

Traduction d'un article concernant l'utilisation d'ondes sphéroïdales prolates pour visualiser des régions limitées de la sphère, (Denise Vella-Chemla, 12.11.2020)

Concentration spatio-spectrale sur une sphère

FREDERIK J. SIMONS¹ F. A. DAHLEN² MARK A. WIECZOREK³

Résumé

Nous posons et résolvons l'analogie du problème de la concentration temps-fréquence de Slepian sur la surface de la sphère unité pour déterminer une famille de fonctions orthogonales à bande temporelle strictement limitée, qui sont concentrées de façon optimale dans une région fermée de la sphère, ou, alternativement, de fonctions à bande spatiale strictement limitée qui sont concentrées de façon optimale dans le domaine harmonique de la sphère. Une telle base de fonctions concentrées simultanément spatialement et spectralement devrait être un outil utile pour l'analyse des données et leur représentation dans de nombreuses applications géophysiques et planétaires, aussi bien qu'en imagerie médicale, informatique, cosmologie et analyse numérique. Les fonctions de Slepian peuvent être trouvées soit en résolvant un problème de recherche de valeurs propres algébriques ou en résolvant une équation intégrale de Fredholm dans le domaine spatial. Les valeurs propres associées sont une mesure de la concentration spatio-spectrale. Quand la région de concentration est une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe, l'opérateur de projection spatio-spectral commute avec l'opérateur de Sturm-Liouville ; cela permet de calculer les fonctions propres extrêmement précisément et efficacement, même quand leur produit surface-largeur-de-bande, ou nombre de Shannon, est grand. A la limite asymptotique d'une petite région de concentration et d'une large bande harmonique sphérique, le problème de la concentration sphérique approche son équivalent dans le plan, qui présente une auto-similarité quand le nombre de Shannon est conservé invariant.

1 Introduction

Dans une série d'articles classiques publiés dans les années 60, David Slepian et ses collègues ont résolu un problème fondamental en ingénierie des communications, notamment le problème de concentrer un signal de façon optimale à la fois dans les domaines du temps et de la fréquence [32; 33; 53; 54; 56]. La famille orthogonale des fenêtres de données, ou des cônes, qui surviennent dans un tel contexte, et leurs extensions multi-dimensionnelles [20; 36] ont été utilisées comme base d'une méthode multi-cônes d'analyse spectrale [46; 61], et pour l'analyse et la représentation des données d'une grande variété d'applications en physique, informatique et biomédecine (e.g., en géodésie, sismologie, optique, théorie de l'information, neurologie, et reconnaissance vocale). Les opérateurs de concentration de fréquence temporelle et d'échelle temporelle ont été étudiés dans des contextes plus généraux et dans une variété de géométries uni- ou multi-dimensionnelles par plusieurs auteurs [e.g., 10; 11; 13; 15; 35; 41; 42].

Dans cet article, nous considérons la concentration spatiale et spectrale simultanée d'une fonction à valeurs réelles de positionnement géographique sur la sphère unité. Les multi-cônes sphériques que nous en dérivons devraient être utiles dans un grand nombre d'applications d'analyse de données

géophysiques et planétaires; c'est la première motivation qui sous-tend notre présente étude. En particulier, nous notons que les propriétés physiques, telles que l'épaisseur ou la force élastique de la lithosphère planétaire, peuvent être estimées à partir des propriétés spectrales croisées de la topologie de la surface et du champ gravitationnel associé [63]. De telles données sont accessibles la plupart du temps à partir de coefficients harmoniques sphériques à bande limitée, mesurés par des satellites artificiels ou des vaisseaux spatiaux. Dans la plupart sinon dans toutes les applications, la courbure de la Terre empêche d'utiliser des approximations localement plates [65]. De ce fait, la détermination d'estimations spatialement localisées des propriétés planétaires nécessite des méthodes de localisation spatio-temporelle qui sont au-delà de celles utilisables dans le plan [e.g., 50]. Des fenêtres sphériques simples et des cônes ont été développés et appliqués dans un certain nombre d'études récentes [e.g., 16; 17; 29; 52]; pourtant, ils ne sont ni concentrés de façon optimale, ni aussi fiables qu'une famille orthogonale de multi-cônes dans l'extraction d'une information statistique localisée robuste à partir des données sphériques en bande limitée [66].

À la suite d'une analyse initiale et extrêmement perspicace par Grünbaum et ses collègues [19], le problème de la concentration de Slepian sur la sphère n'a, à notre connaissance, été réétudié qu'assez rarement, par des chercheurs intéressés par la géodésie [1], l'imagerie par résonance magnétique du cerveau humain [47] et l'analyse spectrale planétaire [66]. Chacune de ces études traite un cas particulier. Dans notre article, nous posons et résolvons le problème de la concentration spatio-spectrale dans sa forme plus générale, nous discutons d'un certain nombre de méthodes d'implémentation numériques, et nous analysons la limite asymptotique de la Terre plate, dans laquelle le problème de la concentration sphérique se rapproche du problème correspondant sur un plan.

2 Le problème de la concentration de Slepian

Nous commençons par un bref rappel du problème de la concentration en temps-fréquence, unidimensionnel, continu-continu. Les résultats sont bien connus et donc nous pourrions les combiner sans aucun détour; notre seul objectif est de fournir un modèle pour le problème de la concentration sur la sphère, que nous étudierons dans le reste de l'article. Nous utilisons t et ω pour dénoter le temps et la fréquence angulaire, respectivement, et nous adoptons une convention de normalisation dans laquelle un signal variable en fonction de la variable réelle temps, $f(t)$ et sa transformée de Fourier $F(\omega)$ sont reliés par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1)$$

Le problème spécifique considéré par Slepian [56] est celui de concentrer de manière optimale dans une bande strictement limitée un signal $g(t)$, avec un spectre $G(\omega)$ qui s'évanouit pour les fréquences $|\omega| > W$, dans un intervalle de temps $|t| \leq T$. Aucun tel signal sur bande limitée $g(t)$ ne peut être complètement concentré dans un intervalle fini en vertu du principe d'incertitude de Heisenberg [14; 39]; le signal optimalement concentré est considéré comme étant celui avec la moindre énergie en dehors de l'intervalle :

$$\lambda = \frac{\int_{-T}^T g^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt} = \text{maximum}. \quad (2)$$

Les signaux à bande limitée $g(t)$ satisfaisant le problème variationnel (2) ont des spectres $G(\omega)$ qui

ont des valeurs propres qui satisfont l'équation intégrale de convolution du domaine de fréquences

$$\int_{-W}^W \frac{\sin T(\omega - \omega')}{\pi(\omega - \omega')} G(\omega') d\omega' = \lambda G(\omega), \quad |\omega| \leq W. \quad (3)$$

Un problème très relié est celui de concentrer le spectre $H(\omega)$ d'une fonction strictement limitée dans le temps $h(t)$, qui s'évanouit pour certains temps donnés $|t| > T$, vers un intervalle spectral $|\omega| \leq W$. La concentration de mesure appropriée dans ce cas est

$$\lambda = \frac{\int_{-W}^W |H(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} = \text{maximum}. \quad (4)$$

Les signaux limités dans le temps $h(t)$ dont le spectre satisfait le problème variationnel (4) satisfont eux-mêmes l'équation des valeurs propres du domaine temporel

$$\int_{-T}^T \frac{\sin W(t - t')}{\pi(t - t')} h(t') dt' = \lambda h(t), \quad |t| \leq T. \quad (5)$$

Ces deux sortes d'équations (3) et (5) ont les mêmes valeurs propres $1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > 0$, avec des cônes de domaine temporel associés $g_1(t), g_2(t), \dots$ et $h_1(t), h_2(t), \dots$ qui coïncident dans l'intervalle $|t| \leq T$, et les spectres propres $G_1(\omega), G_2(\omega), \dots$ et $H_1(\omega), H_2(\omega), \dots$ qui coïncident dans l'intervalle $|\omega| \leq W$.

Un changement des variables dépendantes et indépendantes transforment à la fois (3) et (5) en la même équation de valeur propre sans dimension

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin TW(x - x')}{\pi(x - x')} \psi(x') dx' = \lambda \psi(x), \quad |x| \leq 1. \quad (6)$$

L'équation (6) montre que les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et les fonctions propres convenablement mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ dépendent seulement du produit à largeur de bande temporelle. La somme des valeurs propres est reliée à ce produit par

$$N = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \lambda_{\alpha} = \frac{2TW}{\pi}. \quad (7)$$

À cause de la forme caractéristique étagée du spectre des valeurs propres [30; 57], le nombre qu'on appelle nombre de Shannon [46] est une bonne estimation du nombre de valeurs propres significatives, ou, pour le dire rapidement, le nombre de signaux $f(t)$ qui peuvent être simultanément concentrés vers un intervalle fini de durées $|t| \leq T$ et un intervalle fini de fréquences $|\omega| \leq W$.

L'opérateur intégral agissant sur ψ du côté gauche de l'équation (6) commute avec un opérateur différentiel du second ordre,

$$\mathcal{P} = \frac{d}{dx}(1 - x^2) \frac{d}{dx} - T^2 W^2 x^2, \quad (8)$$

qui advient dans la séparation de l'équation d'onde tri-dimensionnelle en coordonnées sphéroïdales prolates [55].

À cause de cela, il est également possible de trouver des fonctions propres mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ en résolvant l'équation de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d\psi}{dx} + (\chi - T^2W^2x^2)\psi = 0, \quad |x| \leq 1, \quad (9)$$

quand $\chi \neq \lambda$ est la valeur propre associée.

Les cônes propres sphéroïdaux prolates à bande limitée peuvent être choisis de façon à être orthonormaux sur l'intervalle infini de temps $|t| \leq \infty$ et orthogonaux sur l'intervalle fini de temps $|t| \leq T$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha g_\beta dt = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \int_{-T}^T g_\alpha g_\beta dt = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Presque tous les résultats ci-dessus peuvent être étendus au problème analogue de concentration spatio-spectrale pour les fonctions définies sur une surface de la sphère unité. Comme nous le verrons, le problème en deux dimensions est enrichi par la forme de la région de concentration spatiale.

3 Préliminaires

La géométrie de la sphère unité $\Omega = \{\hat{\mathbf{r}} : \|\hat{\mathbf{r}}\| = 1\}$ est montrée sur la Figure 1. On note la colatitude⁴ d'un point $\hat{\mathbf{r}}$ par $0 \leq \theta \leq \pi$ et la longitude par $0 \leq \phi < 2\pi$, de telle façon que $\hat{\mathbf{r}} = (\theta, \phi)$ représente une position géographique sur la sphère. La distance angulaire géodésique entre deux points $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{r}}'$ sera notée Δ , où

$$\cos \Delta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (11)$$

Nous utilisons R pour dénoter une région de Ω d'aire A , dans laquelle nous cherchons à concentrer une fonction à bande de position limitée $\hat{\mathbf{r}}$. La région peut consister en un certain nombre de sous-régions disconnectées, $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots$, et elle peut avoir une frontière de forme irrégulière, comme montré. La région complémentaire à R sera dénotée $\Omega - R$.

3.1 Harmoniques sphériques

Puisque nous nous restreignons aux fonctions à valeurs réelles, nous utilisons les harmoniques réelles de surface sphérique $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) = Y_{lm}(\theta, \phi)$ définies par [9; 12]

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{2}X_{l|m|}(\theta) \cos m\phi & \text{si } -l \leq m < 0 \\ X_{l0}(\theta) & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2}X_{lm}(\theta) \sin m\phi & \text{si } 0 < m \leq l, \end{cases} \quad (12)$$

$$X_{lm}(\theta) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_{lm}(\cos \theta), \quad (13)$$

$$P_{lm}(\mu) = \frac{1}{2^l l!} (1-\mu^2)^{m/2} \left(\frac{d}{d\mu} \right)^{l+m} (\mu^2 - 1)^l. \quad (14)$$

La quantité $0 \leq l \leq \infty$ est connue comme étant l'harmonique sphérique de degré angulaire, et $-l \leq m \leq l$ est son ordre angulaire. Le nombre asymptotique d'ondes $l \rightarrow \infty$ associé à une harmonique de degré l est $\sqrt{l(l+1)} \approx l + 1/2$ [5; 26]. La fonction $P_{lm}(\mu)$ définie dans (14) est la

4. rappel : c'est l'angle complémentaire de la latitude d'un lieu, i.e. la différence entre 90 et la latitude.

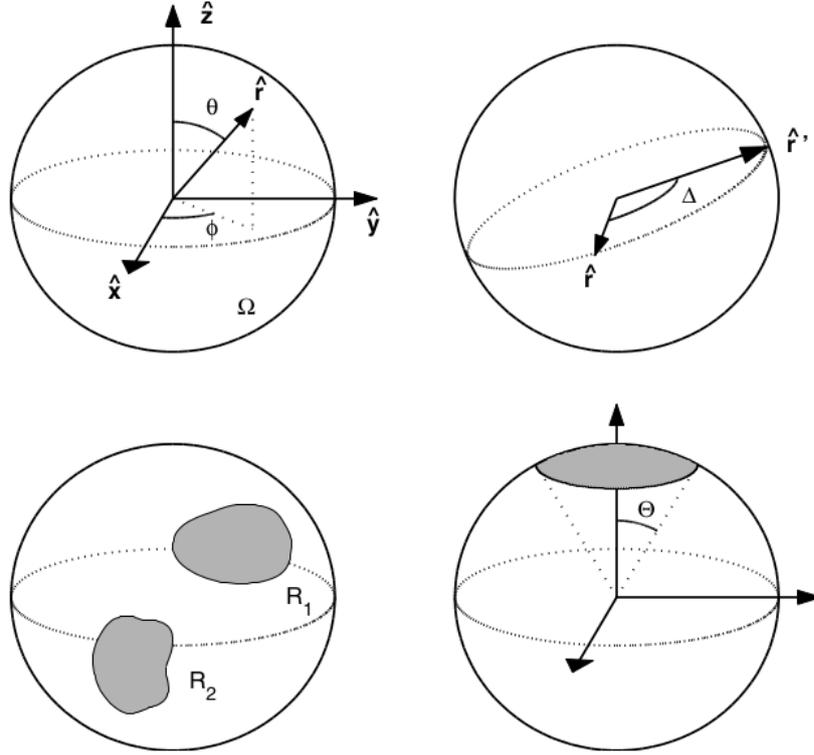


FIGURE 1 – Schéma illustrant la géométrie du problème de concentration sphérique. En bas à droite est montrée une calotte polaire asymétrique de rayon colatitudinal Θ , traité à la Section 5. L'aire de la région de concentration, $R = R_1 \cup R_2 \cup \dots$, est dénotée par la lettre A .

fonction de Legendre de degré entier l et d'ordre m . Les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ sont des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami,

$$\nabla^2 = \partial_\theta^2 + \cot \theta \partial_\theta + (\sin \theta)^{-2} \partial_\phi^2, \quad (15)$$

avec des valeurs propres associées $-l(l+1)$. Notre choix de constantes multiplicatives dans les équations (12) et (13) orthonormalise les harmoniques sur la sphère unité :

$$\int_{\Omega} Y_{lm} Y_{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (16)$$

Les relations d'orthogonalité d'ordre fixé correspondantes pour $X_{lm}(\theta)$ et $P_{lm}(\mu)$ sont

$$\int_0^\pi X_{lm} X_{l'm} \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \delta_{ll'}, \quad (17a)$$

$$\int_{-1}^1 P_{lm} P_{l'm} d\mu = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}. \quad (17b)$$

L'intégrale de Legendre d'un polynôme $P_l(\mu) = P_{l0}(\mu)$ sur une calotte $\cos \Theta \leq \mu \leq 1$ est [6]

$$\int_{\cos \Theta}^1 P_l d\mu = \frac{1}{2l+1} [P_{l-1}(\cos \Theta) - P_{l+1}(\cos \Theta)], \quad (18)$$

où $P_{-1}(\mu) = 1$, et le produit des fonctions de Legendre au même argument est

$$X_{lm}(\theta) X_{l'm}(\theta) = (-1)^m \sum_{n=|l-l'|}^{l+l'} \sqrt{\frac{(2n+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi}}$$

$$\times \begin{pmatrix} l & n & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & n & l' \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} X_{n0}(\theta), \quad (19)$$

où les tableaux d'indices sont des symboles de Wigner 3- j [12; 39]. Parmi les nombreuses relations récurrentes à trois termes incluant les fonctions de Legendre associées et leurs dérivées, nous utilisons les deux suivantes dans cet article, notamment

$$(2l+1)\mu P_{lm} = (l-m+1)P_{l+1,m} + (l+m)P_{l-1,m}, \quad (20a)$$

$$(1-\mu^2)\frac{dP_{lm}}{d\mu} = (l+1)\mu P_{lm} - (l-m+1)P_{l+1,m}. \quad (20b)$$

Finalement, il y a deux relations impliquant des sommes de produits de fonctions de Legendre évaluées en différents arguments qui sont utiles dans la discussion qui suit.

La première est le célèbre théorème de l'addition harmonique sphérique [12]

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'), \quad (21)$$

et la seconde est la version de Legendre de l'identité de Christoffel-Darboux [59; 60]

$$\begin{aligned} (\mu - \mu') \sum_{l=m}^L (2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_{lm}(\mu) P_{lm}(\mu') \\ = \frac{(L-m+1)!}{(L+m)!} [P_{L+1,m}(\mu) P_{Lm}(\mu') - P_{Lm}(\mu) P_{L+1,m}(\mu')]. \end{aligned} \quad (22)$$

Une application de la règle de L'Hôpital dans l'équation (22) couvre le cas dans lequel $\mu = \mu'$.

3.2 Fonctions sur la sphère

Soit $f(\hat{\mathbf{r}})$ une fonction à valeurs réelles de carré intégrable sur la sphère unité Ω . Toute telle fonction peut être développée en une série d'harmoniques sphériques :

$$f = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}, \quad f_{lm} = \int_{\Omega} f Y_{lm} d\Omega. \quad (23)$$

Les équations (23) sont les analogues sphériques de la transformation paire de Fourier en une dimension (1). Le caractère fini de la sphère unité quantifie les "fréquences" colatitudinales et longitudinales $0 \leq l \leq \infty$ et $-l \leq m \leq l$. Nous utilisons des caractères sans serif f pour noter le vecteur colonne ordonné des coefficients des harmoniques sphériques :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_{lm} \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (24)$$

La norme d'une fonction $f(\hat{\mathbf{r}})$ dans le domaine spatial sera notée

$$\|f\|_{\Omega}^2 = \int_{\Omega} f^2 d\Omega, \quad (25)$$

et la norme de son domaine spectral équivalent f sera notée

$$\|f\|_{\infty}^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}^2. \quad (26)$$

En utilisant cette notation, la relation de Parseval [46] peut s'écrire sous la forme $\|f\|_{\Omega}^2 = \|f\|_{\infty}^2$.

La densité de la puissance spectrale ou la variance par le degré sphérique harmonique l et par unité d'aire d'une fonction $f(\hat{\mathbf{r}})$ est définie par

$$\langle f_l^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l f_{lm}^2. \quad (27)$$

Nous utilisons $\delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ pour la fonction delta de Dirac sur la sphère, avec la propriété de réplication

$$\int_{\Omega} \delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') f(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega' = f(\hat{\mathbf{r}}). \quad (28)$$

Nous pouvons écrire $\delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ dans chacune des formes alternatives

$$\begin{aligned} \delta(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') &= (\sin \theta)^{-1} \delta(\theta - \theta') \delta(\phi - \phi') \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'). \end{aligned} \quad (29)$$

Le degré de variance d'une fonction delta est constant ; sa densité de puissance spectrale est blanche :

$$\langle \delta_l^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \quad \text{pour tout } 0 \leq l \leq \infty. \quad (30)$$

3.3 Fonctions à temps dans une bande limitée et à espace dans une bande limitée

Nous nous intéressons à deux sous-espaces des fonctions de carré intégrable de la sphère unité Ω . Nous utilisons

$$\mathcal{S}_L = \{g: \langle g_l^2 \rangle = 0 \text{ pour } L < l \leq \infty\} \quad (31)$$

pour noter l'espace des fonctions à bande limitée,

$$g = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l g_{lm} Y_{lm}, \quad (32)$$

qui n'ont pas de puissance au-dessus d'un degré harmonique sphérique maximum L , et nous utilisons

$$\mathcal{S}_R = \{h: h = 0 \text{ dans } \Omega - R\} \quad (33)$$

pour noter l'espace de toutes les fonctions à espace limité $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont strictement contenues dans une région R . L'espace \mathcal{S}_R est de dimension infinie, mais la dimension de l'espace des fonctions à bande limitée est

$$\dim \mathcal{S}_L = \sum_{l=0}^L (2l+1) = (L+1)^2, \quad (34)$$

puisque le vecteur colonne ordonné des coefficients harmoniques sphériques

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_{00} \\ \vdots \\ g_{LL} \end{pmatrix} \quad (35)$$

associé à une fonction $g(\hat{\mathbf{r}})$ de la forme (32) a $(L+1)^2$ entrées. Les semi-normes spatiale et spectrale analogues à (25) et (26) sont définies ainsi

$$\|f\|_R^2 = \int_R f^2 d\Omega, \quad \|f\|_L^2 = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l f_{lm}^2. \quad (36)$$

Dans l'espace \mathcal{S}_R des fonctions à espace limité, $\|h\|_R^2$ est une norme, et dans l'espace \mathcal{S}_L des fonctions à bande-limitée, $\|g\|_L^2$ est une norme ; plus généralement, pourtant, à la fois $\|f\|_R^2$ et $\|f\|_L^2$ sont des semi-normes.

