p(n) + 1.$$

Le facteur p agit sur l'échelle horizontale, tandis que $+1$ agit par translation verticale.

3. Loi d'échelle logarithmique

Itérons la relation :

$$a_p(p^k n) = a_p(n) + k.$$

Une multiplication de l'échelle horizontale par p^k produit donc une augmentation verticale de k .

Si $N = p^k$, alors

$$k = \frac{\ln N}{\ln p}.$$

La hauteur caractéristique des pics vérifie donc une loi logarithmique

$$\boxed{H_p(N) \sim \frac{\ln N}{\ln p}}.$$

On peut ainsi définir une quantité d'échelle, différente d'une dimension de Hausdorff :

$$D_{\log}(p) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H_p(N)}{\ln N} = \frac{1}{\ln p},$$

lorsque $H_p(N) = \max_{1 \leq n \leq N} v_p(n)$.

En effet,

$$H_p(N) = \lfloor \log_p N \rfloor$$

et donc

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H_p(N)}{\ln N} = \frac{1}{\ln p}.$$

Cette quantité n'est pas une dimension fractale euclidienne : c'est un coefficient de croissance logarithmique.

4. Cas $p = 2$ et $p = 3$

Pour $p = 2$:

$$H_2(N) = \lfloor \log_2 N \rfloor, \quad D_{\log}(2) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Pour $p = 3$:

$$H_3(N) = \lfloor \log_3 N \rfloor, \quad D_{\log}(3) = \frac{1}{\ln 3}.$$

Ainsi, si l'on cherche une quantité qui mesure la profondeur verticale produite par une dilatation horizontale, les nombres naturels sont

$$\boxed{\frac{1}{\ln 2}, \quad \frac{1}{\ln 3}}$$

et non $\ln 2, \ln 3$.

5. Addition des valuations v_2 et v_3

Définissons

$$s(n) = v_2(n) + v_3(n).$$

Alors

$$v_2(6n) = v_2(n) + 1, \quad v_3(6n) = v_3(n) + 1,$$

d'où

$$\boxed{s(6n) = s(n) + 2}.$$

Par itération,

$$\boxed{s(6^k n) = s(n) + 2k}.$$

La suite $s(n)$ est donc elle aussi auto-contenue au sens discret : en ne conservant que les indices multiples de 6 et en retranchant 2, on retrouve la suite initiale.

6. Hauteur maximale de la somme

Posons

$$H_{2,3}(N) = \max_{1 \leq n \leq N} (v_2(n) + v_3(n)).$$

Comme $2^a 3^b \leq N$ donne $v_2(n) + v_3(n) = a + b$, la maximisation consiste à maximiser $a + b$ sous la contrainte

$$a \ln 2 + b \ln 3 \leq \ln N.$$

Puisque

$$\ln 2 < \ln 3,$$

chaque unité de a coûte moins d'échelle logarithmique qu'une unité de b . Le maximum est donc obtenu en privilégiant les facteurs 2.

Plus précisément,

$$H_{2,3}(N) = \lfloor \log_2 N \rfloor$$

pour tout N suffisamment grand, et en fait pour tout $N \geq 1$.

En effet, pour $m = \lfloor \log_2 N \rfloor$,

$$2^m \leq N$$

donne $H_{2,3}(N) \geq m$, tandis que

$$2^a 3^b \geq 2^{a+b}$$

implique, si $2^a 3^b \leq N$, que

$$a + b \leq \log_2 N.$$

Donc

$$\boxed{H_{2,3}(N) = \lfloor \log_2 N \rfloor}.$$

Il en résulte

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{H_{2,3}(N)}{\ln N} = \frac{1}{\ln 2}}.$$

C'est un point important : la loi de croissance maximale de la somme $v_2 + v_3$ est dominée par le premier 2, et non par une combinaison naïve des coefficients associés à 2 et 3.

7. Une autre loi d'échelle, directement liée à l'auto-contenance

La relation de reproduction de la somme est

$$s(6n) = s(n) + 2.$$

Si l'on mesure uniquement le déplacement vertical produit par une reproduction complète de facteur 6, on obtient

$$\frac{2}{\ln 6}.$$

On peut appeler

$$\delta_{\text{repro}}(2, 3) = \frac{2}{\ln 6}$$

le coefficient logarithmique de reproduction.

Il faut cependant distinguer cette quantité de

$$\frac{1}{\ln 2},$$

qui décrit la croissance du maximum global jusqu'à N .

Ces deux nombres répondent à deux questions différentes :

$$\frac{2}{\ln 6} \quad \text{mesure une itération de l'auto-contenance,}$$

tandis que

$$\frac{1}{\ln 2} \quad \text{mesure la croissance du maximum global.}$$

Il serait donc incorrect de les identifier sans préciser la définition retenue.

8. Généralisation à plusieurs premiers

Soit

$$P = \{p_1, \dots, p_r\}$$

un ensemble de nombres premiers, et posons

$$A_P(n) = \sum_{p \in P} v_p(n), \quad M = \prod_{p \in P} p.$$

Pour chaque $p \in P$,

$$v_p(Mn) = v_p(n) + 1.$$

Par conséquent,

$$A_P(Mn) = A_P(n) + r.$$

La suite A_P est donc fractale au sens discret considéré :

$$A_P(Mn) - r = A_P(n).$$

Après k reproductions,

$$A_P(M^k n) = A_P(n) + kr.$$

Le coefficient logarithmique associé à cette reproduction est

$$\delta_{\text{repro}}(P) = \frac{r}{\ln M} = \frac{r}{\sum_{p \in P} \ln p}.$$

Pour un seul premier p :

$$\delta_{\text{repro}}(\{p\}) = \frac{1}{\ln p}.$$

Pour $\{2, 3\}$:

$$\delta_{\text{repro}}(\{2, 3\}) = \frac{2}{\ln 6}.$$

9. Conclusion

Il apparaît donc trois objets différents qu'il ne faut pas confondre :

1. la dimension géométrique de la courbe polygonale :

$$\boxed{\dim_H = 1};$$

2. le coefficient de croissance logarithmique du maximum :

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{n \leq N} v_p(n)}{\ln N} = \frac{1}{\ln p};}$$

3. le coefficient logarithmique de la reproduction discrète :

$$\boxed{\delta_{\text{repro}}(P) = \frac{|P|}{\ln \prod_{p \in P} p}.$$

Pour v_2 , v_3 et $v_2 + v_3$, on obtient respectivement

$$\frac{1}{\ln 2}, \quad \frac{1}{\ln 3}, \quad \frac{2}{\ln 6}$$

pour la loi de reproduction.

La propriété la plus fondamentale reste toutefois l'identité discrète

$$A_P(Mn) - |P| = A_P(n),$$

qui constitue une véritable auto-similarité additive des suites d'entiers, même si elle n'est pas une auto-similarité euclidienne au sens usuel.