Nombres et sphère quantique (Denise Vella-Chemla, 16.2.2019)

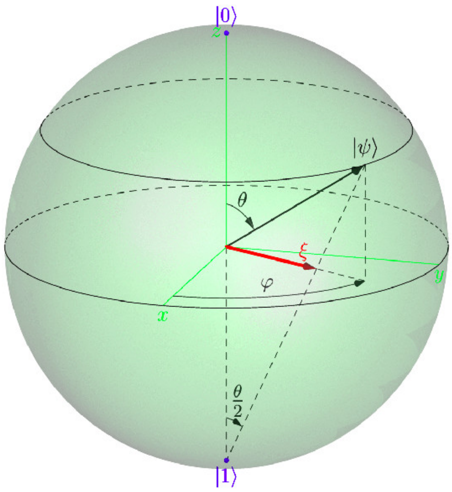
Ayant touché du doigt à l'été 2018 tout l'aléa qui semble gouverner le fait d'être ou de ne pas être premier pour un entier naturel donné, on souhaiterait ici modéliser les entiers naturels en utilisant des qubits sur la sphère quantique.

Un bit d'information ne peut prendre que 2 valeurs, 0 ou 1.
Un qubit, ou bit quantique, peut être vu comme une superposition de multiples états possibles entre 0 et 1, chacun de ces états étant caractérisé par les probabilités de $|0\rangle$ et de $|1\rangle$ qu'il "contient".

$$|\Psi\rangle = cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}}|0\rangle + sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}}|1\rangle.$$

On représente les qubits sur la sphère quantique ainsi, on lira à profit la page

http://stla.github.io/stlapblog/posts/BlochSphere.html [1].



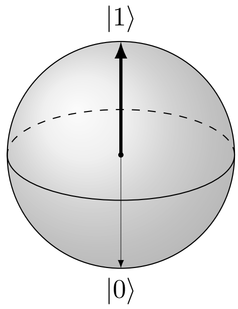
On rappelle qu'un nombre n étant donné, on a les définitions suivantes :

- n est un nombre premier si une division euclidienne de n par n'importe quel autre nombre que lui-même a un reste non-nul ;
- n est un nombre composé si l'une au moins des divisions euclidiennes de n par un autre nombre que lui-même (l'un de ses diviseurs notamment) a un reste nul.

Pour ne pas se perdre dans l'espace de Hilbert, on va imaginer qu'à un nombre n sont associés, non pas une infinité de qubits, mais seulement $n-2$ qubits, correspondant chacun aux divisions de n par les entiers de 3 à n.

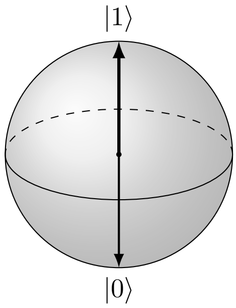
Le résultat de la division de n par d est aléatoire dans la mesure où on ne connaît pas n : quand d divisera n, le qubit fixera sa valeur sur $|0\rangle$ tandis qu'il fixera sa valeur sur $|1\rangle$ si d ne divise pas n.

De cette manière, un nombre premier aura tous ses qubits qui se fixeront sur $|1\rangle$ sauf un qui se fixera sur $|0\rangle$, ce qu'on a symbolisé ci-dessous par l'épaisseur relative des flèches vers $|1\rangle$ et $|0\rangle$.

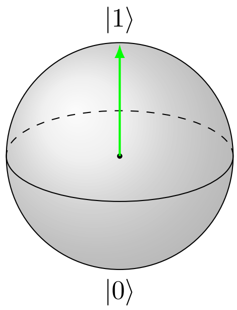
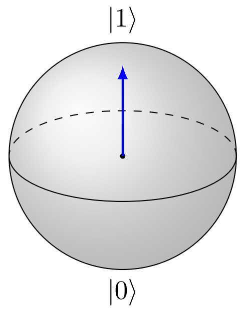


1. page dont on n'a pas trouvé le nom de l'auteur.

Un nombre composé, lui, aura un certain nombre de ses qubits qui se fixeront sur $|1\rangle$ et un certain nombre [2], strictement supérieur à 1, d'autres qubits qui se fixeront sur $|0\rangle$. On a symbolisé par l'épaisseur relative des flèches le fait qu'un nombre a cependant moins de diviseurs que de non-diviseurs.



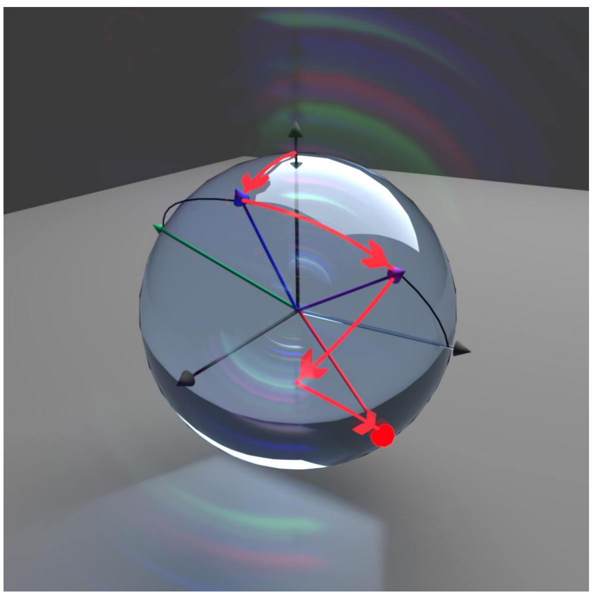
Imaginons maintenant qu'on ajoute les qubits associés à un nombre ; suivant le nombre de qubits positionnés sur $|0\rangle$, le vecteur global obtenu, qui sera sur l'axe reliant les pôles de la sphère, aura son extrémité qui s'éloignera plus ou moins de la surface de la sphère et on peut dire que les nombres premiers, du fait qu'ils n'ont qu'un seul qubit sur $|0\rangle$, resteront les plus proches de la surface de la sphère.