4 Concentration dans une région de forme arbitraire

Le principe d'incertitude [14; 39] stipule qu'aucune fonction ne peut à la fois être strictement limitée en espace et strictement limitée en bande, i.e., aucune $f(\hat{\mathbf{r}})$ ne peut à la fois être présente dans les deux sous-espaces \mathcal{S}_R et \mathcal{S}_L simultanément. L'objectif de notre article est de déterminer ces fonctions à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ qui sont aussi contraintes que possible dans une région donnée R , et ces fonctions à espace limité $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ dont le spectre de puissance est aussi bien concentré que possible dans l'intervalle $0 \leq l \leq L$. Comme dans le cas de la fréquence temporelle, ces deux concentrations spacio-temporelles s'avèreront être le dual l'une de l'autre. Pour raccourcir l'exposé, nous utiliserons fréquemment les abréviations

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l = \sum_{lm}^{\infty} \quad \text{et} \quad \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l = \sum_{lm}^L. \quad (37)$$

4.1 Concentration spatiale d'une fonction à bande limitée

Pour maximiser la concentration spatiale d'une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ dans une région R , nous maximisons le rapport des (semi-)normes :

$$\lambda = \frac{\|g\|_R^2}{\|g\|_{\Omega}^2} = \frac{\int_R g^2 d\Omega}{\int_{\Omega} g^2 d\Omega} = \text{maximum}. \quad (38)$$

Le problème variationnel à deux dimensions (38) est analogue au problème à une dimension (2). Ici, comme là, la quantité $0 < \lambda < 1$ est une mesure de la concentration spatiale. En insérant la représentation (32) de $g(\hat{\mathbf{r}})$ dans (38), et en interchangeant les ordres de sommation et d'intégration, on peut exprimer λ par la forme

$$\lambda = \frac{\int_R \left(\sum_{lm}^L g_{lm} Y_{lm} \sum_{l'm'}^L g_{l'm'} Y_{l'm'} \right) d\Omega}{\int_{\Omega} \left(\sum_{lm}^L g_{lm} Y_{lm} \sum_{l'm'}^L g_{l'm'} Y_{l'm'} \right) d\Omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{lm}^L g_{lm} \sum_{l'm'}^L \left(\int_R Y_{lm} Y_{l'm'} d\Omega \right) g_{l'm'}}{\sum_{lm}^L g_{lm} \sum_{l'm'}^L \left(\int_{\Omega} Y_{lm} Y_{l'm'} d\Omega \right) g_{l'm'}} \\
&= \frac{\sum_{lm}^L g_{lm} \sum_{l'm'}^L D_{lm,l'm'} g_{l'm'}}{\sum_{lm}^L g_{lm}^2}, \tag{39}
\end{aligned}$$

où dans la dernière étape, on a utilisé la relation d'orthonormalité (16), et défini la quantité quadruplement indexée

$$D_{lm,l'm'} = \int_R Y_{lm} Y_{l'm'} d\Omega. \tag{40}$$

En introduisant la matrice $(L+1)^2 \times (L+1)^2$

$$D = \begin{pmatrix} D_{00,00} & \cdots & D_{00,LL} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{LL,00} & \cdots & D_{LL,LL} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

d'éléments $D_{lm,l'm'}$, où $0 \leq l \leq L$ et $-l \leq m \leq l$, on peut réécrire l'équation (38) comme un problème classique de variation de matrice [22] dans l'espace \mathcal{S}_L :

$$\lambda = \frac{\mathbf{g}^T D \mathbf{g}}{\mathbf{g}^T \mathbf{g}} = \text{maximum}. \tag{42}$$

Les vecteurs colonnes \mathbf{g} qui rendent le quotient de Rayleigh λ stationnaire dans l'équation (42) sont les solutions du problème de recherche des valeurs propres algébriques dans $(L+1)^2 \times (L+1)^2$

$$D \mathbf{g} = \lambda \mathbf{g}. \tag{43}$$

L'équation (43) est l'analogie discret sphérique de l'équation de domaine spectral à une dimension (3). La matrice D est réelle, symétrique et définie positive

$$D^T = D \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^T D \mathbf{g} > 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{g} \neq 0, \tag{44}$$

de telle façon que les $(L+1)^2$ valeurs propres λ et les vecteurs propres associés \mathbf{g} sont toujours réels [22]. Nous ordonnons les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(L+1)^2}$ et les vecteurs propres $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{(L+1)^2}$ de telle façon que

$$1 > \lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_{(L+1)^2} > 0. \tag{45}$$

Chaque vecteur propre du domaine spectral \mathbf{g}_α , $\alpha = 1, 2, \dots, (L+1)^2$ donne naissance à une fonction associée à bande limitée spatiale $g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$, définie par l'équation (32). La première inégalité dans (45) est stricte parce que la fonction à bande limitée peut être complètement confinée dans une région R , et la dernière inégalité est stricte à cause du caractère défini positif de la matrice D .

La symétrie $D^T = D$ garantit aussi que les vecteurs propres $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{(L+1)^2}$ sont mutuellement orthogonaux [22]. Nous les choisissons orthonormés :

$$\mathbf{g}_\alpha^T \mathbf{g}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_\alpha^T D \mathbf{g}_\beta = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \tag{46}$$

Les fonctions propres spatiales associées $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \dots, g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$ sont dans ce cas à la fois ortho-normées sur la totalité de la sphère Ω et orthogonales sur la région R :

$$\int_{\Omega} g_{\alpha} g_{\beta} d\Omega = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \int_R g_{\alpha} g_{\beta} d\Omega = \lambda_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}. \quad (47)$$

Les deux relations du domaine spatial dans l'équation (47) sont équivalentes aux relations spectrales matricielles (46), et elles sont analogues aux relations uni-dimensionnelles d'orthogonalité (10). La fonction propre $g_1(\hat{\mathbf{r}})$ associée avec la plus grande valeur propre λ_1 est l'élément de l'espace \mathcal{S}_L des fonctions à bande limitée qui est la plus concentrée dans la région R , la fonction propre $g_2(\hat{\mathbf{r}})$ est la fonction suivante (la seconde fonction) la plus concentrée dans \mathcal{S}_L orthogonal à $g_1(\hat{\mathbf{r}})$ à la fois sur Ω et R , et etc.

Écrit complètement en utilisant les notations, l'équation matricielle de valeur propre (43) est

$$\sum_{l'm'}^L D_{lm,l'm'} g_{l'm'} = \lambda g_{lm}. \quad (48)$$

En multipliant l'équation (48) par $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ et en sommant sur tous les $0 \leq l \leq L$ et $-l \leq m \leq l$, le côté droit fournit $\lambda g(\hat{\mathbf{r}})$, et le côté gauche peut être manipulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{lm}^L \left(\sum_{l'm'}^L D_{lm,l'm'} g_{l'm'} \right) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) &= \sum_{lm}^L \sum_{l'm'}^L \left(\int_R Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega' \right) g_{l'm'} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \\ &= \int_R \left(\sum_{lm}^L Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \right) \left(\sum_{l'm'}^L g_{l'm'} Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{r}}') \right) d\Omega' \\ &= \int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') g(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega', \end{aligned} \quad (49)$$

où dans la dernière étape, nous avons défini la fonction delta de Dirac à bande limitée

$$D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') = \sum_{l=0}^L \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'). \quad (50)$$

Les calculs ci-dessus démontrent que l'équation matricielle du domaine spectral (43) est équivalente à l'équation des valeurs propres entières du domaine spatial

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') g(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega' = \lambda g(\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in \Omega. \quad (51)$$

L'équation (51) est une équation d'intégrale de Fredholm de seconde espèce, avec un noyau symétrique, séparable [28; 62].

Après avoir inséré les représentations (32) et (50) dans l'équation (51), nous retrouvons l'équation matricielle (43), de telle façon que le problème de la valeur propre du domaine spectral pour \mathbf{g} et le problème de la valeur propre dans le domaine spatial pour une $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ limitée en bande sont complètement équivalents.

En résumé, nous pouvons trouver une famille orthogonale de fonctions propres à bande limitée qui sont concentrées de manière optimale dans une région R sur la sphère unité Ω soit en résolvant le problème matriciel $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ de valeurs propres (43) pour les vecteurs propres du domaine spectral $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{(L+1)^2}$, soit en résolvant l'équation intégrale de Fredholm du domaine spatial (51)

pour les fonctions propres associées du domaine spatial $g_1, g_2, \dots, g_{(L+1)^2}$.

Chacune des deux méthodes détermine les fonctions propres optimalement concentrées en tout point $\hat{\mathbf{r}} \in \Omega$, i.e., à la fois dans la région R , où elles sont concentrées, et dans la région complémentaire, $\Omega - R$, où elles montrent un (évitemment) leakage flagrant.

4.2 Concentration spectrale d'une fonction à espace limité

Plutôt que de chercher à concentrer une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ dans une région spatiale R , on peut chercher à concentrer une fonction limitée en espace $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ dans un intervalle spectral $0 \leq l \leq L$. Une mesure adéquate de la concentration est alors le rapport de norme analogue en dimension 1 au rapport (4) :

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{h}\|_L^2}{\|\mathbf{h}\|_\infty^2} = \frac{\sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l h_{lm}^2}{\sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^l h_{lm}^2} = \text{maximum.} \quad (52)$$

Après avoir inséré la représentation des coefficients d'expansion sphérique harmonique

$$h_{lm} = \int_R h Y_{lm} d\Omega, \quad (53)$$

et avoir interchangé l'ordre de sommation et d'intégration, nous pouvons réécrire le rapport (52) sous la forme

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sum_{lm} \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega \int_R h(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega'}{\sum_{lm} \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega \int_R h(\hat{\mathbf{r}}') Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega'} \\ &= \frac{\int_R \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) \left(\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \right) h(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega' d\Omega}{\int_R \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) \left(\sum_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}') \right) h(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega' d\Omega} \\ &= \frac{\int_R \int_R h(\hat{\mathbf{r}}) D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') h(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega d\Omega'}{\int_R h^2(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega}, \end{aligned} \quad (54)$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé la propriété de réplication (28) de la fonction delta (29) et la définition (50) du noyau $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$. Les fonctions $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ qui rendent le quotient de Rayleigh (54) stationnaire sont les solutions valeurs propres entières de l'équation de Fredholm

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') h(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega' = \lambda h(\hat{\mathbf{r}}), \quad \hat{\mathbf{r}} \in R. \quad (55)$$

L'équation (55) est l'analogie sphérique de l'équation des valeurs propres à domaine temporel à une dimension (5). En fait, cette équation pour $h(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_R$ est identique à l'équation (51) pour $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$. La seule différence est que l'équation (51) est applicable sur la sphère complète Ω , alors que le domaine de l'équation (55) est limité à la région R , dans laquelle $h(\hat{\mathbf{r}}) \neq 0$. De façon évidente,

les fonctions propres $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui maximisent le rapport de norme spectral (52) sont identiques dans la région R , aux fonctions propres $g(\hat{\mathbf{r}})$ qui maximisent le rapport de norme spatial (38) :

$$h(\hat{\mathbf{r}}) = \begin{cases} g(\hat{\mathbf{r}}) & \text{if } \hat{\mathbf{r}} \in R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (56)$$

Chacune des $(L + 1)^2$ fonction à bande limitée $g_\alpha \in \mathcal{S}_L$ engendre une fonction propre à espace limité $h_\alpha \in \mathcal{S}_R$, définie par la restriction (56). Les valeurs propres associées λ_α sont une mesure à la fois de la concentration des fonctions propres à bande limitée dans la région R et de la concentration spectrale des fonctions propres à espace limité dans l'intervalle $0 \leq l \leq L$. L'énergie spatiale fractionnelle $1 - \lambda_\alpha$ évitée par une certaine fonction $g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ vers la région $\Omega - R$ est identique à l'énergie spectrale fractionnelle évitée par $h_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ dans les hauts degrés $L < l \leq \infty$. Si nous avons commencé avec la prescription variationnelle (52) plutôt que (38), nous aurions obtenu l'équation intégrale (51) qui régit une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ en étendant simplement le domaine de solution de l'équation (55) à la sphère complète Ω .

Les fonctions à espace limité définies par l'équation (56) sont orthogonales mais non orthonormales sur la sphère complète Ω et sur la région R :

$$\int_{\Omega} h_\alpha h_\beta d\Omega = \int_R h_\alpha h_\beta d\Omega = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (57)$$

Les coefficients harmoniques sphériques h_{lm} , avec $0 \leq l \leq \infty$ et $-l \leq m \leq l$, sont donnés en fonction de ceux de g_{lm} , avec $0 \leq l \leq L$ et $-l \leq m \leq l$, par

$$h_{lm} = \sum_{l'=0}^L \sum_{m'=-l'}^{l'} D_{lm,l'm'} g_{l'm'}, \quad (58)$$

qui se réduit à $h_{lm} = \lambda g_{lm}$ pour $0 \leq l \leq L$. En plus des $(L + 1)^2$ fonctions propres avec valeurs propres non nulles associées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(L+1)^2}$, l'équation (55) a un espace nul de dimension infinie de fonctions propres avec valeurs propres associées $\lambda = 0$. Chaque fonction $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui s'évanouit en $\Omega - R$ et qui n'a pas d'énergie nulle part dans l'intervalle $0 \leq l \leq L$ est un élément de cet espace nul.

4.3 Valeurs propres significatives et non significatives

La somme des valeurs propres de la matrice D définie dans l'équation (41) est

$$N = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_\alpha = \text{tr } D = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l D_{lm,lm}. \quad (59)$$

En substituant les éléments de la matrice diagonale $D_{lm,lm}$ de l'équation (40) et en utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques (21), cela se simplifie en

$$\begin{aligned} N &= \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \int_R Y_{lm} Y_{lm} d\Omega \\ &= \sum_{l=0}^L \int_R \left(\sum_{m=-l}^l Y_{lm} Y_{lm} \right) d\Omega \\ &= \sum_{l=0}^L \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) \int_R P_l(1) d\Omega \\ &= (L+1)^2 \frac{A}{4\pi}, \end{aligned} \quad (60)$$

où dans la dernière étape, nous avons utilisé l'identité $P_l(1) = 1$ pour exprimer le résultat en fonction de l'aire de la surface, $A = \int_R d\Omega$, de la région de concentration R .

Nous pouvons alternativement obtenir le résultat (59) en commençant avec l'équation des valeurs propres spatiales (51).

Le noyau $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ peut être exprimé en fonction des valeurs propres spatiales $g_1, g_2, \dots, g_{(L+1)^2}$, qui constituent une base pour \mathcal{S}_L , dans la formule

$$D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} g_{\alpha}(\hat{\mathbf{r}})g_{\alpha}(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (61)$$

La représentation (61) est l'analogie sphérique du théorème de Mercer [28; 62]. Algébriquement, nous pouvons regarder la relation (61) comme ayant été obtenue à partir de la représentation originale (50) par une transformation orthogonale à partir d'une base Y_{lm} , $0 \leq l \leq L$ et $-l \leq m$, vers une autre g_{α} , $\alpha = 1, 2, \dots, (L+1)^2$. En posant $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}}$ dans l'équation (61), et en intégrant sur la région R , on obtient

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) d\Omega = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \int_R g_{\alpha}^2(\hat{\mathbf{r}}) d\Omega = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_{\alpha}. \quad (62)$$

Alternativement, poser $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}}$ dans l'équation (50) et intégrer sur R amène à

$$\int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) d\Omega = \sum_{l=0}^L \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) \int_R P_l(1) d\Omega = (L+1)^2 \frac{A}{4\pi}. \quad (63)$$

En comparant les équations (59)–(60) et (62)–(63), on voit que l'on peut écrire la somme des valeurs propres (59) dans chacune des formes équivalentes

$$N = \sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_{\alpha} = \text{tr } D = \int_R D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) d\Omega = (L+1)^2 \frac{A}{4\pi}. \quad (64)$$

La quantité N est l'analogie sphérique du nombre de Shannon (7) dans le problème de concentration en une dimension de Slepian. Les fonctions propres $g_{\alpha}(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont bien concentrées dans la région R auront des valeurs propres associées λ_{α} qui sont proches de l'unité, alors que celles qui sont peu concentrées auront des valeurs propres associées λ_{α} qui seront proches de zéro. Si, comme dans le problème à une dimension, le spectre des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{(L+1)^2}$ a une bande de transition étroite des valeurs proches de l'unité aux valeurs proches de zéro, alors le nombre total de valeurs propres significatives ($\lambda_{\alpha} \approx 1$) sera bien approximé par la somme (arrondie) (59). Pour cette raison, nous nous attendons à ce que N soit une bonne approximation du nombre de valeurs propres significatives. Pour dire ça rapidement, le nombre de Shannon sphérique (64) est la dimension de l'espace des fonctions à deux dimensions $f(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont à la fois approximativement limitées dans le domaine spectral aux degrés sphériques harmoniques $0 \leq L$ et approximativement limitées dans le domaine spatial à une région de forme arbitraire R d'aire A [30; 31].

Plutôt que de chercher une fonction à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ qui est optimalement concentrée dans une région spatiale R , nous pourrions avoir décidé d'en chercher une qui est optimalement exclue de R , i.e. une fonction qui est optimalement concentrée dans une région complémentaire d'une région R , cette région complémentaire de R étant notée $\Omega - R$. Dans ce cas, nous pourrions souhaiter

minimiser plutôt que maximiser le rapport de Rayleigh (38). En fait, tout ce que nous avons trouvé, ce sont les fonctions à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}}) \in \mathcal{S}_L$ qui rendent la valeur propre λ stationnaire, et ainsi nous avons vraiment résolu le problème de confinement (38) et le problème de l'exclusion simultanément. Les fonctions propres optimalement concentrées et les fonctions propres optimalement exclues sont identiques, mais d'indices d'ordre inversés, i.e., la fonction à bande limitée qui est la plus exclusive de R et la plus concentrée dans $\Omega - R$ est $g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$, avec la valeur propre associée la plus petite $\lambda_{(L+1)^2}$. À chaque fois que l'aire A de la région R est une petite fraction de l'aire de la sphère $A \ll 4\pi$, il y aura beaucoup plus de fonctions propres correctement exclues avec des valeurs propres non significatives ($\lambda_\alpha \approx 0$), que de fonctions propres concentrées avec des valeurs propres significatives, $\lambda_\alpha \approx 1$, i.e., $N \ll (L+1)^2$.

La somme des carrés des fonctions propres à bande limitée $(L+1)^2 g_\alpha(\hat{\mathbf{r}})$ est une constante, indépendante de la position $\hat{\mathbf{r}}$ sur la sphère Ω . Ceci est une autre conséquence du théorème de Mercer (61) et de la définition (50) :

$$\sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}}) = D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}) = \frac{(L+1)^2}{4\pi} = \frac{N}{A}. \quad (65)$$

Si les N premières fonctions propres g_1, g_2, \dots, g_N ont des valeurs propres proches de l'unité et sont pour la plupart dans R , et que les autres $g_{N+1}, g_{N+2}, \dots, g_{(L+1)^2}$ ont des valeurs propres proches de zéro et sont principalement dans $\Omega - R$, alors nous nous attendons à ce que la somme des carrés pondérée par les valeurs propres soit

$$\sum_{\alpha=1}^{(L+1)^2} \lambda_\alpha g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}}) \approx \sum_{\alpha=1}^N \lambda_\alpha g_\alpha^2(\hat{\mathbf{r}}) \approx \begin{cases} N/A & \text{si } \hat{\mathbf{r}} \in R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (66)$$

Les termes avec $N+1 \leq \alpha \leq (L+1)^2$ devraient être négligeables, le fait qu'ils soient ou non dans la somme n'est donc pas matérialisé (66).

Pris ensemble, les N premières fonctions propres orthogonales $g_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, N$, avec des valeurs propres significatives $\lambda_\alpha \approx 1$, fournissent un recouvrement essentiellement uniforme de la région R . C'est vraiment l'essence du problème de la concentration spatio-spectrale; le nombre de degrés de liberté est réduit de $\dim \mathcal{S}_L = (L+1)^2$ au nombre de Shannon $N = (L+1)^2 A / (4\pi)$.

4.4 Formulation par opérateur abstrait

Nous concluons cette section sur le problème de la concentration dans le cas d'une région de forme arbitraire en réitérant la formulation des résultats ci-dessus mais en utilisant maintenant une notation d'opérateurs abstraits. On utilise \mathcal{H} pour dénoter l'opérateur qui agit sur les fonctions à carré intégrable $f(\hat{\mathbf{r}})$ dans le domaine spatial pour produire les vecteurs colonnes \mathbf{f} infini-dimensionnels associés aux coefficients harmoniques sphériques f_{lm} dans le domaine spectral, et nous utilisons \mathcal{H}^{-1} pour dénoter son inverse, de telle façon que

$$\mathcal{H}f = \mathbf{f} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^{-1}\mathbf{f} = f. \quad (67)$$

Nous introduisons aussi deux opérateurs de projection, \mathcal{R} et \mathcal{L} , qui projettent respectivement sur l'espace \mathcal{S}_R des fonctions à espace limité et sur l'espace \mathcal{S}_L des fonctions à bande limitée, respectivement.

Le premier de ces opérateurs agit sur les fonctions $f(\hat{\mathbf{r}})$ restreintes dans le domaine spatial,

$$\mathcal{R}f(\hat{\mathbf{r}}) = \begin{cases} f(\hat{\mathbf{r}}) & \text{if } \hat{\mathbf{r}} \in R \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (68)$$

tandis que le second agit sur les vecteurs colonnes dans le domaine spectral,

$$\mathcal{L}\mathbf{f} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{\infty\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{00} \\ \vdots \\ f_{LL} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Finalement, nous introduisons une notation pour le produit intérieur standard dans les deux domaines simultanément :

$$\langle f, f' \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} ff' d\Omega \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}' \rangle_{\infty} = \mathbf{f}^{\top} \mathbf{f}'. \quad (70)$$

La relation de Parseval peut être écrite en utilisant cette notation selon la forme suivante $\langle f, f' \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}' \rangle_{\infty}$. Les normes spatiales et spectrales introduites dans les équations (25) et (26) sont données par $\|f\|_{\Omega}^2 = \langle f, f \rangle_{\Omega}$ et $\|\mathbf{f}\|_{\infty}^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle_{\infty}$.

Le problème variationnel de la concentration spatiale (38) et le problème variationnel de la concentration spectrale (52) peuvent être écrits en utilisant cette notation par opérateurs de la façon suivante

$$\lambda = \frac{\langle \mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathbf{f}, \mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathbf{f} \rangle_{\Omega}}{\langle \mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathbf{f}, \mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathbf{f} \rangle_{\Omega}} = \text{maximum}, \quad (71a)$$

$$\lambda = \frac{\langle \mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}f, \mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}f \rangle_{\infty}}{\langle \mathcal{H}\mathcal{R}f, \mathcal{H}\mathcal{R}f \rangle_{\infty}} = \text{maximum}. \quad (71b)$$

Les équations des valeurs propres associées aux domaine spectral et spatial sont

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\mathbf{f}) = \lambda(\mathcal{L}\mathbf{f}), \quad (72a)$$

$$(\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R})(\mathcal{R}f) = \lambda(\mathcal{R}f), \quad (72b)$$

où nous avons fait usage des faits que \mathcal{H} et \mathcal{H}^{-1} sont les transposés l'un de l'autre, de telle façon aussi qu'à la fois \mathcal{R} et \mathcal{L} sont leur propre transposée, et que $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ et $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$. Les équations (72) sont les opérateurs équivalents à l'équation des valeurs propres algébriques (43) et à l'équation intégrale des valeurs propres (55). Toute solution de l'équation (72a) est un vecteur colonne à bande limitée de la forme $\mathbf{g} = \mathcal{L}\mathbf{f}$, alors que toute solution de l'équation (72b) est une fonction à espace limité de la forme $h = \mathcal{R}f$. À la fois l'opérateur du domaine spectral $\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}$ et l'opérateur du domaine spatial $\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}$ sont symétriques de visé.

L'application de l'opérateur produit $\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}$ agit sur une fonction arbitraire f à bande limitée, selon une opération qu'on appelle le filtrage à résolution uniforme ou sphérique, ou la troncature triangulaire en analyse numérique [4; 25; 44; 59].

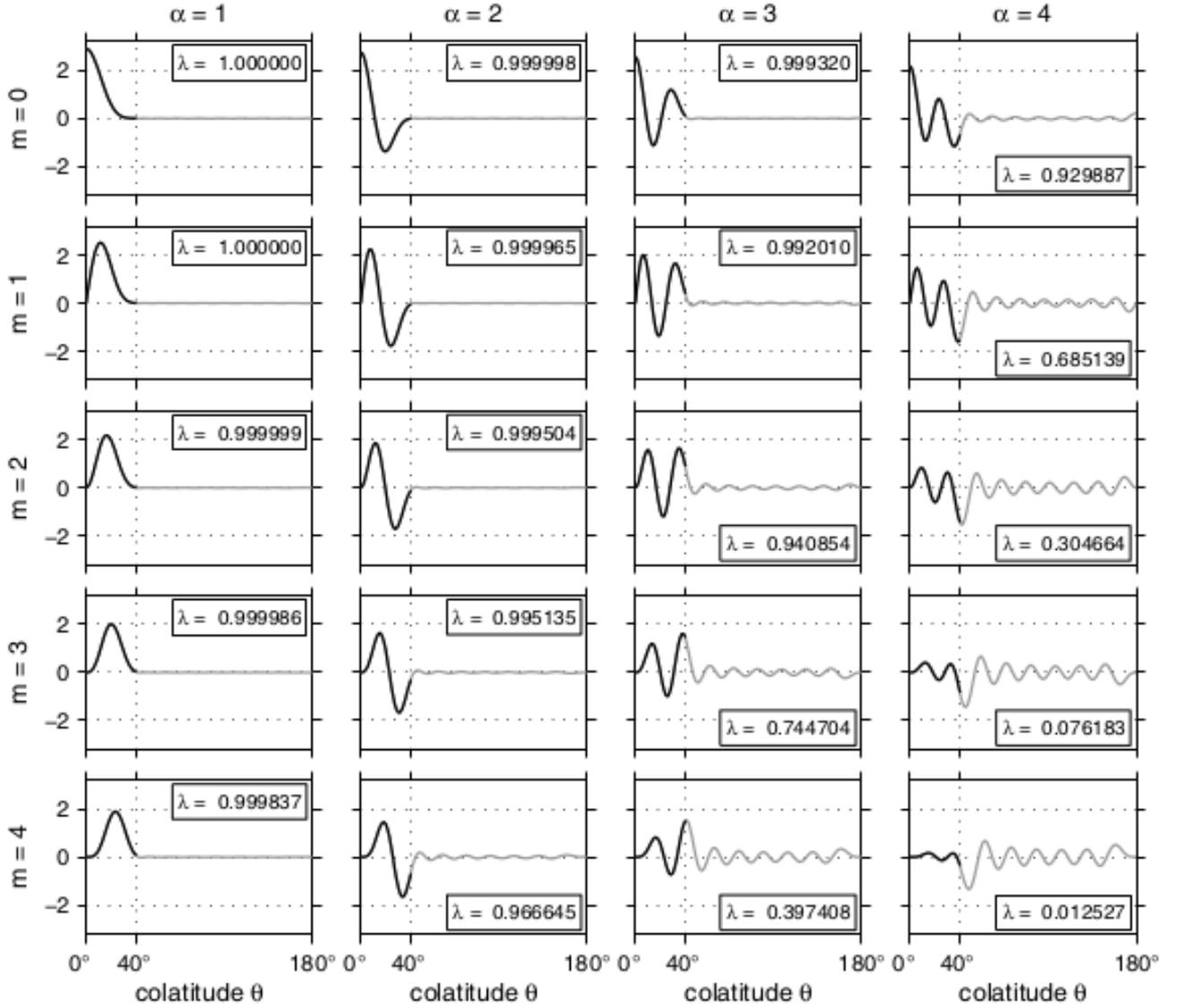


FIGURE 2 – Dépendance colatitudinale des 4 premières fonctions propres du domaine spatial $g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), g_4(\theta)$ d'ordre fixe $m = 0$ (en haut) vers $m = 4$ (en bas). Le rayon de la calotte polaire est $\Theta = 40^\circ$, et le degré harmonique maximal est $L = 18$. Les courbes noires montrent la concentration dans la calotte $0 \leq \theta \leq 40^\circ$; les courbes grises soulignent le leakage (évitements) dans le reste de la sphère, $40^\circ < \theta \leq 180^\circ$. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ exprimant la qualité de la concentration spatiale sont indiquées. Le leakage correspondant dans le domaine spectral est illustré sur la Figure 3.

où, pour un ordre particulier m ,

$$D_W = 2\pi \int_0^\Theta X_{lm} X_{l'm} \sin \theta d\theta. \quad (78)$$

L'intégrale dans l'équation (78) peut être évaluée à l'aide des équations (18)–(19) :

$$D_W = (-1)^m \frac{\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}}{2} \sum_{n=|l-l'|}^{l+l'} \begin{pmatrix} l & n & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & n & l' \\ m & 0 & -m \end{pmatrix} \times [P_{n-1}(\cos \Theta) - P_{n+1}(\cos \Theta)]. \quad (79)$$

Nous rangeons les $L - m + 1$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{L-m+1}$ obtenues en résolvant le

problème des valeurs propres d'ordre fixe (76) de telle façon que

$$1 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{L-m+1} > 0, \quad (80)$$

et nous orthonormalisons les vecteurs propres $(L - m + 1)$ -dimensionnels $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{L-m+1}$ ainsi

$$\mathbf{g}_\alpha^\top \mathbf{g}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_\alpha^\top D \mathbf{g}_\beta = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (81)$$

Les fonctions propres à bande limitée $g_1(\theta), g_2(\theta), \dots, g_{L-m+1}(\theta)$, définies par

$$g(\theta) = \sum_{l=m}^L g_l X_{lm}(\theta), \quad (82)$$

satisfont alors les relations d'orthogonalité colatitudinale

$$2\pi \int_0^\pi g_\alpha g_\beta \sin \theta d\theta = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad 2\pi \int_0^\Theta g_\alpha g_\beta \sin \theta d\theta = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (83)$$

Les fonctions propres optimalement concentrées spatialement $g(\hat{\mathbf{r}})$ pour un m donné sont exprimées en fonction des fonctions d'ordre fixé colatitudinales (82) par

$$g(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{2} g(\theta) \cos m\phi & \text{si } -L \leq m < 0 \\ g(\theta) & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} g(\theta) \sin m\phi & \text{si } 0 < m \leq L. \end{cases} \quad (84)$$

Les quatre fonctions propres les mieux concentrées $g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), g_4(\theta)$, pour les ordres $0 \leq m \leq 4$ sont dessinées sur la Figure 2. Le rayon de la calotte polaire dans cet exemple est $\Theta = 40^\circ$, et le degré harmonique sphérique est $L = 18$. La fonction propre de la première zone ($m = 0$), $g_1(\theta)$, n'a aucun point dans la calotte $0^\circ \leq \Theta \leq 40^\circ$; la seconde, $g_2(\theta)$, en a un, et etc. Les fonctions propres hors zone ($m > 0$) s'évanouissent toutes au pôle Nord, $\Theta = 0^\circ$. Les quatre premières fonctions propres dans la zone, les trois premières fonctions propres $m = 1$ et $m = 2$, et les deux premières $m = 3$ et $m = 4$ sont toutes très bien concentrées ($\lambda > 0.9$), tandis que les quatrièmes $m = 3$ et $m = 4$ fonctions propres montrent un leakage significatif ($\lambda < 0.1$). Les méthodes numériques utilisées pour calculer les résultats montrés ici et permettant la visualisation des résultats sont résumées dans l'appendice A.

5.2 Problème de la décomposition en valeurs propres du domaine spatial

Le problème des valeurs propres entières (51) dans le domaine spatial se décompose également en une série d'équations d'ordre fixe de valeurs propres de Fredholm en une dimension,

$$\int_0^\Theta D(\theta, \theta') g(\theta') \sin \theta' d\theta' = \lambda g(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (85)$$

chacune avec un noyau m -dépendant, séparable, symétrique,

$$D(\theta, \theta') = 2\pi \sum_{l=m}^L X_{lm}(\theta) X_{lm}(\theta'). \quad (86)$$

Les résultats (85) et (86) peuvent soit être obtenus en multipliant la forme de l'indice $D_{ll'} g_{l'} = \lambda g_l$ de l'équation (76) par $X_{lm}(\theta)$ et en faisant la somme sur $m \leq l \leq L$, soit en substituant la

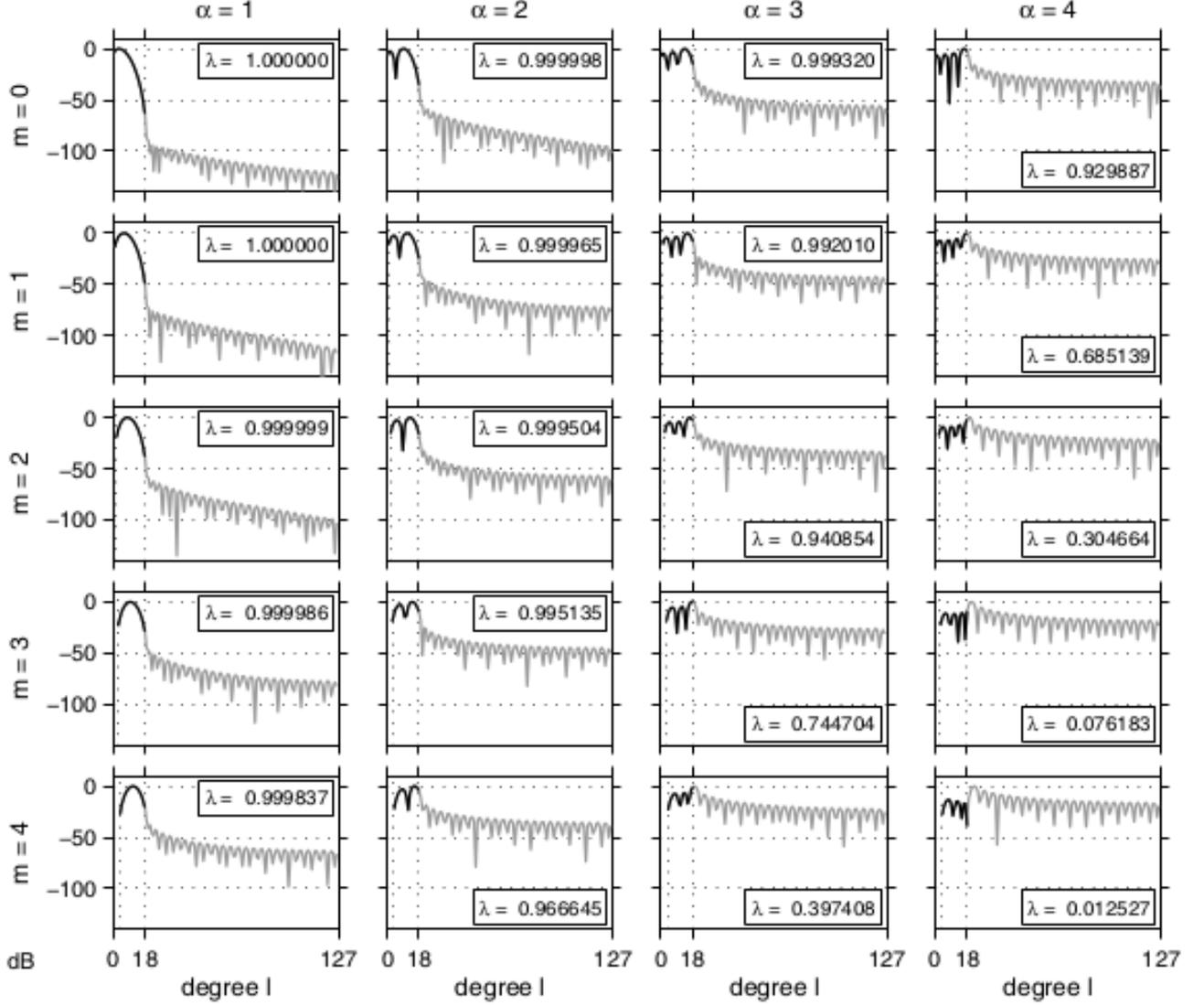


FIGURE 3 – Coefficients au carré h_l^2 des quatre premières fonctions propres spatialement limitées $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, $h_3(\theta)$, $h_4(\theta)$ d'ordre fixe $m = 0$ (en haut) à $m = 4$ (en bas). Le rayon de la calotte polaire est $\Theta = 40^\circ$, et le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$. Les courbes noires montrent la puissance dans l'intervalle de concentration $0 \leq l \leq 18$; les courbes grises montrent la puissance évitée lorsque $19 \leq l \leq 127$. Les valeurs de h_l^2 sont en dB, normalisées à zéro aux maxima individuels. Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ spécifiant la qualité de la concentration spectrale sont indiquées. Les fonctions propres correspondantes à bande limitée, à domaine spectral, sont montrées sur la Figure 2.

représentation (82)–(84) dans l'équation (51), et en utilisant l'orthogonalité des fonctions longitudinales $\dots, \sqrt{2} \cos m\phi, \dots, 1, \dots, \sqrt{2} \sin m\phi, \dots$ sur l'intervalle $0 \leq \phi < 2\pi$. Le problème des valeurs propres d'une matrice $(L - m + 1) \times (L - m + 1)$ (76) peut en retour être dérivé en commençant par l'équation de Fredholm séparable (85), de telle façon que les problèmes d'ordre fixé spectral et spatial sont complètement équivalents. Lorsque l'ordre est fixé, les fonctions propres à espace limité

$$h(\theta) = \begin{cases} g(\theta) & \text{if } 0 \leq \theta \leq \Theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (87)$$

satisfont une équation identique à (85), mais seulement dans la calotte elle-même :

$$\int_0^\Theta D(\theta, \theta') h(\theta') \sin \theta' d\theta' = \lambda h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \Theta. \quad (88)$$

La valeur propre λ est une mesure à la fois de la concentration spatiale de $g(\theta) \in \mathcal{S}_L$ pour $0 \leq \theta \leq \Theta$ et de la concentration spectrale de $h(\theta) \in \mathcal{S}_R$ pour $0 \leq l \leq L$.

La substitution $\mu = \cos \theta$ convertit les équations (85) et (88) en

$$\int_{\cos \Theta}^1 D(\mu, \mu') g(\mu') d\mu' = \lambda g(\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad (89a)$$

$$\int_{\cos \Theta}^1 D(\mu, \mu') h(\mu') d\mu' = \lambda h(\mu), \quad \cos \Theta \leq \mu \leq 1. \quad (89b)$$

Le noyau $D(\mu, \mu')$ peut être simplifié en utilisant l'identité de Christoffel-Darboux (22) :

$$D(\mu, \mu') = \frac{(L - m + 1)!}{2(L + m)!} \left[\frac{P_{L+1,m}(\mu)P_{Lm}(\mu') - P_{Lm}(\mu)P_{L+1,m}(\mu')}{\mu - \mu'} \right], \quad (90)$$

où la règle de L'Hôpital couvre le cas $\mu = \mu'$. Les coefficients harmoniques sphériques h_l^2 des quatre fonctions propres à espace limité les mieux concentrées $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$, $h_3(\theta)$, $h_4(\theta)$ pour $0 \leq m \leq 4$ sont visualisées selon l dans la Figure 3. Le rayon de la calotte $\Theta = 40^\circ$, à bande limitée $L = 18$, et la disposition sont les mêmes que dans la Figure 2. La contribution maximale à la α -ième fonction propre dans la zone ($m = 0$) vient du degré harmonique satisfaisant $\sqrt{l(l+1)} \approx \pi/(\alpha\Theta)$; physiquement, cela correspond au fait de faire s'adapter un nombre entier de longueurs d'onde asymptotiques $2\pi/\sqrt{l(l+1)}$ dans la calotte de diamètre 2Θ .