	
Vecteur global associé à un nombre premier	*Vecteur global associé à un nombre composé*

La superbe illustration suivante, trouvée à la page

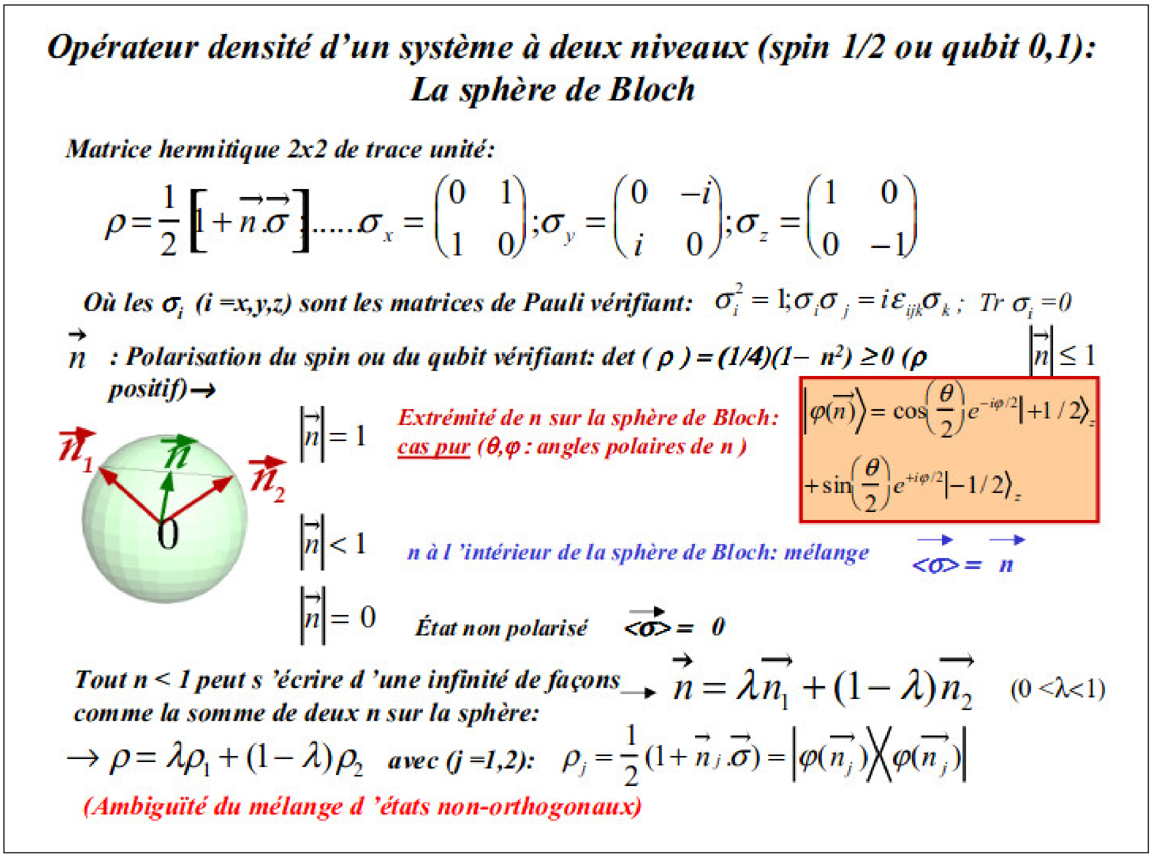
https://www.eurekalert.org/multimedia/pub/120313.php,

explicite la façon dont les vecteurs s'additionnent sur la sphère quantique.



2. son nombre de diviseurs.

Enfin, l'image ci-dessous est le dernier transparent du premier cours de Serge Haroche au Collège de France pour l'année 2001-2002 [3].
On retrouve l'idée du vecteur à l'intérieur (de norme <1) ou sur la sphère de Bloch [4] (de norme =1).



Pour le problème qui motive notre recherche depuis septembre 2005 et qui est la conjecture de Goldbach, il faudrait trouver la manière de "coder" l'intrication entre la divisibilité par p de x un décomposant de Goldbach potentiel de n et la divisibilité par p de $n - x$ son complémentaire à n.

3. Cours du 8.1.2002 dont l'intégralité du diaporama est trouvable à l'adresse https://www.college-de-france.fr/media/serge-haroche/UPL54964$_{S}Haroche_{0}80102.pdf$
4. dite aussi sphère quantique.