5.3 Valeurs propres d'ordre fixé significatif

Le nombre de valeurs propres significatives, ou le nombre partiel de Shannon, pour chacun des problèmes de valeurs propres d'ordre fixé (76), (85), (88) ou (89) peuvent être calculés en utilisant n'importe laquelle des formules équivalentes

$$N_m = \sum_{\alpha=1}^{L-m+1} \lambda_\alpha = \sum_{l=m}^L D_{ll} = \int_0^\Theta D(\theta, \theta) d\theta = \int_{\cos \Theta}^1 D(\mu, \mu) d\mu. \quad (91)$$

Nous pouvons réécrire la dernière relation dans l'équation (91) en utilisant l'équation (90) sous la forme

$$N_m = \frac{(L - m + 1)!}{2(L + m)!} \int_{\cos \Theta}^1 [P'_{L+1,m}P_{Lm} - P'_{Lm}P_{L+1,m}] d\mu, \quad (92)$$

où les primes dénotent la différentiation selon μ . La Figure 4 montre les spectres de valeurs propres d'ordre fixé pour $0 \leq m \leq 5$. Le rayon de la calotte est $\Theta = 40^\circ$ et le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$, comme dans les Figures 2 et 3. Les nombres partiels de Shannon N_m , calculés par l'équation (91) et arrondis à l'entier le plus proche, sont montrés. Comme dans le cas du problème classique de Slepian [30; 46; 57], les spectres ont une forme caractéristique étagée, montrant les valeurs propres ($\lambda \approx 1$) significatives et celles ($\lambda \approx 0$) qui sont non significatives séparées par une étroite bande de transition. Le nombre de Shannon (91) fournit une bonne estimation du nombre

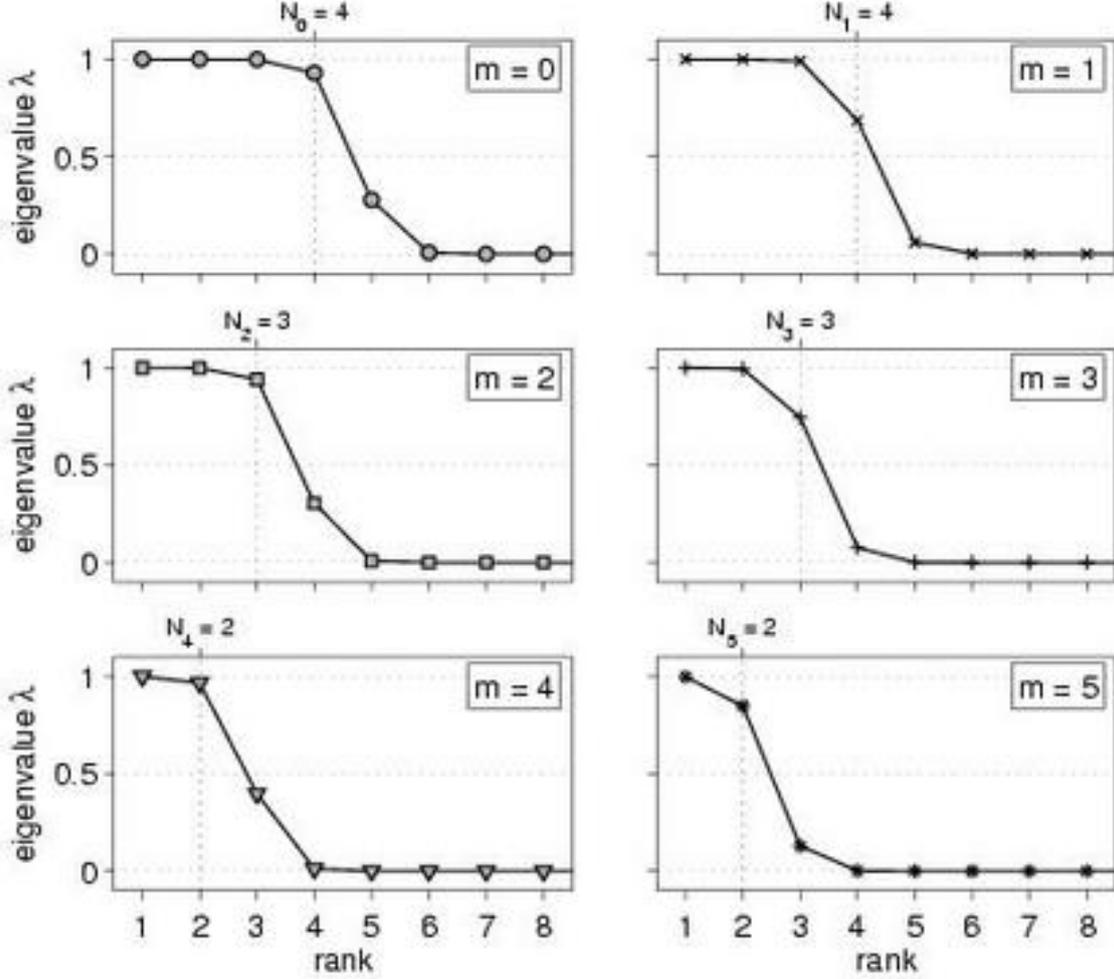


FIGURE 4 – Spectres de valeurs propres d'ordre fixé pour une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe de rayon $\Theta = 40^\circ$. Le degré maximum harmonique sphérique est $L = 18$. Un symbole différent est utilisé pour visualiser λ_α selon le rang α pour chaque ordre $0 \leq m \leq 5$. Le nombre total des valeurs propres d'ordre fixé est $L - m + 1$; seules les huit plus larges (λ_1 à λ_8) sont montrées. Les lignes verticales et les étiquettes en haut spécifient les nombres partiels de Shannon N_m , arrondis à l'entier le plus proche.

de fonctions propres bien concentrées; les N_m premières fonctions propres ont toutes un facteur de concentration excédant $\lambda = 0.5$.

Une fois que les $L + 1$ séquences de valeurs propres d'ordre fixé (80) ont été trouvées, elles peuvent être triées selon le rang d'ordre (45). Le nombre total de valeurs propres significatives est :

$$N = N_0 + 2 \sum_{m=1}^L N_m, \quad (93)$$

où le facteur 2 prend en compte la $\pm m$ dégénérescence. Dans la Figure 5, nous montrons le spectre des valeurs propres réordonnées selon m pour quatre calottes polaires différentes, avec des rayons colatitudinaux $\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$; le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$. Les nombres de Shannon arrondis $N = 3, 11, 24, 42$, sont au milieu du graphique, la partie transitionnelle des spectres séparant grossièrement les solutions en valeurs propres bien concentrées ($\lambda > 0.5$) de celles qui le sont moins bien ($\lambda < 0.5$) dans les quatre cas.

Nous illustrons les sommes de carrés point par point $\sum_\alpha g_\alpha^2(\theta, \phi)$ et $\sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha^2(\theta, \phi)$ dans la Figure 6, pour des calottes polaires de rayons $\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ et une largeur de bande $L = 18$. La

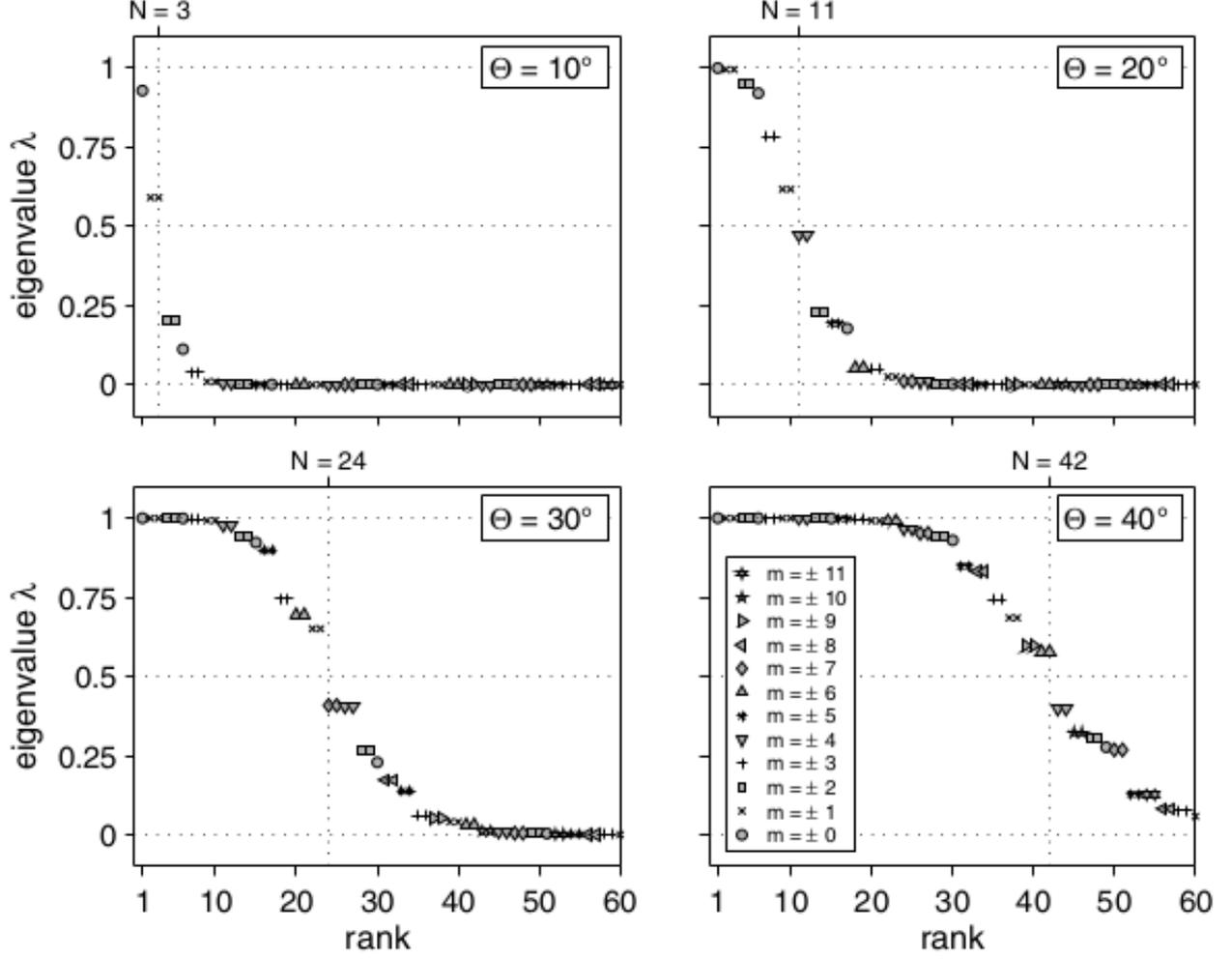


FIGURE 5 – Les spectres dont on a réordonné les valeurs propres (λ_α selon le rang α) pour les calottes symétriques autour de l’axe d’angles $\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ et de degré sphérique harmonique maximum commun $L = 18$. Le nombre total de valeurs propres est $(L + 1)^2 = 361$; seules λ_1 parmi λ_{60} sont montrées. Différents symboles sont utilisés pour visualiser les différents ordres $-11 \leq m \leq 11$; les six premiers symboles sont les mêmes que ceux utilisés dans la Figure 4. Les lignes verticales des grilles et les étiquettes en haut spécifient les nombres de Shannon arrondis.

somme complète non pondérée de $(L + 1)^2$ termes (pointillés) est égale à $N/A = (L + 1)^2/(4\pi)$ sur la sphère complète $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, en accord avec l’équation (65). Les sommes pondérées par les valeurs propres sont, par contraste, concentrées dans la calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$; les lignes pleines ombrées selon différentes nuances de gris distinguent les sommes jusqu’aux $N/2$, N , ou pour tous les $(L + 1)^2$ termes possible. Ce que nous attendions dans l’équation (66) se réalise bien. L’uniformité du recouvrement de la région par la concentration réalisée en utilisant seulement les N premiers cônes propres est un résultat-clé, responsable du succès de la méthode multi-cônes pour l’estimation spectrale [64]. L’utilisation d’un seul cône de données, non oscillant en général perd de l’information aux endroits proches du bord; pourtant, cette information est retrouvée en appliquant les autres cônes orthogonaux. L’énergie des N premiers cônes est proportionnelle à l’énergie originale des données dans la région de concentration, permettant une extraction spatiale uniforme de l’information statistique tout en minimisant le leakage spectral [66].

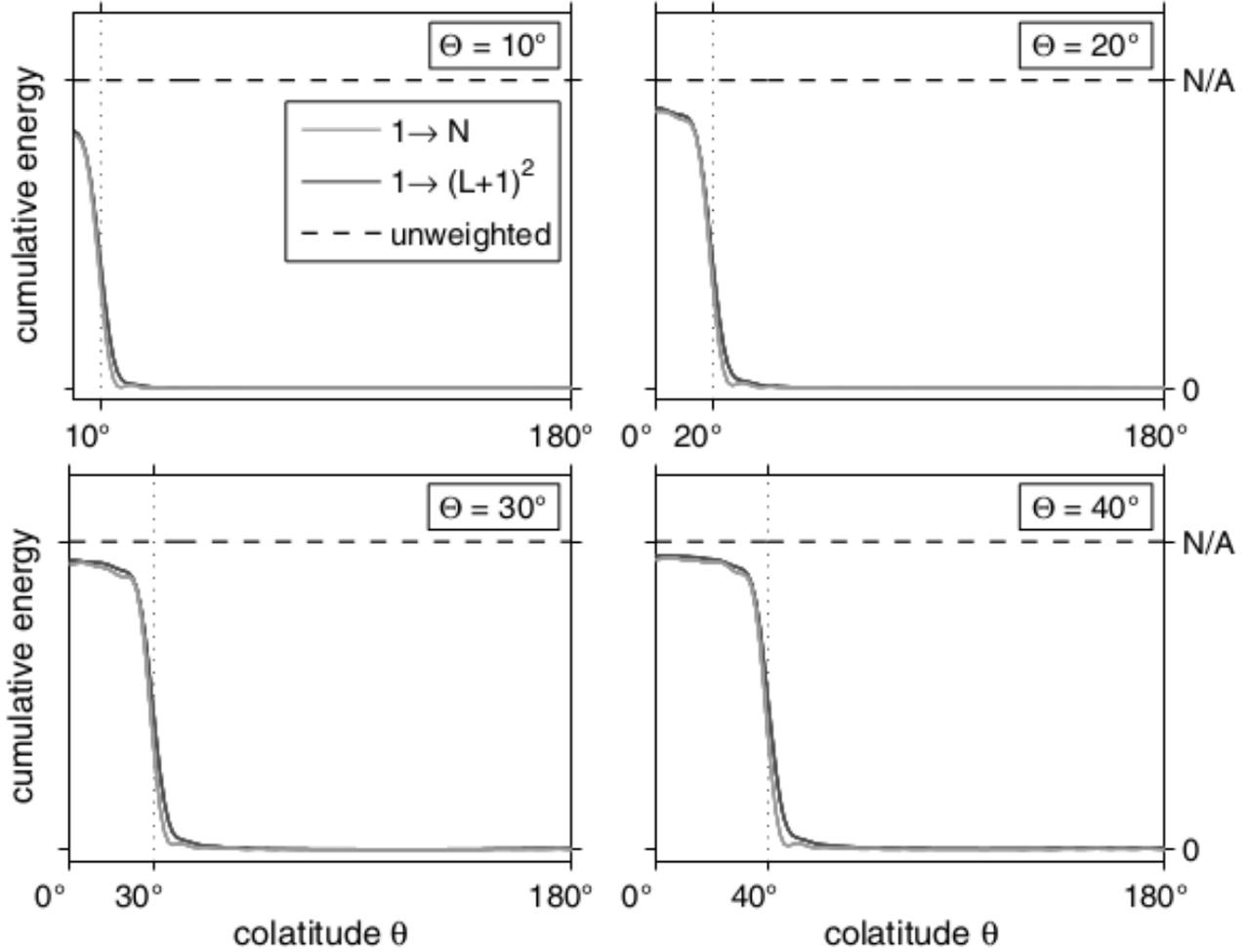


FIGURE 6 – Énergie cumulée des fonctions propres concentrées dans les calottes polaires circulaires symétriques de rayons colatitudinaux $\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$. Le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$; les nombres de Shannon $N = 3, 11, 24, 42$. Les sommes des carrés $g_1^2(\theta, \phi) + g_2^2(\theta, \phi) + \dots$ et $\lambda_1 g_1^2(\theta, \phi) + \lambda_2 g_2^2(\theta, \phi) + \dots$, sont visualisées selon la colatitude θ le long d'un méridien arbitraire fixé ϕ . Les lignes en pointillés montrent les sommes complètes non pondérées des termes $(L+1)^2$, qui convergent vers la valeur constante N/A sur la sphère entière $0 \leq \theta \leq \pi$. Les lignes pleines montrent les sommes partielles pondérées par les valeurs propres de $N/2$ et N termes, et la somme complète de $(L+1)^2$ termes, qui sont concentrés dans la calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$.

Finalement, la Figure 7 montre une visualisation polaire des 32 fonctions propres $g(\theta, \phi)$, définies par les équations (84), qui sont optimalement concentrées dans une calotte polaire de rayon $\Theta = 40^\circ$. Le degré sphérique harmonique maximum est $L = 18$ et le nombre de Shannon est $N = 42$, comme dans les Figures 2–4. Le réordonnancement des valeurs propres en ordre mélangé, comme dans la Figure 5, et tous les doublets dégénérés $\sqrt{2} \cos m\phi, \sqrt{2} \sin m\phi$ sont montrés. Les facteurs de concentration $1 < \lambda < 0.849$ et les ordres $-5 \leq m \leq 5$ de chaque fonction propre sont indiqués. Les couleurs bleu et rouge représentent les valeurs positives et négatives, respectivement; pourtant, le signe de chaque $g(\theta, \phi)$ étant fondamentalement arbitraire, tous les signes pourraient être inversés sans violer les critères de concentration quadratique (38) et (52).

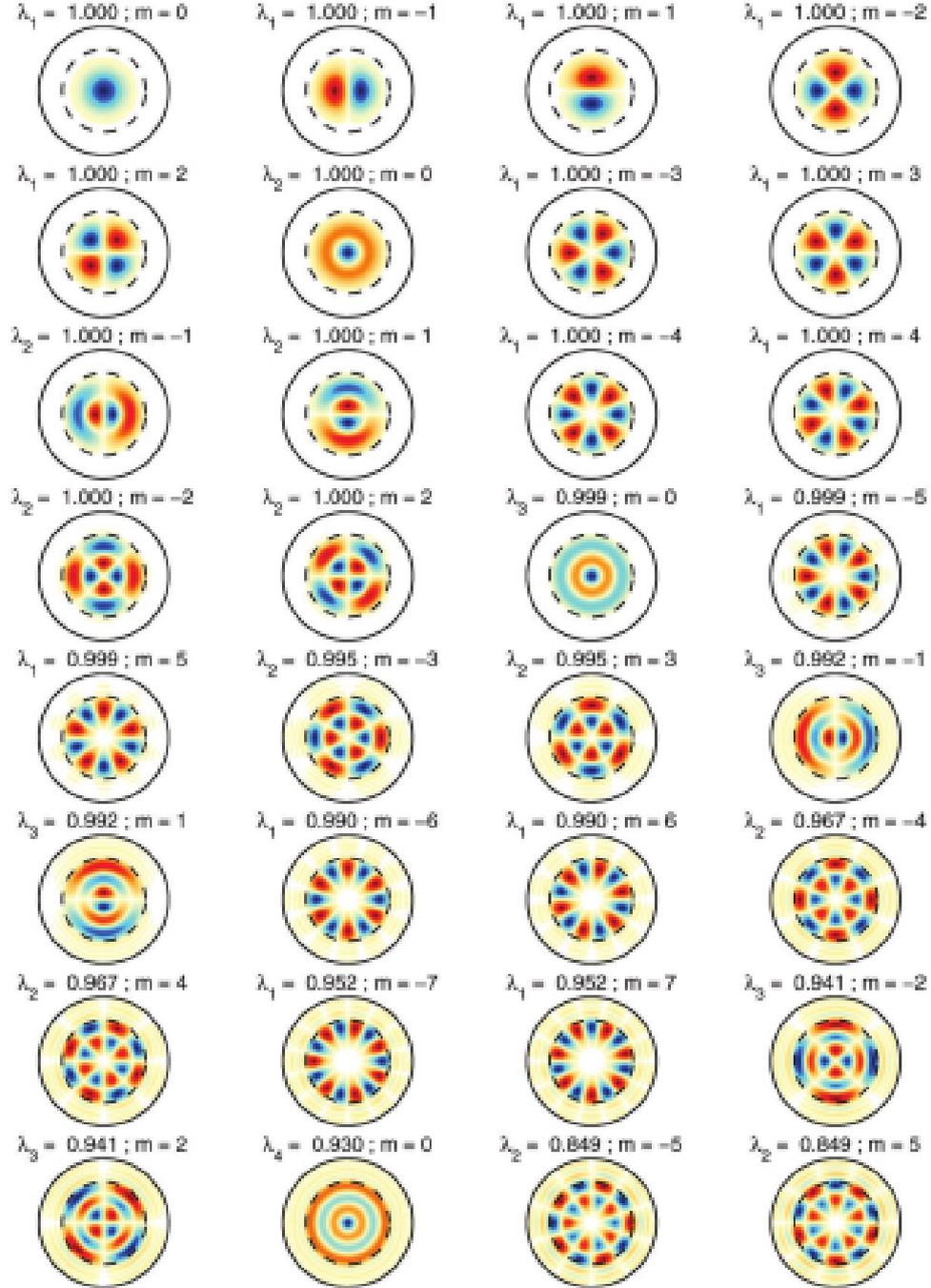


FIGURE 7 – Fonctions propres à bande limitée $g(\theta, \phi)$ qui sont optimalement concentrées dans une calotte de rayon $\Theta = 40^\circ$. Le cercle pointillé montre le bord de la calotte. Le degré harmonique sphérique maximal est $L = 18$, et le nombre de Shannon est $N = 42$. Les indices des valeurs propres λ_α spécifient le rang d'ordre fixé. Les valeurs propres ont été réordonnées selon un ordre différent, avec la fonction propre la mieux concentrée sur la gauche et la 32^{ième} mieux concentrée sur l'extrême droite. Les régions dans lesquelles la valeur absolue est inférieure à un centième de la valeur absolue maximale sur la sphère sont notées en blanc, en bleu pour les positives et en rouge pour les négatives.

5.4 Opérateur différentiel commutant

L'analyse du problème de concentration temps-fréquence à une dimension a été considérablement approfondie par la découverte par sérendipité par Slepian de l'opérateur commutant différentiel sphéroïdal (8). De façon remarquable, il y a aussi un opérateur différentiel, découvert par Grünbaum et al. [19], qui commute avec l'opérateur intégral dans le côté gauche des équations (88) et (89b) [voir également 18]. L'opérateur différentiel de second ordre est donné explicitement par

$$\mathcal{G} = (\cos \Theta - \cos \theta) \nabla^2 + \sin \theta \frac{d}{d\theta} - L(L+2) \cos \theta, \quad (94)$$

où

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{d}{d\theta} - m^2 (\sin \theta)^{-2} \quad (95)$$

est l'opérateur d'ordre fixe de Laplace-Beltrami (15).

Réécrit en fonction de $\mu = \cos \theta$, l'opérateur de Grünbaum (94) est

$$\mathcal{G} = \frac{d}{d\mu} \left[(\cos \Theta - \mu)(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} \right] - L(L+2)\mu - \frac{m^2(\cos \Theta - \mu)}{1 - \mu^2}. \quad (96)$$

Puisque les opérateurs commutant ont les mêmes fonctions propres, nous pouvons trouver les fonctions propres limitées en espace d'ordre fixe $h(\theta)$ ou $h(\mu)$ en résolvant l'équation différentielle des valeurs propres $\mathcal{G}h = \chi h$, où $\chi \neq \lambda$ est la valeur propre de Grünbaum associée.

Pour confirmer que \mathcal{G} dans l'équation (96) est l'opérateur différentiel commutant souhaité, nous devons montrer que

$$\int_{\cos \Theta}^1 \mathcal{G}_\mu D(\mu, \mu') h(\mu') d\mu' = \int_{\cos \Theta}^1 D(\mu, \mu') \mathcal{G}_{\mu'} h(\mu') d\mu', \quad (97)$$

pour une fonction arbitraire limitée en espace $h(\mu)$.

Il y a deux étapes dans l'argument fourni par Grünbaum et al. [19]. Le premier est de montrer que le côté droit de l'équation (97) peut être réécrit en

$$\int_{\cos \Theta}^1 D(\mu, \mu') \mathcal{G}_{\mu'} h(\mu') d\mu' = \int_{\cos \Theta}^1 \mathcal{G}_{\mu'} D(\mu, \mu') h(\mu') d\mu', \quad (98)$$

et le second est de montrer que

$$\mathcal{G}_\mu D(\mu, \mu') = \mathcal{G}_{\mu'} D(\mu, \mu'). \quad (99)$$

Le premier résultat (98) est un exercice évident d'intégration par parties; quelles que soient deux fonctions $\zeta(\mu)$ et $\eta(\mu)$, on peut facilement montrer que

$$\begin{aligned} \int_{\cos \Theta}^1 \zeta(\mathcal{G}\eta) d\mu &= - \int_{\cos \Theta}^1 \left[(\cos \Theta - \mu)(1 - \mu^2) \zeta' \eta' + L(L+2)\mu \zeta \eta \right. \\ &\quad \left. + m^2 (\cos \Theta - \mu)(1 - \mu^2)^{-1} \zeta \eta \right] d\mu = \int_{\cos \Theta}^1 (\mathcal{G}\zeta)\eta d\mu, \end{aligned} \quad (100)$$

où nous avons utilisé une apostrophe (signe prime) pour noter $d/d\mu$.

Bien que cela ne soit pas nécessaire pour la preuve de l'équation (97), nous notons pour des références ultérieures que le résultat (100) est également valide si l'intégration est effectuée sur l'intervalle complet $-1 \leq \mu \leq 1$.

Pour vérifier le second résultat (99), nous utilisons la relation $\nabla^2 P_{lm} = -l(l+1)P_{lm}$ pour écrire

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu, \mu') &= \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{l=m}^L [l(l+1) - L(L+2)](2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_{lm}(\mu) P_{lm}(\mu') \\
&- \frac{1}{2} (1 - \mu^2) \sum_{l=m}^L (2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] \frac{d}{d\mu} P_{lm}(\mu) P_{lm}(\mu') \\
&+ \frac{1}{2} (1 - \mu'^2) \sum_{l=m}^L (2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_{lm}(\mu) \frac{d}{d\mu'} P_{lm}(\mu'). \tag{101}
\end{aligned}$$

Une application de l'identité de dérivation de Legendre (20b) transforme (101) en

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu, \mu') &= \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - \mu') \sum_{l=m}^L [l^2 - (L+1)^2](2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_{lm}(\mu) P_{lm}(\mu') \\
&- \frac{1}{2} (\mu - \mu') \sum_{l=m}^L (2l+1) \left[\frac{(l-m+1)!}{(l+m)!} \right] \\
&\quad \times [P_{l+1m}(\mu) P_{lm}(\mu') - P_{lm}(\mu) P_{l+1m}(\mu')], \tag{102}
\end{aligned}$$

et l'identité de Christoffel-Darboux (22) transforme l'équation (102) en

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu, \mu') &= \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - \mu') \sum_{l=m}^L [l^2 - (L+1)^2](2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_{lm}(\mu) P_{lm}(\mu') \\
&- \frac{1}{2} (\mu - \mu') \sum_{l=m}^L (2l+1) \sum_{n=m}^l (2n+1) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right] P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu'). \tag{103}
\end{aligned}$$

En interchangeant l'ordre de sommation dans la dernière ligne de l'équation (103), nous obtenons

$$\begin{aligned}
(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu, \mu') &= \\
&+ \frac{1}{2} (\mu - \mu') \sum_{l=m}^L [l^2 - (L+1)^2](2l+1) \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right] P_{lm}(\mu) P_{lm}(\mu') \\
&- \frac{1}{2} (\mu - \mu') \sum_{n=m}^L (2n+1) \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right] P_{nm}(\mu) P_{nm}(\mu') \sum_{l=n}^L (2l+1). \tag{104}
\end{aligned}$$

La dernière somme sur n est égale à $(L+1)^2 - n^2$, de telle façon que les deux termes dans l'équation (104) s'éliminent, $(\mathcal{G}_\mu - \mathcal{G}_{\mu'})D(\mu, \mu') = 0$, et la relation de commutation (97) est confirmée.

5.5 Équation de Grünbaum

L'argument ci-dessus montre que nous pouvons calculer les fonctions propres colatitudinales d'ordre fixé limitées en espaces $h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_{L-m+1}(\theta)$ soit en résolvant l'équation intégrale (85) soit en résolvant l'équation différentielle

$$(\cos \Theta - \cos \theta) \nabla^2 h + \sin \theta \frac{dh}{d\theta} - L(L+2) \cos \theta h = \chi h, \quad 0 \leq \theta \leq \Theta. \tag{105}$$

L'équation équivalente en termes de $\mu = \cos \theta$ est de la forme standard de Sturm-Liouville [7] :

$$(ph')' - qh + \chi\rho h = 0, \quad \cos \Theta \leq \mu \leq 1, \quad (106)$$

où les primes dénotent la différentiation selon μ , et où

$$p(\mu) = (\cos \Theta - \mu)(1 - \mu^2), \quad (107a)$$

$$q(\mu) = m^2(1 - \mu^2)^{-1}(\mu - \cos \Theta) - L(L + 2)\mu, \quad (107b)$$

$$\rho(\mu) = 1. \quad (107c)$$

L'équation (106) devrait être résolue en respectant la contrainte que $h(\mu)$ reste fini aux points extrêmes $\mu = \cos \Theta$ et $\mu = 1$.

Le problème variationnel associé est [7]

$$\chi = \frac{\int_{\cos \Theta}^1 (ph'^2 + qh^2) d\mu}{\int_{\cos \Theta}^1 \rho h^2 d\mu} = \text{minimum}. \quad (108)$$

Tous les théorèmes habituels de Sturm-Liouville s'appliquent. En particulier, nous savons que l'équation (106) a un spectre simple, avec un nombre infini de valeurs propres distinctes $\chi_1 < \chi_2 < \dots$, avec un point d'accumulation à l'infini. Les ordonnancements des fonctions propres χ_1, χ_2, \dots et des facteurs de concentration spatio-spectraux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{L-m+1}$ sont inversés, de telle façon que la fonction propre $h_1(\theta)$ associée avec la plus petite valeur propre numérique χ_1 , qui n'a pas de point dans la calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$, soit la fonction propre d'ordre fixe la plus concentrée ; $h_2(\theta)$, la suivante, soit celle qui a exactement un point, et etc. Seules les $L-m+1$ premières fonctions propres $h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_{L-m+1}(\theta)$ avec des valeurs propres non nulles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{L-m+1}$ sont intéressantes dans la plupart des applications. Les fonctions propres restantes $h_{L-m+2}(\theta), h_{L-m+3}(\theta), \dots$ sont dans l'espace nul de l'équation intégrale (88).

5.6 Matrice commutante tridiagonale

Comme dans le cas de (85) et (88), nous sommes libres d'étendre le domaine de l'équation (105) au domaine $0 \leq \theta \leq \pi$ tout entier ; dans ce cas, la fonction inconnue doit être limitée en bande plutôt que limitée en espace :

$$(\cos \Theta - \cos \theta) \nabla^2 g + \sin \theta \frac{dg}{d\theta} - L(L + 2) \cos \theta g = \chi g, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (109)$$

En substituant la représentation harmonique (82) de $g(\theta)$ dans l'équation (109), et en multipliant les deux côtés par $2\pi \sin \theta X_{l'm}(\theta)$, en intégrant sur $0 \leq \theta \leq \pi$, et en invoquant la relation d'orthogonalité (17b), on obtient l'équation des valeurs propres algébriques

$$\mathbf{G} \mathbf{g} = \chi \mathbf{g}, \quad (110)$$

où

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{mm} & \cdots & G_{mL} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{Lm} & \cdots & G_{LL} \end{pmatrix} \quad (111)$$

est la matrice $(L - m + 1) \times (L - m + 1)$ avec pour éléments

$$G_{ll'} = 2\pi \int_0^\pi X_{lm}(\mathcal{G}X_{l'm}) \sin \theta d\theta. \quad (112)$$

L'équation (110) est la version dans le domaine spectral de l'équation différentielle (109) de la même façon que l'équation (76) est l'équivalent dans le domaine spectral de l'équation intégrale des valeurs propres (85).

Comme nous l'avons remarqué, la relation symétrique (100) est valide même si l'intervalle d'intégration est étendu à $0 \leq \theta \leq \pi$, comme dans l'équation (112). Cela montre que la matrice de Grünbaum \mathbf{G} est symétrique :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^\top. \quad (113)$$

De plus, les matrices \mathbf{D} et \mathbf{G} commutent l'une avec l'autre,

$$\mathbf{D}\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{D}, \quad (114)$$

de telle façon qu'elles ont les mêmes vecteurs propres. La version indicée de (114) est

$$\sum_{n=m}^L D_{ln} G_{nl'} = 2\pi \int_0^\Theta X_{lm}(\mathcal{G}X_{l'm}) \sin \theta d\theta = \sum_{n=m}^L G_{ln} D_{nl'}. \quad (115)$$

L'expression intérieure impliquant à la fois l'opérateur \mathcal{G} et l'intégration sur la région de concentration $0 \leq \theta \leq \Theta$ est l'élément ll' ou $l'l$ du produit de matrice symétrique $\mathbf{D}\mathbf{G} = (\mathbf{D}\mathbf{G})^\top$.

La vérification des étapes intermédiaires nécessite d'utiliser la relation d'orthogonalité (17b), l'opérateur identité (99), et à la fois la relation de symétrie (100) et son extension à l'intervalle $0 \leq \theta \leq \pi$.

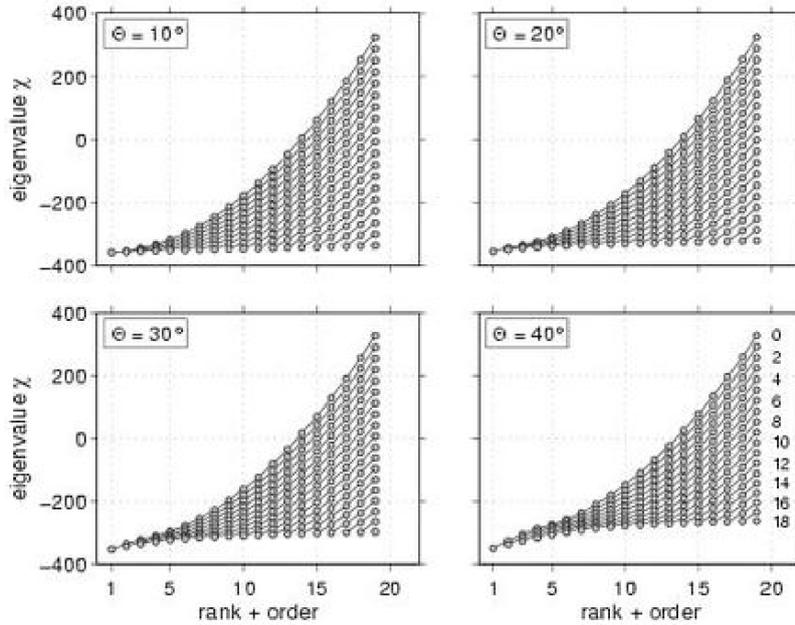


FIGURE 7 : Valeurs propres de Grünbaum ordonnées par le rang pour des calottes polaires de rayons colatitudinaux variables, $\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$, et un degré sphérique maximal $L = 18$. Les séquences séparées de valeurs propres $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{L-m+1}$ pour chaque ordre d'angle $0 \leq m \leq L$ sont reliées par des lignes, avec chaque décalage horizontal par son ordre m pour clarifier le graphique.

Il y a de nombreuses façons d'évaluer les éléments de la matrice (112) ; peut-être que le plus évident est d'utiliser la relation $\nabla^2 X_{lm} = -l(l+1)X_{lm}$ et les identités de Legendre (20). En fait, la matrice

de Grünbaum \mathbf{G} est tridiagonale :

$$G_{ll} = -l(l+1) \cos \Theta, \quad (116a)$$

$$G_{ll+1} = G_{l+1l} = [l(l+2) - L(L+2)] \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}}, \quad (116b)$$

$$G_{ll'} = 0 \quad \text{sinon}, \quad (116c)$$

ce qui est en accord avec le résultat correspondant fourni par Grünbaum et al. [19].

La solution de l'équation (110) offre des moyens particulièrement attractifs de calculer les vecteurs propres $\mathbf{g} \in \mathcal{S}_L$ et ainsi les fonctions propres de la calotte polaire concentrée de manière optimale $g(\theta) \in \mathcal{S}_L$, parce qu'elle nécessite seulement la diagonalisation numérique d'une matrice tridiagonale \mathbf{G} avec des éléments prescrits analytiquement (116), et un spectre de valeurs propres χ qui est garanti d'être simple. Pour illustrer cela, nous montrons le spectre des valeurs propres de Grünbaum pour des calottes polaires symétriques par rapport à l'axe de rayons $\Theta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ et un degré sphérique harmonique maximal $L = 18$ dans la Figure 7. Les valeurs propres rangées pour tout ordre $0 \leq m \leq L$ sont reliées par des lignes, chaque séquence décalée par son ordre pour faciliter la lecture. Ainsi, $L+1$ valeurs propres $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{L+1}$ sont visualisées pour $m = 0$, alors qu'une seule valeur propre χ_1 est dessinée pour $m = L$. L'espacement grossièrement égal et l'absence d'une queue gênante de valeurs proches de zéro, comme dans les Figures 4-5, est évidente.

La diagonalisation de la matrice de Grünbaum \mathbf{G} permet un calcul stable des fonctions de Slepian sphériques optimalement concentrées qui sont limitées en bande à des degrés angulaires très élevés.

Pour illustrer cela, nous montrons dans la Figure 8 les deux premières fonctions propres de zone ($m = 0$) $g_1(\theta), g_2(\theta)$ qui sont optimalement concentrées dans une calotte polaire de rayon $\Theta = 40^\circ$, pour des largeurs de bande croissantes $L = 10, 100, 300, 600$.

Lorsque la largeur de bande croît, les fonctions propres deviennent de plus en plus concentrées près du pôle $\theta = 0^\circ$. Dans une application spectrale multi-cônes, une fraction de plus en plus grande de toute donnée près du bord de la calotte polaire verra son poids diminué par le fenêtrage ; pourtant, avec une largeur de bande augmentant et ainsi le nombre de Shannon, de plus en plus de cônes propres bien concentrés deviennent possible, pour permettre la reconstitution de cette information perdue.

La concentration dans une grande calotte plutôt qu'une petite est un autre problème auquel la méthode de Grünbaum est idéalement adaptée. Pour illustrer cela, nous montrons dans la Figure 9, les quatre premières (g_1, g_2, g_3, g_4) et les quatre dernières ($g_{16}, g_{17}, g_{18}, g_{19}$) fonctions propres de zone pour $m = 0$; une fois de plus pour une calotte polaire de rayon $\Theta = 40^\circ$ et un degré sphérique harmonique maximal $L = 18$.

Comme noté dans la Section 4.3, les fonctions propres qui sont optimalement exclues de la calotte polaire $\Theta = 40^\circ$ sont optimalement concentrées dans la calotte antipodale la plus grande $\Theta = 140^\circ$. Les valeurs propres effectives $\lambda_{16}, \lambda_{17}, \lambda_{18}, \lambda_{19}$ sont de plusieurs ordres de grandeur plus petites que les valeurs listées, ce qui représente simplement le plancher de bruit de nos calculs en double précision. Les valeurs propres exclues ne peuvent jamais être précisément calculées par diagonalisation de la matrice tridiagonale \mathbf{G} ; ce n'est pas non plus possible en arithmétique en double précision (voir l'Appendice A).

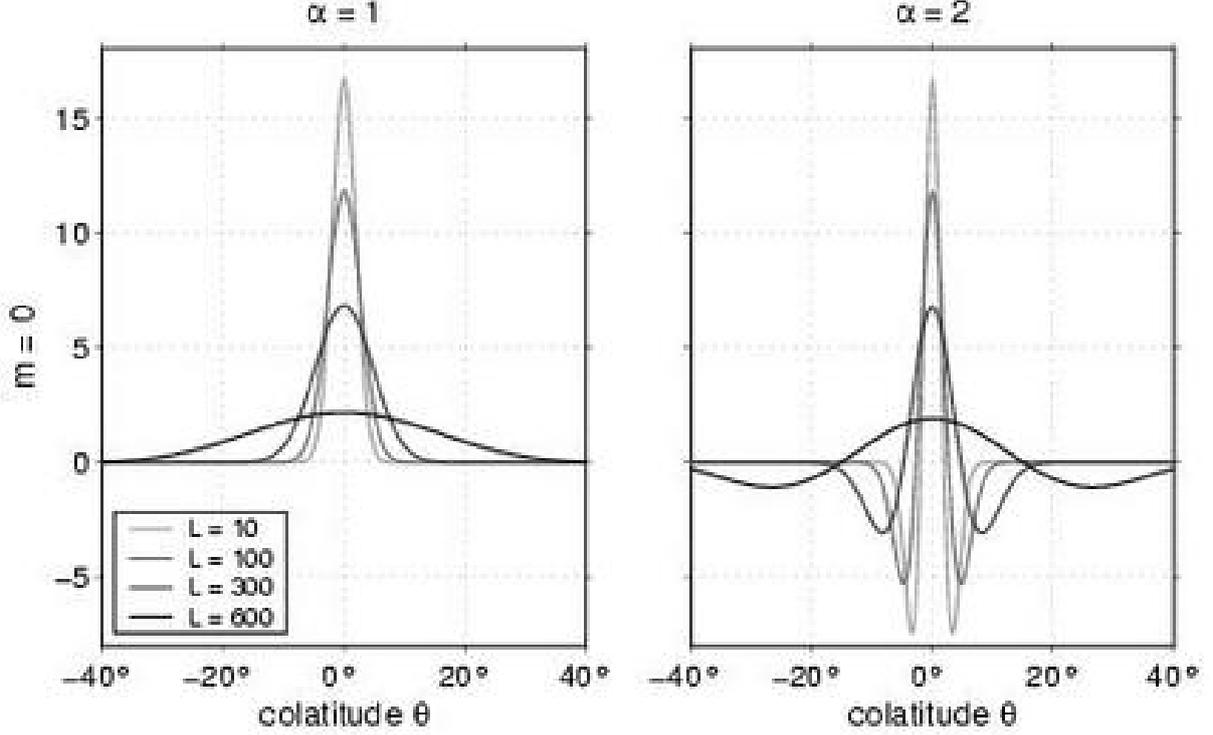


FIGURE 8 – Les fonctions propres de zone ($m = 0$) $g_1(\theta)$ (à gauche) et $g_2(\theta)$ (à droite) qui sont optimalement concentrées dans une calotte polaire de rayon colatitudinal symétrique faisant un angle de $\Theta = 40^\circ$ avec l'axe pour un intervalle de degrés harmoniques sphériques maximaux $L = 10, 100, 300, 600$ (nuances de gris croissantes). L'erreur par l'arrondi empêche un calcul précis des fonctions propres pour $L = 300$ et $L = 600$ par diagonalisation en double précision numérique de la matrice D ; la diagonalisation de la matrice de Grünbaum G évite cet obstacle.

5.7 Formulation de l'opérateur abstrait

La relation de commutation de domaine spatial (97) peut être exprimée en utilisant la notation des opérateurs de la Section 4.4 par

$$(\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R})\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}). \quad (117)$$

Puisque l'opérateur de Grünbaum \mathcal{G} agit seulement sur les fonctions limitées en espace colatitudinal $h(\theta)$, il doit satisfaire

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{G}. \quad (118)$$

En pré-multipliant l'équation (117) par $\mathcal{L}\mathcal{H}$, et en la post-multipliant par $\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}$, et en utilisant la relation (118) et le fait que $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$, on obtient

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}) = (\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L}). \quad (119)$$

L'équation (119) est la formulation de l'opérateur abstrait de la relation de commutation de la matrice du domaine spectral $D\mathcal{G} = \mathcal{G}D$.

Les opérateurs équivalents de l'équation des valeurs propres pour le domaine spectral (110) et pour l'équation des valeurs propres pour le domaine spatial (105) sont

$$(\mathcal{L}\mathcal{H}\mathcal{G}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{L})(\mathcal{L}f) = \chi(\mathcal{L}f), \quad (120a)$$

$$\mathcal{G}(\mathcal{R}f) = \chi(\mathcal{R}f), \quad (120b)$$

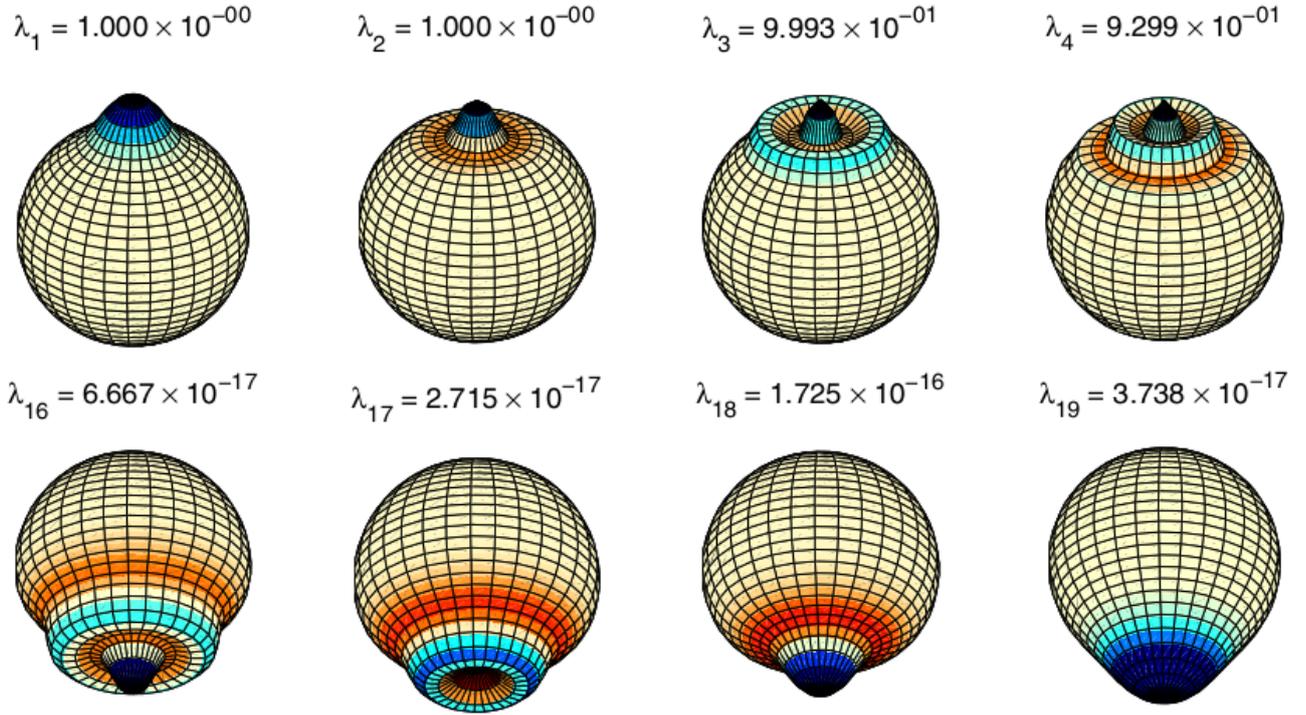


FIGURE 9 – Les fonctions propres zonales optimalement concentrées (ligne du haut) et optimalement exclues (ligne du bas) ($m = 0$) pour une calotte polaire circulaire de rayon colatitudinal $\Theta = 40^\circ$ et de degré harmonique sphérique maximal $L = 18$. Les fonctions propres optimalement exclues ne peuvent pas être calculées précisément par diagonalisation en double précision de la matrice D .

La solution du problème de la concentration pour une calotte polaire de rayon $\Theta = 140^\circ$ donne naissance aux mêmes fonctions propres $g_1(\theta), g_2(\theta), g_3(\theta), g_4(\theta), \dots, g_{16}(\theta), g_{17}(\theta), g_{18}(\theta), g_{19}(\theta)$, mais dans l'ordre inverse.

où $f(\theta)$ est une fonction colatitudinale arbitraire, ni limitée en bande, ni limitée en espace. À cause des relations de commutation (117) et (119), nous sommes libres de résoudre les équations (120) plutôt que les équations de la version d'ordre fixé (72), pour trouver les vecteurs propres à bande limitée $\mathbf{g} = \mathcal{L}f$ et les fonctions propres à espace limité $h(\theta) = \mathcal{R}f(\theta)$.

6 Concentrations continentales

Pour illustrer la théorie pour une région de forme irrégulière, nous considérons le problème de la concentration spatio-spectrale sur 6 régions continentales terrestres, listées dans la table 1 ordonnées selon une taille croissante, avec leurs nombres de Shannon pour différentes largeurs de bandes. L'analyse spectrale des données dans les continents terrestres ou les océans a des applications en géodésie, géophysique et océanographie [e.g., 23; 24; 45; 49]; les multicônes sphériques de Slepian illustrés ici devraient être idéalement adaptés à cette tâche.

La Figure 10 montre les spectres de valeurs propres pour cinq des six régions (Groenland, Australie, Amérique du Nord, Afrique et Eurasie) et quatre largeurs de bande différentes, $L = 6, 12, 18, 24$, correspondant à $(L + 1)^2 = 49, 169, 361, 625$ fonctions propres chacune. Le nombre d'onde de cutoff associé à une limite de la largeur de bande L est $\sqrt{L(L + 1)} \approx L + 1/2$ divisé par le rayon de la Terre [5; 26]; les longueurs d'onde coupées correspondant aux choix $L = 6, 12, 18$ et 24 sont 6200, 3200, 2200 et 1600 kilomètres, respectivement. Seules le continent le plus grand, l'Eurasie, est

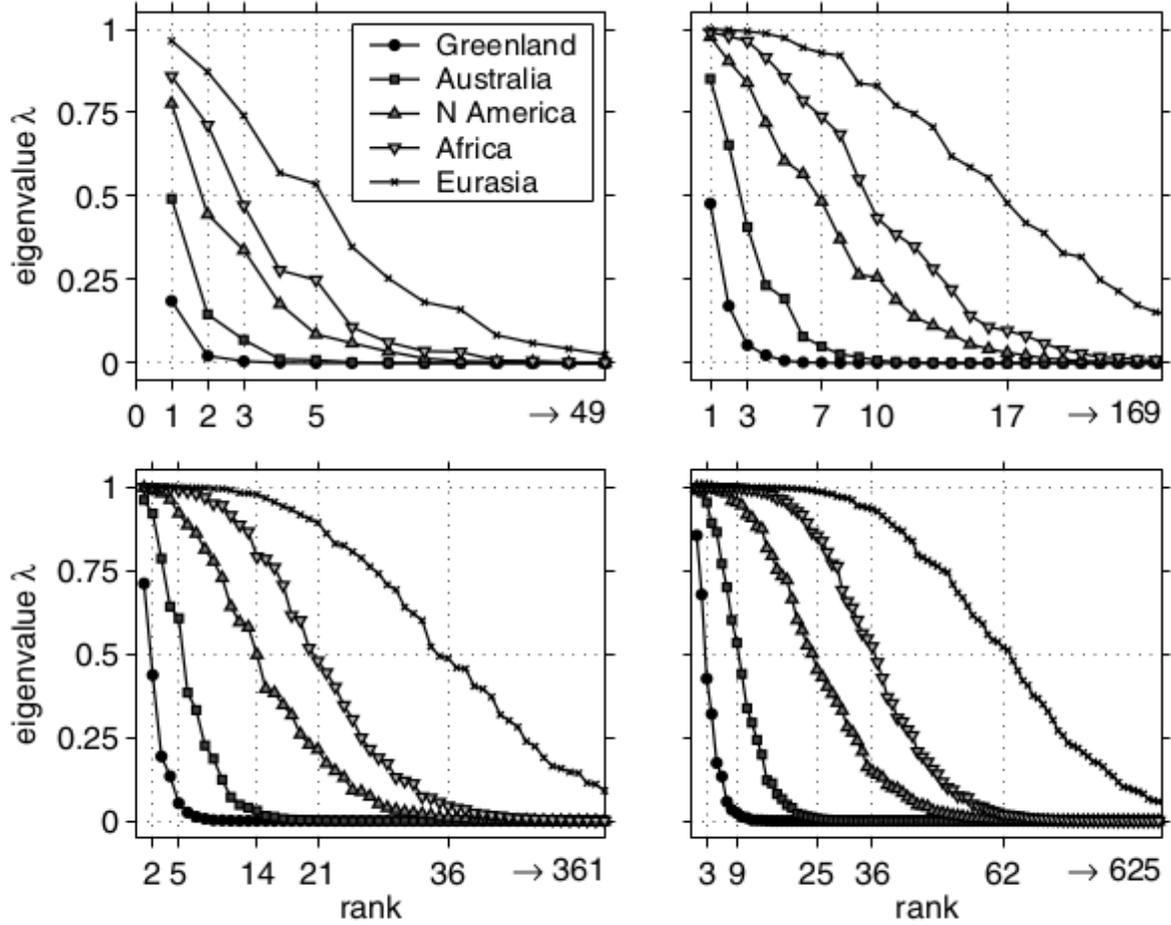


FIGURE 10 – Spectres des valeurs propres pour cinq régions continentales terrestres (Groenland, Australie, Amérique du Nord, Afrique, Eurasie) et quatre degrés harmoniques sphériques maximaux ($L = 6, 12, 18, 24$). Les lignes verticales de la grille et les cinq étiquettes les plus à gauche spécifient les nombres de Shannon arrondis N . Les ordonnées sont tronquées à droite; les nombres à droite des flèches sont les nombres totaux de valeurs propres, $(L + 1)^2 = 49, 169, 361, 625$.

Continental region	Area $A/(4\pi)$ dans %	nombre de Shannon N			
		$L = 6$	$L = 12$	$L = 18$	$L = 24$
Groenland	0.44	0	1	2	3
Australie	1.50	1	3	5	9
Amérique du Sud	3.50	2	6	13	22
Amérique du Nord	3.98	2	7	14	25
Afrique	5.78	3	10	21	36
Eurasie	9.98	5	17	36	62

TABLE 1 – Régions, nombres de Shannon et largeurs de bandes pour le problème de la concentration sur continents.

suffisamment grand pour montrer au moins une fonction propre parfaitement concentrée pour le plus petit degré, $L = 6$, et la plus petite région considérée, le Groenland, est trop étroite pour montrer ne serait-ce qu'une seule fonction propre avec un facteur de concentration λ proche de

l'unité pour le degré le plus grand, $L = 24$. Comme dans le cas de la calotte polaire (Figure 5), les nombres de Shannon arrondis $N = (L + 1)^2 A / (4\pi)$ montrés par les lignes en pointillés verticales séparent grossièrement les fonctions propres avec facteurs de concentration $\lambda > 0.5$ de ceux avec facteurs de concentration $\lambda < 0.5$.

Dans les Figures 11, 12 et 13, nous montrons des vues cartographiques des 12 premières fonctions propres pour $L = 18$: $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \dots, g_{12}(\hat{\mathbf{r}})$ qui sont optimalement concentrées sur l'Australie, l'Amérique du Nord et l'Afrique. La couleur bleu dénote des valeurs positives et la couleur rouge des valeurs négatives (bien que, comme nous l'avons noté, elles puissent être inversées, puisque le signe d'une fonction propre est arbitraire). Les régions dans lesquelles la valeur absolue est moindre qu'un pour cent de la valeur absolue maximale sur la sphère sont blanches.

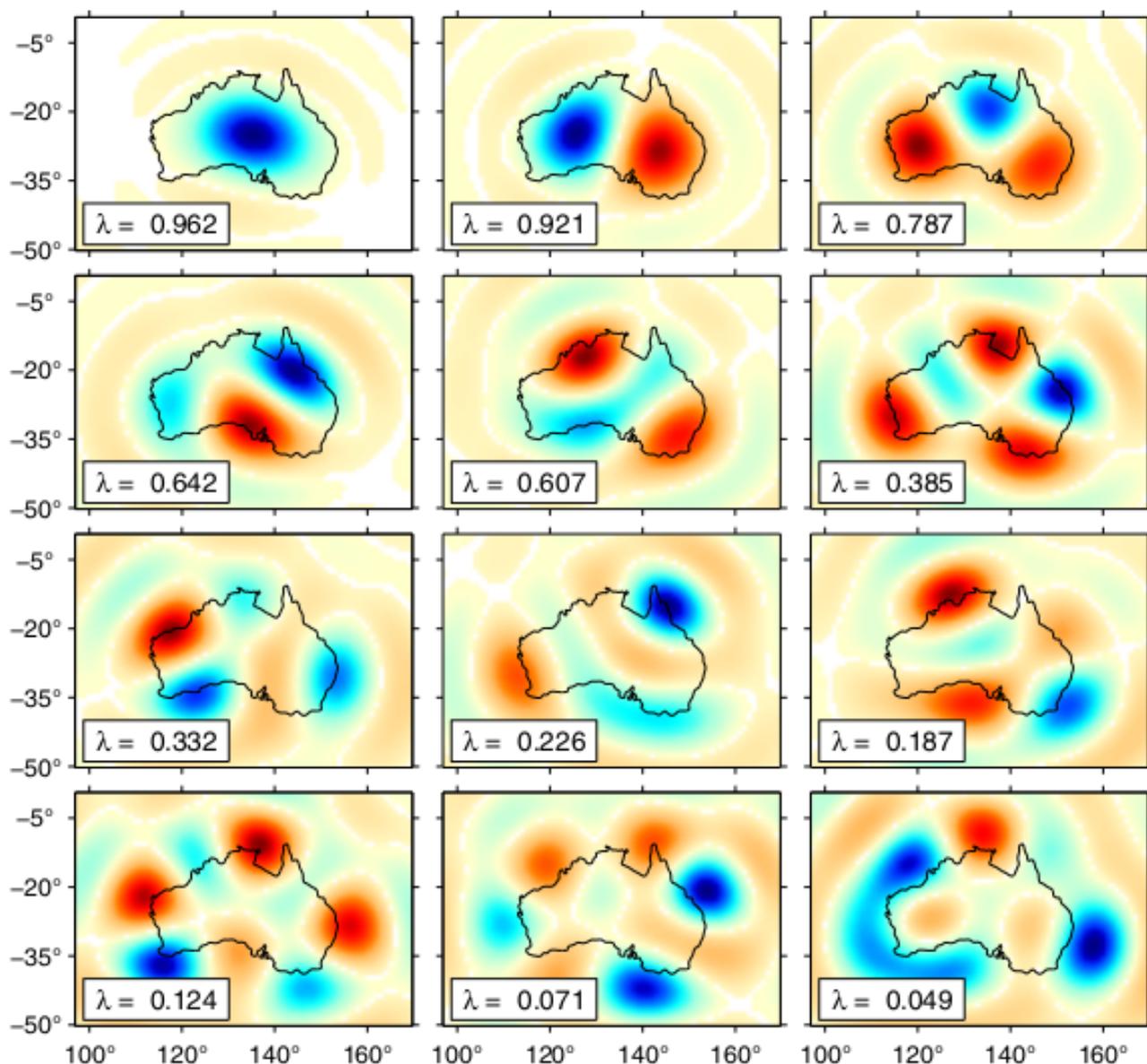


FIGURE 11 – *Fonctions propres à bande limitée $L = 18$: g_1, g_2, \dots, g_{12} qui sont optimalement concentrées sur le continent australien. Les facteurs de concentration $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{12}$ sont indiqués ; le nombre de Shannon est $N = 5$. L'ordre est de gauche à droite et de haut en bas, ordre habituel de lecture.*

Dans le cas de l'Australie (Figure 11) les cinq premières fonctions propres sont raisonnablement bien concentrées dans les frontières continentales ($\lambda_5 = 0.607$) ; pourtant, les facteurs de concentration λ diminuent rapidement ensuite, de telle façon que g_{12} est davantage exclu que concentré ($\lambda_{12} = 0.049$). Avec une largeur de bande limitante $L = 18$, et ainsi un cutoff de longueur d'onde de 2200 kilomètres, il est seulement possible de concentrer $N = 5$ fonctions propres à bande limitée orthogonales g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 dans un continent qui du nord au sud, mesure seulement 1500 kilomètres.

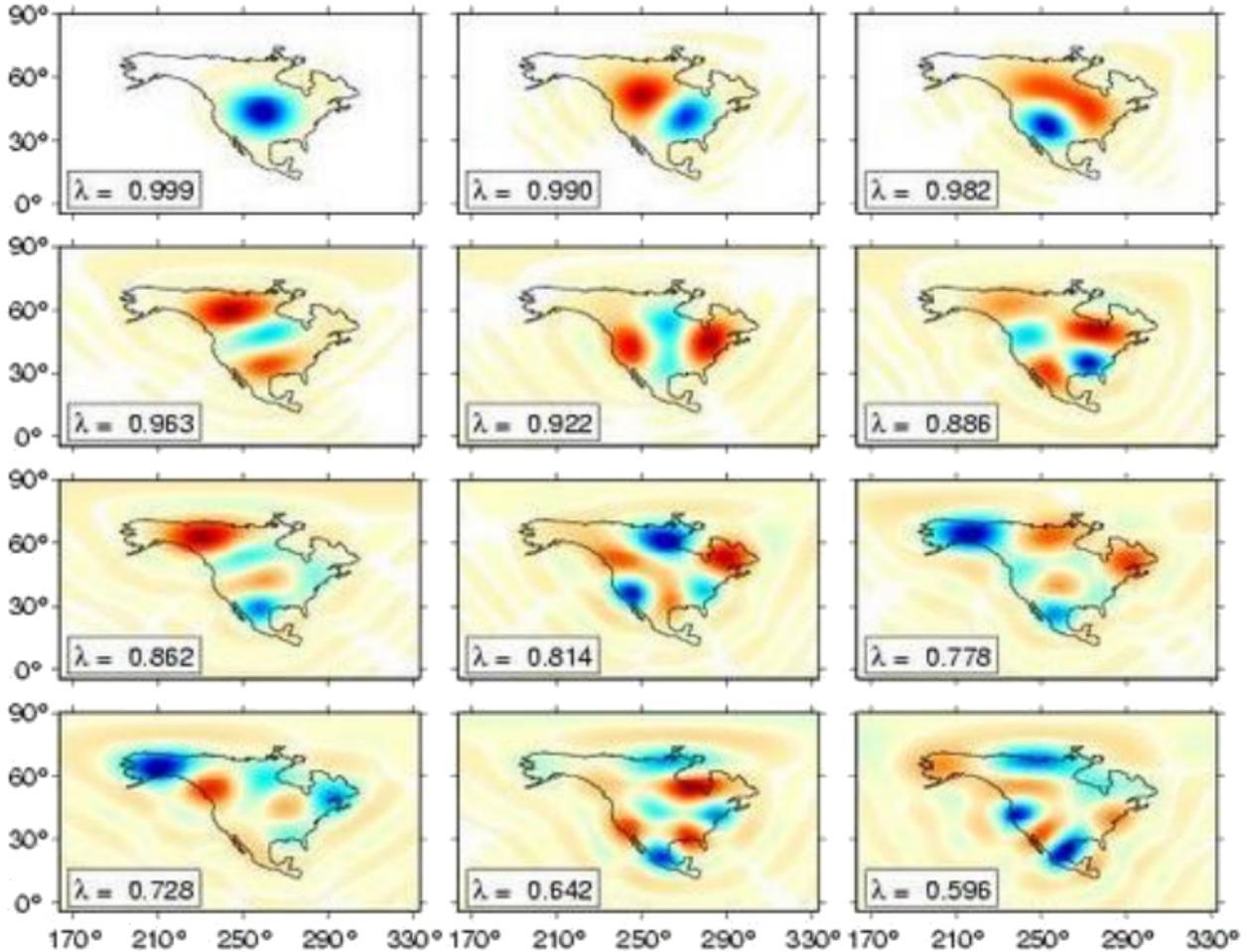


FIGURE 12 – Fonctions propres à bande limitée $L = 18$: g_1, g_2, \dots, g_{12} qui sont optimalement concentrées dans le continent nord-américain. Les facteurs de concentration $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{12}$ sont indiqués ; le nombre de Shannon est $N = 14$. Le modèle de la représentation est le même que pour la Figure 11.

Cette situation est bien améliorée dans le cas du continent nord-américain (Figure 12), qui a une superficie A qui est 2.7 plus grande que celle de l'Australie. En fait, l'Amérique du Nord a $N = 14$ fonctions propres raisonnablement bien concentrées pour $L = 18$, dont seulement les 12 premières sont montrées ici. La première fonction propre g_1 , est à peu près circulaire et centrée sur le milieu du continent, comme dans le cas de l'Australie. Les fonctions propres orthogonales suivantes g_2, g_3, \dots montrent des lobes dans les régions précédemment non découvertes. La ligne de côte nord-américaine est plus irrégulière que celle de l'Australie. Le Québec et les Territoires nord-ouest du Canada sont essentiellement non couverts jusqu'à g_8 , l'Alaska ouest n'est pas couvert correctement jusqu'à g_9 et g_{10} , et la Floride, la basse Californie et le sud du Mexique sont seulement couverts par g_{11} et g_{12} au prix d'un leakage substantiel ($\lambda_{11} = 0.642, \lambda_{12} = 0.596$) en dehors des frontières

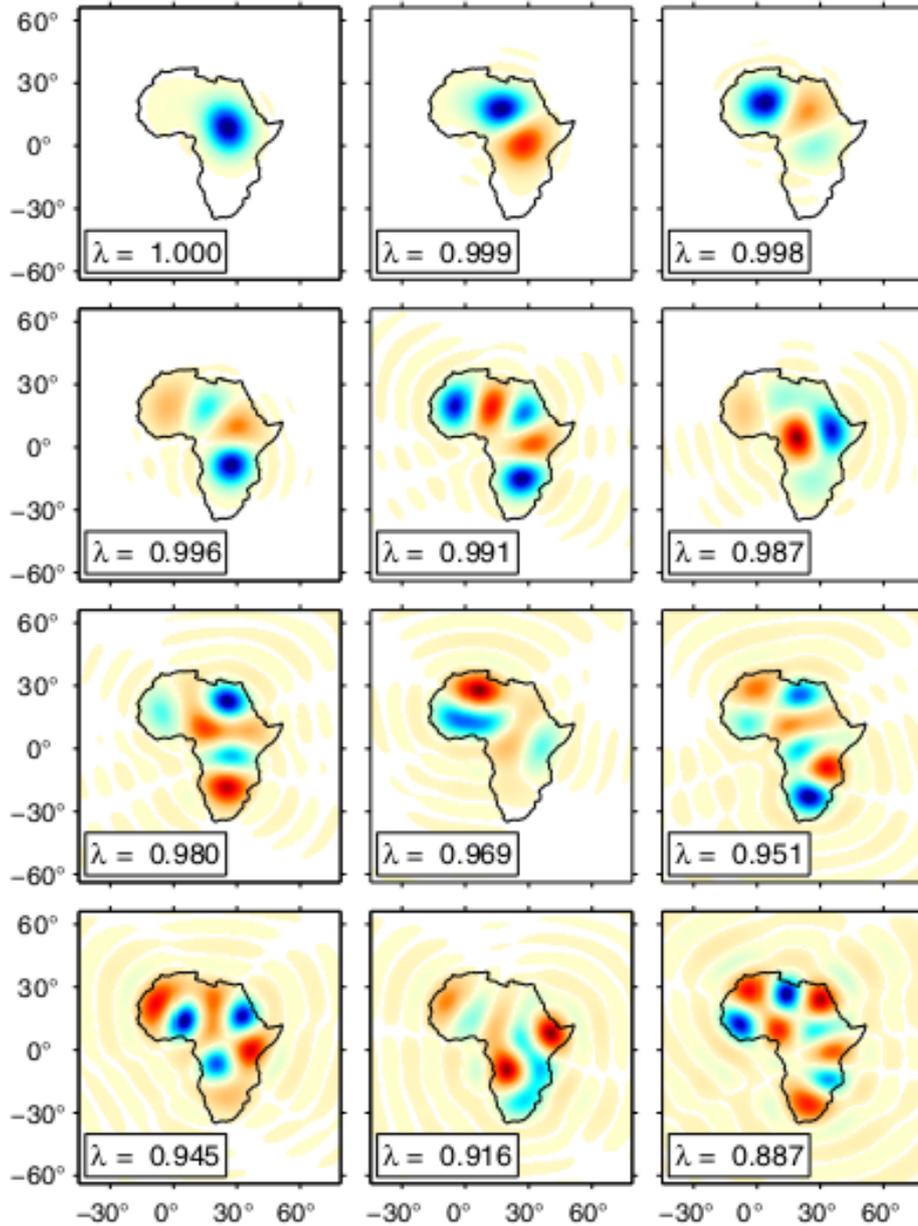


FIGURE 13 – Fonctions propres à bande limitée $L = 18$: g_1, g_2, \dots, g_{12} qui sont optimalement concentrées sur le continent africain. Les facteurs de concentration $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{12}$ sont indiqués ; le nombre de Shannon est $N = 21$. Le modèle de la représentation est le même que pour la Figure 11.

continentales.

L'Afrique (Figure 13), qui a une superficie A qui est 3.9 plus grande que celle de l'Australie, a $N = 21$ fonctions propres raisonnablement bien concentrées pour $L = 18$, la douzième d'entre elles a un facteur de concentration $\lambda_{12} = 0.887$. Une fois encore, g_1 est grossièrement circulaire, et les fonctions propres orthogonales suivantes g_2, g_3, \dots recouvrent successivement les régions précédemment non couvertes. L'Afrique de l'ouest n'est pas couverte par g_1 et g_2 , mais devient raisonnablement couverte par g_3 et g_5 ; en outre, l'Afrique du sud n'est pas couverte jusqu'à g_4 et g_5 . Les autres éléments géographiques deviennent bien couverts avec les fonctions propres de plus en plus oscillantes (e.g., Egypte par g_7 et g_{12}).

La Figure 14 montre la somme des carrés pondérée par les valeurs propres $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} g_{\alpha}^2(\hat{\mathbf{r}})$ des fonctions propres à bande limitée pour $L = 18$ des 6 continents (à l'exception de l'Antarctique). Nous trouvons les fonctions propres $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \dots, g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$ par diagonalisation de la matrice $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ (41) formée en ajoutant les matrices correspondant à chacun des six continents $D_{\text{Eurasia}} + D_{\text{Africa}} + \dots$. L'aire combinée totale est $A/(4\pi) = 25.2\%$, et le nombre de Shannon est $N = 91$; les sommes partielles des $N/4, N/2$ et N premiers termes, ainsi que la somme totale des $(L+1)^2 = 361$ termes, sont montrées. La capacité des N premières fonctions à fournir une couverture uniforme de l'aire cible est évidente; comme dans la Figure 6, la couverture est seulement marginalement améliorée en ajoutant le reste, les "mal" concentrées $(L+1)^2 - N = 250$ termes. À cause de leur petite taille, l'Australie et le Groenland n'apparaissent pas jusqu'aux $1 \rightarrow N/2$ et $1 \rightarrow N$ sommes partielles, respectivement. Même alors, la couverture du Groenland est imparfaite, une conséquence attendue du petit nombre de Shannon pour le Groenland ($N = 2$ pour un degré sphérique harmonique maximal de $L = 18$).

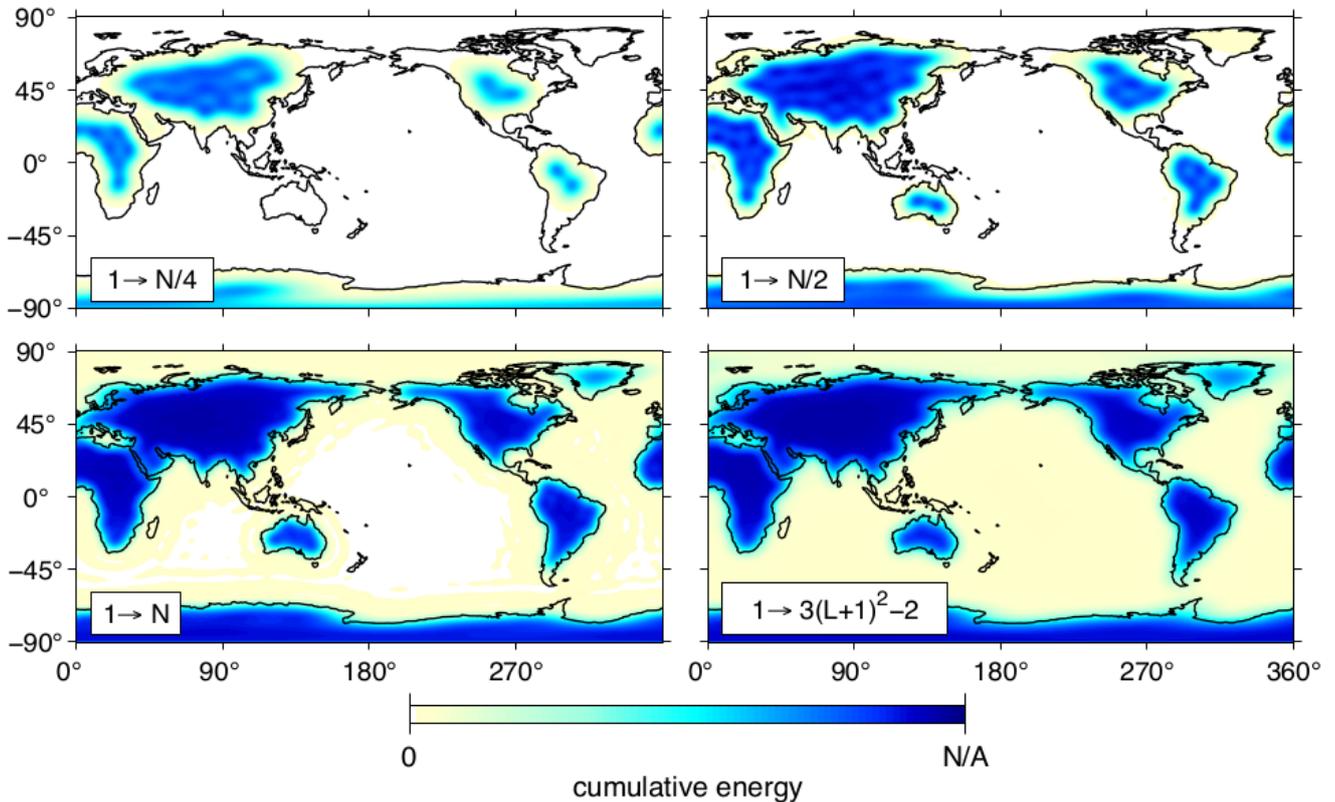


FIGURE 14 – L'énergie cumulée pondérée par les valeurs propres des $N/4, N/2, N$ et $(L+1)^2$ fonctions propres qui sont optimalement concentrées dans l'ensemble des continents (l'Eurasie, l'Afrique, l'Amérique du Nord, l'Amérique du Sud, l'Australie et le Groenland). Le degré sphérique harmonique maximal est $L = 18$; l'aire cumulée fractionnaire est $A/(4\pi) = 25.2\%$; le nombre de Shannon est $N = 91$. Le bleu le plus foncé sur la barre des couleurs correspond à la valeur attendue (66) de la somme. Les régions dans lesquelles la valeur est moins d'un pour cent de la valeur maximale sur la sphère sont blanchies.

7 Échelonnage asymptotique

Comme nous l'avons noté, les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et les fonctions propres convenablement mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ du problème original de concentration de Slepian (6) dépendent seulement du nombre de Shannon $N = 2TW/\pi$. Cette mise à l'échelle par nombre de Shannon est la seule caractéristique importante qui ne se transmet pas du problème à une dimension au problème de concentration spatio-spectrale sur la sphère. Fondamentalement, ce manque de mise à l'échelle est une conséquence du fait qu'il n'est pas possible de rapetisser ou agrandir une région, comme l'Afrique, sur une sphère Ω de rayon fixé $\|\hat{\mathbf{r}}\| = 1$, tout en conservant les relations angulaires entres tous les points intérieurs de la même façon. La mise à l'échelle par nombre de Shannon sur une sphère ne se montre qu'asymptotiquement, pour la limite

$$A \rightarrow 0, \quad L \rightarrow \infty, \quad \text{avec} \quad N = (L+1)^2 \frac{A}{4\pi} \quad \text{tenu fixé.} \quad (121)$$

Pour cette limite d'une petite aire de concentration A et d'une grande largeur de bande $0 \leq l \leq L$, la courbure de la sphère devient négligeable et le problème de la concentration sphérique approche le problème de la concentration sur un plan.

7.1 Approximation de Hilb et formule de la somme de Poisson

Deux résultats sous-tendent la considération de cette limite de la Terre plate (121), que nous considérons dans cette section.

Le premier est l'approximation asymptotique de Hilb pour les fonctions de Legendre [2; 8; 21; 60],

$$X_{lm}(\theta) \approx (-1)^m \sqrt{\frac{l+1/2}{2\pi}} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} J_m[(l+1/2)\theta], \quad 0 \leq \theta \ll \pi, \quad (122)$$

où $J_m(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce et la seconde est la formule de sommation de Poisson tronquée,

$$\sum_{l=0}^L f(l+1/2) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^{L+1} f(k) e^{-2\pi i s k} dk, \quad (123)$$

qui est valide pour une fonction continue arbitraire $f(x)$.

Pour vérifier la relation (123), nous commençons avec la représentation en série de Fourier de $f(x)$ sur l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(u) e^{is(x-u)} du. \quad (124)$$

En posant $x \rightarrow x + 2\pi l$ dans l'équation (124) et en sommant selon $0 \leq l \leq L$, on aboutit à

$$\sum_{l=0}^L f(x + 2\pi l) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_0^{(L+1)2\pi} f(u) e^{is(x-u)} du, \quad (125)$$

où nous avons translaté l'intervalle d'intégration pour chaque terme par $2\pi l$ et utilisé la périodicité de 2π de l'exponentielle. En divisant l'argument par 2π , et en substituant $k = u/(2\pi)$, et en posant $x = \pi$, nous obtenons l'identité souhaitée (123).

7.2 Équation intégrale mise à l'échelle pour une région arbitraire

Une application à la fois de l'approximation de Hilb (122) et de la formule de sommation de Poisson (123) nous permet d'écrire le noyau de Fredholm $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$ dans l'équation (51) sous la forme

$$\begin{aligned} D(\Delta) &= \sum_{l=0}^L \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\cos \Delta) \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Delta}{\sin \Delta}} \sum_{l=0}^L (l+1/2) J_0[(l+1/2)\Delta] \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Delta}{\sin \Delta}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s \int_0^{L+1} J_0(k\Delta) e^{-2\pi i s k} k dk. \end{aligned} \quad (126)$$

En substituant $k = (L+1)p$ et en prenant la limite $L \rightarrow \infty, \Delta \rightarrow 0$, avec la limite $L\Delta$ maintenue fixe, l'équation (126) se réduit à

$$D(\Delta) \approx \frac{(L+1)^2}{2\pi} \int_0^1 J_0[(L+1)p\Delta] p dp = \frac{(L+1) J_1[(L+1)\Delta]}{2\pi\Delta}, \quad (127)$$

où nous avons fait l'approximation $\Delta/\sin \Delta \approx 1$, et utilisé le lemme de Riemann-Lebesgue [43] pour éliminer les termes $s \neq 0$ entraînant les facteurs oscillants les plus élevés $e^{-2\pi i s(L+1)p}$. Pour la limite $x \rightarrow 0$, le rapport $J_1(x)/x$ tend vers $1/2$, de telle façon que la limite lorsque Δ tend vers 0 du noyau (127) est $D(0) = (L+1)^2/(4\pi)$, ce qui garantit que le nombre de Shannon, ou la somme des valeurs propres (59), est toujours donné dans cette approximation asymptotique par

$$N = \int_R D(0) d\Omega = (L+1)^2 \frac{A}{4\pi}. \quad (128)$$

Pour obtenir une version mise à l'échelle de l'équation (51) dépendant seulement du nombre de Shannon N , nous utilisons l'approximation (127) pour le noyau $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$, et nous introduisons les transformations des variables dépendantes et indépendantes

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{4\pi}{A}} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{x}' = \sqrt{\frac{4\pi}{A}} \hat{\mathbf{r}}', \quad \psi(\mathbf{x}) = g(\hat{\mathbf{r}}), \quad \psi(\mathbf{x}') = g(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (129)$$

Les coordonnées mises à l'échelle \mathbf{x}, \mathbf{x}' sont les projections des points $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}' \in \Omega$ sur une grande sphère Ω_* de rayon au carré $\|\mathbf{x}\|^2 = 4\pi/A$.

La distance géodésique entre les points mis à l'échelle $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \Omega_*$ et l'aire différentielle de la surface sur Ω_* sont

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\frac{4\pi}{A}} \Delta \quad \text{et} \quad d\Omega_* = \frac{4\pi}{A} d\Omega. \quad (130)$$

En effectuant les substitutions (129)–(130), les équations (51) et (127) se réduisent à

$$\int_{R_*} D_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}) d\Omega'_* = \lambda \psi(\mathbf{x}), \quad (131)$$

où R_* est la projection de la région de concentration R sur la sphère Ω_* , et

$$D_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\sqrt{N}}{2\pi} \frac{J_1(\sqrt{N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \quad (132)$$

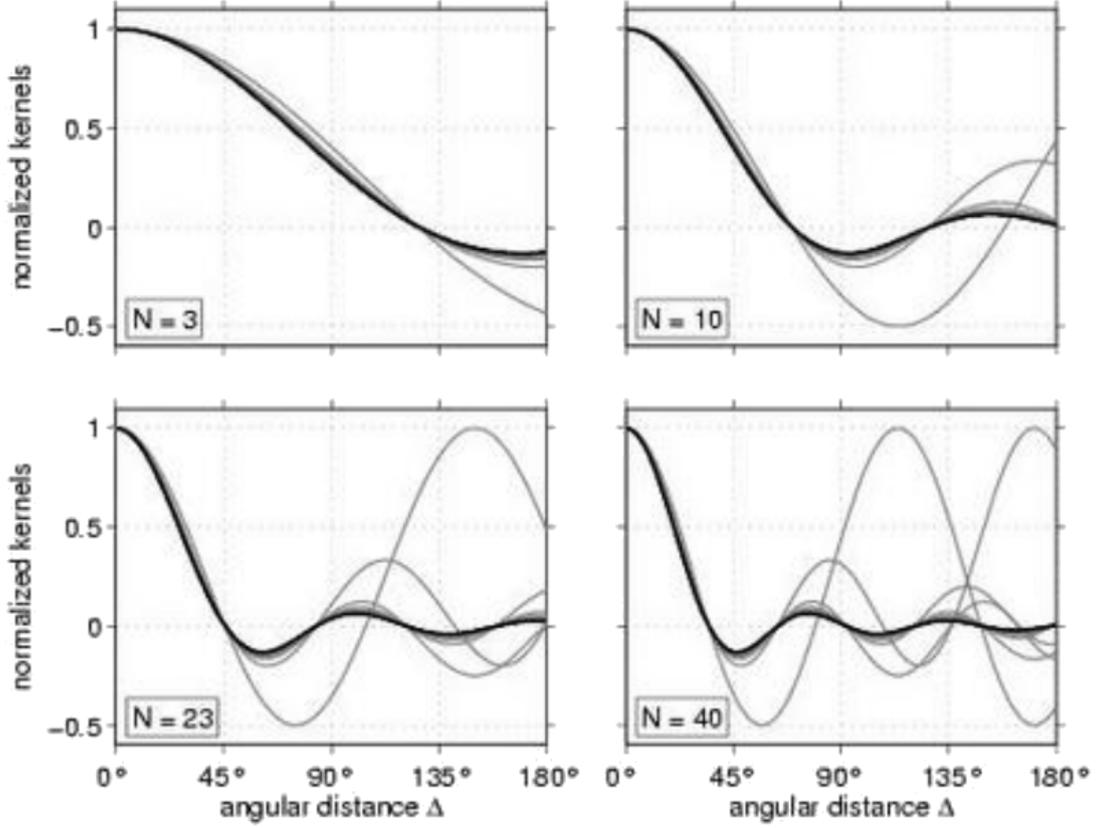


FIGURE 15 – Comparaison des noyaux mis à l'échelle exacts (134) avec l'approximation asymptotique de la Terre plate (135) (en noir). Le nombre de Shannon $N = 3, 10, 23, 40$ est gardé constant dans chacun des quatre échantillons, et la largeur de bande utilisée pour calculer les noyaux mis à l'échelle exacts varie entre $L = 1$ (adaptation la plus mauvaise) et $L = 100$ (meilleure adaptation)

est le noyau de Fredholm symétrique, dépendant de N .

Les équations (131)–(132) sont les analogues sphériques de l'équation en une dimension aux valeurs propres mises à l'échelle (6). Les valeurs propres asymptotiques $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et les fonctions mises à l'échelle associées $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots$ dépendent du degré maximal L et de l'aire A seulement à travers le nombre de Shannon $N = (L + 1)^2 A / (4\pi)$. Comme dans le cas des équations (51) et (55), nous sommes libres de résoudre (131)–(132) soit sur la totalité de Ω_* , auquel cas les fonctions propres $\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots$ sont en bande limitée, ou bien, seulement dans la région de concentration R_* , auquel cas elles sont à espace limité. On est prêt à vérifier que la mise à l'échelle n'a pas d'effet sur la somme des valeurs propres, dans la mesure où

$$N = \int_{R_*} D_*(0) d\Omega_* = \frac{N}{4\pi} \int_{R_*} d\Omega_* = N. \quad (133)$$

Nous montrons dans l'appendice B que le problème des valeurs propres mises à l'échelle (131)–(132) est identique à celui de contrôler le problème de la concentration en deux dimensions sur un plan.

Les considérations ci-dessus montrent que pour la limite (121), nous nous attendons à ce que le

noyau exact de Fredholm (50), évalué sur Ω_* et normalisé par sa valeur à décalage nul,

$$\frac{D(\sqrt{4\pi/A}\Delta)}{D(0)} = \frac{1}{(L+1)^2} \sum_{l=0}^L (2l+1) P_l \left(\cos \sqrt{\frac{4\pi}{A}} \Delta \right), \quad (134)$$

soit approximé par le noyau asymptotique similairement normalisé

$$\frac{D_*(\Delta)}{D_*(0)} = \frac{2J_1(\sqrt{N}\Delta)}{\sqrt{N}\Delta}. \quad (135)$$

La qualité de cette approximation asymptotique vers le noyau et la mise à l'échelle associée à la limite de la Terre plate sont illustrés sur la Figure 15. Dans les quatre exemples montrés, avec les nombres de Shannon $N = 3, 10, 23, 40$, l'approximation est excellente même pour des distances angulaires aussi grandes que $\Delta \approx 135^\circ$, une fois que le degré harmonique sphérique excède $L = 3-4$.

7.3 Équation des valeurs propres mises à l'échelle pour une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe

La version asymptotique ‘‘Terre plate’’ du problème des valeurs propres colatitudinales de rang fixé (85) peut être obtenue de deux manières différentes : soit par l'application d'une approximation de Hilb (122) et la formule de sommation de Poisson (123) au noyau $D(\theta, \theta')$ donné dans l'équation (86), soit en utilisant le théorème d'addition pour les fonctions de Bessel [27],

$$J_0(k\Delta) = J_0(k\theta)J_0(k\theta') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(k\theta)J_m(k\theta') \cos m(\phi - \phi'), \quad (136)$$

la représentation (84) de $g(\theta, \phi)$, et l'orthonormalité des fonctions longitudinales $\dots, \sqrt{2} \cos m\phi, \dots, 1, \dots, \sqrt{2} \sin m\phi, \dots$ sur l'intervalle $0 \leq \phi \leq 2\pi$ pour décomposer les équations (51) et (127) en une série de problèmes individuels de valeurs propres, un pour chaque ordre $0 \leq m \leq L$. En utilisant l'une ou l'autre méthode, nous trouvons que l'équation (85) peut être approximée pour la limite (121) par

$$\int_0^\Theta D(\theta, \theta') g(\theta') \theta' d\theta' = \lambda g(\theta), \quad (137)$$

où

$$D(\theta, \theta') = (L+1)^2 \int_0^1 J_m[(L+1)p\theta] J_m[(L+1)p\theta'] p dp. \quad (138)$$

Il est pratique dans l'instance courante d'approximer l'aire de la petite calotte polaire par $A = 2\pi(1 - \cos \Theta) \approx \pi\Theta^2$, et d'introduire des coordonnées mises à l'échelle qui sont légèrement différentes de celles dans les équations (129), notamment

$$x = \theta/\Theta, \quad x' = \theta'/\Theta, \quad \psi(x) = g(\theta), \quad \psi(x') = g(\theta'). \quad (139)$$

Cela amène à un problème de valeurs propres mis à l'échelle d'ordre fixé,

$$\int_0^1 D_*(x, x') \psi(x') x' dx' = \lambda \psi(x), \quad (140)$$

avec un noyau associé

$$D_*(x, x') = 4N \int_0^1 J_m(2\sqrt{N}px) J_m(2\sqrt{N}px') p dp, \quad (141)$$

dont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et les fonctions propres associées mises à l'échelle $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ dépendent du degré harmonique sphérique maximal L et du rayon de la calotte Θ seulement à travers le nombre de Shannon de la petite calotte polaire $N = \frac{1}{4}(L+1)^2\Theta^2$.

Bien que les relations de mise à l'échelle de la calotte polaire (140)–(141) soient uniquement valides dans la limite asymptotique $L \rightarrow \infty, \Theta \rightarrow 0$, l'approximation est excellente même pour des largeurs de bande modérées L et des rayons de calotte modifiables Θ .

Pour un nombre de Shannon fixé $N = 40$, un degré maximal dans le domaine $25 \leq L \leq 40$, et par conséquent un rayon de calotte $\Theta = 2\sqrt{N}/(L+1)$ dans le domaine $29^\circ \geq \Theta \geq 18^\circ$, l'accord entre les fonctions propres mises à l'échelle d'ordre fixe est toujours respecté avec un tout petit pourcentage d'écart. En principe, les résultats asymptotiques (140)–(141) devraient permettre la détermination d'approximations des fonctions propres de la calotte polaire $g(\theta)$ pour des valeurs variables de L et Θ en mettant à l'échelle un catalogue pré-calculé de fonctions propres pour N fixé. En pratique, la construction et la diagonalisation de la matrice tridiagonale de Grünbaum (116) est si évident et efficace qu'il est préférable de simplement calculer les fonctions propres optimalement concentrées $g(\theta)$ exactement.

7.4 Nombre de Shannon d'ordre fixe asymptotique

L'approximation asymptotique des valeurs propres significatives associées à un ordre donné m est

$$\begin{aligned}
N_m &= \int_0^1 D_*(x, x) x dx \\
&= 4N \int_0^1 \int_0^1 J_m^2(2\sqrt{N} px) p dp x dx \\
&= +2N \left[J_m^2(2\sqrt{N}) + J_{m+1}^2(2\sqrt{N}) \right] \\
&\quad - (2m+1)\sqrt{N} J_m(2\sqrt{N}) J_{m+1}(2\sqrt{N}) \\
&\quad - \frac{m}{2} \left[1 - J_0^2(2\sqrt{N}) - 2 \sum_{n=1}^m J_n^2(2\sqrt{N}) \right]. \tag{142}
\end{aligned}$$

La relation (93) entre le nombre total N de valeurs propres significatives et le nombre N_m associé avec chaque ordre m est préservée dans cette approximation asymptotique, dans la mesure où

$$\begin{aligned}
N &= N_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} N_m \\
&= 4N \int_0^1 \int_0^1 \left[J_0^2(2\sqrt{N} pq) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(2\sqrt{N} pq) \right] p dp x dx \\
&= 4N \int_0^1 \int_0^1 p dp x dx = N. \tag{143}
\end{aligned}$$

Dans la Figure 16, nous comparons les nombres de Shannon exacts pour un ordre fixé N_m , calculés par l'intégration numérique de l'équation de Gauss-Legendre (92), avec le résultat asymptotique (142), pour les mêmes valeurs de $N = 3, 10, 23, 40$ et $1 \leq L \leq 100$ comme dans la Figure 15.

Le nombre de valeurs propres significatives pour $m = 0$ peut même être simplement approximé par $N_0 \approx 2\sqrt{N}/\pi \approx (L+1)\Theta/\pi$, comme cela est montré.

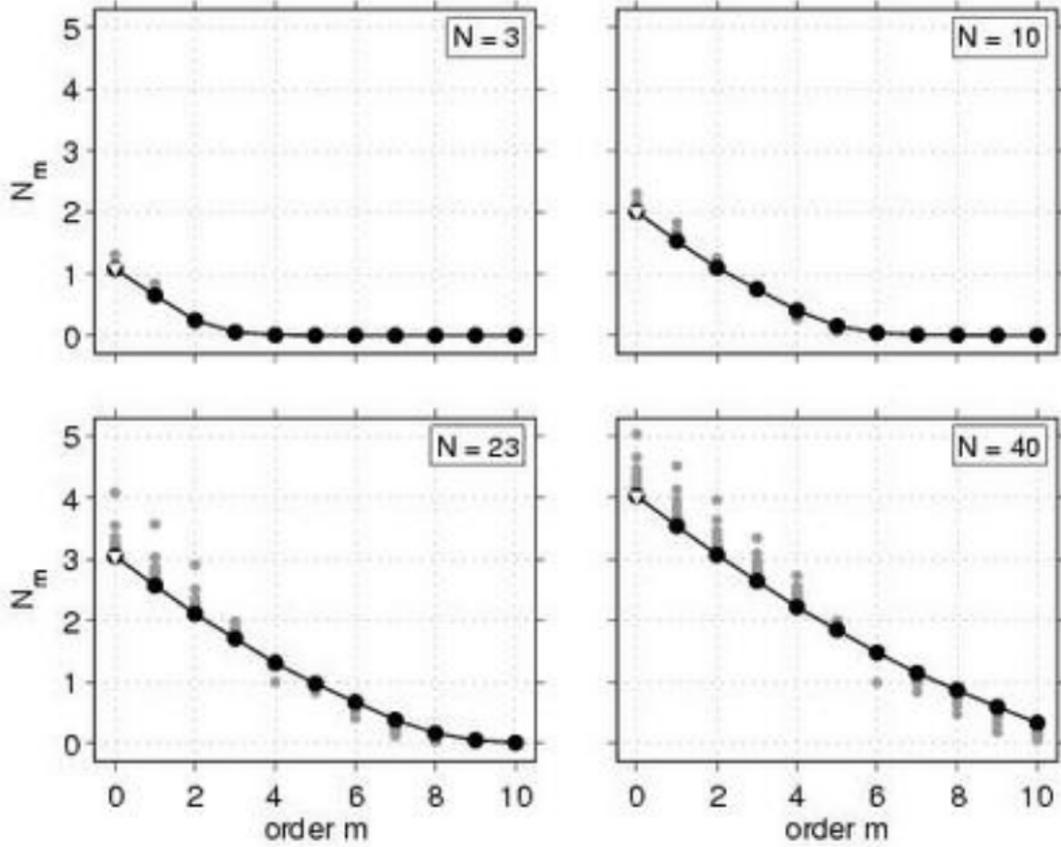


FIGURE 16 – Comparaison du nombre N_m de valeurs propres significatives pour un ordre fixé m (en gris) avec l'approximation asymptotique (142) (en noir). Le nombre de Shannon $N = 3, 10, 23, 40$ est gardé constant dans chacun des quatre échantillons, et la largeur de bande utilisée pour calculer les valeurs exactes de N_m varie entre $L = 1$ (pire remplissage) et $L = 100$ (meilleur remplissage). Les points inconsistants avec la contrainte $A/(4\pi) = N/(L + 1)^2 < 1$ ne sont pas représentés graphiquement. Les triangles blancs montrent l'approximation simplifiée de $N_0 \approx (L + 1)\Theta/\pi$ dans le cas $m = 0$.

8 Conclusion

Une famille orthogonale d'expansions harmoniques sphériques à bande limitée qui sont optimalement concentrées dans une région finie R de la sphère unité peut être calculée en résolvant soit un problème de valeurs propres d'une matrice symétrique dans le domaine spectral soit un problème équivalent de Fredholm de recherche de valeurs propres dans le domaine spatial. Toute valeur propre $0 < \lambda < 1$ est une mesure à la fois de la concentration spatiale de la fonction propre à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}})$ et de la fonction propre à espace limité de la concentration spectrale $h(\hat{\mathbf{r}})$ qui coïncide avec $g(\hat{\mathbf{r}})$ dans la région de concentration. Le nombre de fonctions propres correctement concentrées est $N = (L + 1)^2 A/(4\pi)$, où L est le degré sphérique maximal et A est l'aire de la région de concentration. Pour le dire rapidement, le nombre de Shannon N est la dimension de l'espace des fonctions $f(\hat{\mathbf{r}})$ qui peuvent être concentrées dans une région finie R de la sphère et dans un intervalle spectral $0 \leq l \leq L$. Pour une petite région $A \ll 4\pi$, et un degré harmonique sphérique maximal L , les fonctions propres optimalement concentrées à bande limitée $g(\hat{\mathbf{r}})$ et leurs fonctions propres associées limitées en espace $h(\hat{\mathbf{r}})$ peuvent être calculées précisément, même pour une région de forme

irrégulière R . Dans le cas spécial, mais important, d'une calotte polaire circulaire, chaque fonction propre peut être calculée précisément, par diagonalisation numérique d'une matrice commutante tridiagonale, qui a un spectre simple de Sturm-Liouville. Exactement comme dans le problème de Slepian à une dimension, les cônes propres sphéroïdaux prolates ont prouvé leur extrême utilité en analyse spectrale en temps-fréquence, nous nous attendons à ce que les fonctions propres sphériques en deux dimensions développées ici aient une large variété d'applications en analyse de données dans des domaines tels que la géophysique, la science planétaire et la cosmologie.

Remerciements

F. J. S. remercie Ingrid Daubechies, Peter E. Harris, Jean Steiner, Partha Mitra, Bill Symes, et David Thomson pour des discussions perspicaces, et le Département de Géophysique Spatiale et Planétaire à l'Institut de Physique du Globe de Paris pour leur hospitalité. Le support financier de ce travail a été apporté par l'U. S. National Science Foundation sous le numéro d'attribution EAR-0105387.

Références

- [1] A. ALBERTELLA, F. SANSÒ, N. SNEEUW, *Band-limited functions on a bounded spherical domain : the Slepian problem on the sphere*, J. Geodesy, 73 (1999), p. 436–447.
- [2] R. D. AMADO, K. STRICKER-BAUER, D. A. SPARROW, *Semiclassical methods and the summation of the scattering partial wave series*, Phys. Rev. C, 32 (1985), p. 329–332.
- [3] M. A. BLANCO, M. FLÓREZ, M. BERMEJO, *Evaluation of the rotation matrices in the basis of real spherical harmonics*, J. Mol. Struct. (Theochem), 419 (1997), p. 19–27.
- [4] M. BÖHME, D. POTTS, *A fast algorithm for filtering and wavelet decomposition on the sphere*, Electron. Trans. Numer. Anal., 16 (2003), p. 70–93.
- [5] J. N. BRUNE, *Travel times, body waves, and normal modes of the Earth*, Bull. Seism. Soc. Am., 54 (1964), p. 2099–2128.
- [6] W. E. BYERLY, *An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindrical, and Ellipsoidal Harmonics*, Ginn & Co., Boston, Mass., 1893.
- [7] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience, New York, 1953.
- [8] F. A. DAHLEN, *A uniformly valid asymptotic representation of normal mode multiplet spectra on a laterally heterogeneous Earth*, Geophys. J. R. Astron. Soc., 62 (1980), p. 225–247.
- [9] F. A. DAHLEN, J. TROMP, *Theoretical Global Seismology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1998.
- [10] I. DAUBECHIES, *Time-frequency localization operators – a geometric phase space approach*, IEEE Trans. Inform. Theory, 34 (1988), p. 605–612.
- [11] I. DAUBECHIES, T. PAUL, *Time-frequency localisation operators – a geometric phase space approach : II. The use of dilations*, Inv. Probl., 4 (1988), p. 661–680.

- [12] A. R. EDMONDS, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1996.
- [13] P. FLANDRIN, *Maximum signal energy concentration in a time-frequency domain*, in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process., vol. 4, IEEE, 1988, p. 2176–2179.
- [14] P. FLANDRIN, *Time-frequency/Time-scale analysis*, Academic Press, San Diego, Calif., 1999.
- [15] W. FREEDEN, V. MICHEL, *Orthogonal zonal, tesseral and sectorial wavelets on the sphere for the analysis of satellite data*, Adv. Comput. Math., 21 (2004), p. 181–217.
- [16] W. FREEDEN, M. SCHREINER, *Orthogonal and nonorthogonal multiresolution analysis, scale discrete and exact fully discrete wavelet transform on the sphere*, Constr. Approx., 14 (1998), p. 493–515.
- [17] W. FREEDEN, U. WINDHEUSER, *Combined spherical harmonic and wavelet expansion – A future concept in Earth’s gravitational determination*, Appl. Comput. Harm. Anal., 4 (1997), p. 1–37.
- [18] E. N. GILBERT, D. SLEPIAN, *Doubly orthogonal concentrated polynomials*, SIAM J. Math. Anal., 8 (1977), p. 290–319.
- [19] F. A. GRÜNBAUM, L. LONGHI, M. PERLSTADT, *Differential operators commuting with finite convolution integral operators : some non-abelian examples*, SIAM J. Appl. Math., 42 (1982), p. 941–955.
- [20] A. HANSEN, *Multidimensional multitaper spectral estimation*, Signal Process., 58 (1997), p. 327–332.
- [21] E. HILB, *Über die Laplacesche Reihe*, Math. Z., 5 (1919), p. 17.
- [22] R. A. HORN, C. R. JOHNSON, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [23] C. HWANG, *Spectral analysis using orthonormal functions with a case study on sea surface topography*, Geophys. J. Int., 115 (1993), p. 1148–1160.
- [24] C. HWANG, S.-K. CHEN, *Fully normalized spherical cap harmonics : Application to the analysis of sea-level data from TOPEX/POSEIDON and ERS-1*, Geophys. J. Int., 129 (1997), p. 450–460.
- [25] R. JAKOB-CHIEN, B. K. ALPERT, *A fast spherical filter with uniform resolution*, J. Comput. Phys., 136 (1997), p. 580–584.
- [26] J. JEANS, *The propagation of earthquake waves*, Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A, 102 (1923), p. 554–574.
- [27] H. JEFFREYS, B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 3 ed., 1988.
- [28] R. P. KANWAL, *Linear Integral Equations ; Theory and Technique*, Academic Press, New York, 1971.

- [29] M. KIDO, D. A. YUEN, A. P. VINCENT, *Continuous wavelet-like filter for a spherical surface and its application to localized admittance function on Mars*, Phys. Earth Planet. Inter., 135 (2003), p. 1–14.
- [30] H. J. LANDAU, *On the eigenvalue behavior of certain convolution equations*, Trans. Am. Math. Soc., 115 (1965), p. 242–256.
- [31] —, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, Acta Mathematica Uppsala, 117 (1967), p. 37–52.
- [32] H. J. LANDAU, H. O. POLLAK, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – II*, Bell Syst. Tech. J., 40 (1960), p. 65–84.
- [33] —, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – III : The dimension of the space of essentially time- and band-limited signals*, Bell Syst. Tech. J., 41 (1962), p. 1295–1336.
- [34] K. G. LIBBRECHT, *Practical considerations for the generation of large-order spherical harmonics*, Solar Physics, 99 (1985), p. 371–373.
- [35] J. M. LILLY, J. PARK, *Multiwavelet spectral and polarization analyses of seismic records*, Geophys. J. Int., 122 (1995), p. 1001–1021.
- [36] T.-C. LIU, B. D. VAN VEEN, *Multiple window based minimum variance spectrum estimation for multidimensional random fields*, IEEE Trans. Signal Process., 40 (1992), p. 578–589.
- [37] G. MASTERS, K. RICHARDS-DINGER, *On the efficient calculation of ordinary and generalized spherical harmonics*, Geophys. J. Int., 135 (1998), p. 307–309.
- [38] P. J. MCGOVERN, S. C. SOLOMON, D. E. SMITH, M. T. ZUBER, M. SIMONS, M. A. WIECZOREK, R. J. PHILLIPS, G. A. NEUMANN, O. AHARONSON, J. W. HEAD, *Localized gravity/topography admittance and correlation spectra on Mars : Implications for regional and global evolution*, J. Geophys. Res., 107 (2002), p. 5136, doi :10.1029/2002JE001854.
- [39] A. MESSIAH, *Quantum Mechanics*, Dover, New York, 2000.
- [40] L. MIRANIAN, *Slepian functions on the sphere, generalized Gaussian quadrature rule*, Inv. Prob., 20 (2004), p. 877–892.
- [41] F. J. NARCOWICH, J. D. WARD, *Nonstationary wavelets on the m -sphere for scattered data*, Ap. Comput. Harm. Anal., 3 (1996), p. 324–336.
- [42] S. OLHEDE, A. T. WALDEN, *Generalized Morse wavelets*, IEEE Trans. Signal Process., 50 (2002), p. 2661–2670.
- [43] F. W. J. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, A. K. Peters, Wellesley, Mass., 1997.
- [44] S. M. OULD KABER, *A Legendre pseudospectral viscosity method*, J. Comput. Phys., 128 (1996), p. 165–180.
- [45] R. PAIL, G. PLANK, W.-D. SCHUH, *Spatially restricted data distributions on the sphere : the method of orthonormalized functions and applications*, J. Geodesy, 75 (2001), p. 44–56.

- [46] D. B. PERCIVAL, A. T. WALDEN, *Spectral Analysis for Physical Applications, Multitaper and Conventional Univariate Techniques*, Cambridge Univ. Press, New York, 1993.
- [47] A. S. POLYAKOV, *Local basis expansions for linear inverse problem*, PhD thesis, New York University, 2002.
- [48] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANNERY, *Numerical Recipes in FORTRAN : The Art of Scientific Computing*, Cambridge Univ. Press, 2nd ed., 1992.
- [49] S. S. SHAPIRO, B. H. HAGER, T. H. JORDAN, *The continental tectosphere and Earth's long-wavelength gravity field*, *Lithos*, 48 (1999), p. 135–152.
- [50] F. J. SIMONS, R. D. VAN DER HILST, M. T. ZUBER, *Spatio-spectral localization of isostatic coherence anisotropy in Australia and its relation to seismic anisotropy : Implications for lithospheric deformation*, *J. Geophys. Res.*, 108 (2003), p. 2250, doi : 10.1029/2001JB000704.
- [51] M. SIMONS, B. H. HAGER, *Localization of the gravity field and the signature of glacial rebound*, *Nature*, 390 (1997), p. 500–504.
- [52] M. SIMONS, S. C. SOLOMON, B. H. HAGER, *Localization of gravity and topography : Constraints on the tectonics and mantle dynamics of Venus*, *Geophys. J. Int.*, 131 (1997), p. 24–44.
- [53] D. SLEPIAN, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – IV : Extensions to many dimensions ; Generalized prolate spheroidal functions*, *Bell Syst. Tech. J.*, 43 (1964), p. 3009–3057.
- [54] ———, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – V : The discrete case*, *Bell Syst. Tech. J.*, 57 (1978), p. 1371–1429.
- [55] D. SLEPIAN, *Some comments on Fourier-analysis, uncertainty and modeling*, *SIAM Rev.*, 25 (1983), p. 379–393.
- [56] D. SLEPIAN, H. O. POLLAK, *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty – I*, *Bell Syst. Tech. J.*, 40 (1960), p. 43–63.
- [57] D. SLEPIAN, E. SONNENBLICK, *Eigenvalues associated with prolate spheroidal wave functions of zero order*, *Bell Syst. Tech. J.*, 44 (1965), p. 1745–1759.
- [58] N. SNEEUW, *Global spherical harmonic-analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective*, *Geophys. J. Int.*, 118 (1994), p. 707–716.
- [59] SWARZTRAUBER, W. F. SPOTZ, *Generalized discrete spherical harmonic transforms*, *J. Comput. Phys.*, 159 (2000), p. 213–230.
- [60] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 4 ed., 1975.
- [61] D. J. THOMSON, *Spectrum estimation and harmonic analysis*, *Proc. IEEE*, 70 (1982), p. 1055–1096.
- [62] F. G. TRICOMI, *Integral Equations*, Interscience, New York, 5 ed., 1970.

- [63] D. L. TURCOTTE, R. J. WILLEMANN, W. F. HAXBY, J. NORBERRY, *Role of membrane stresses in the support of planetary topography*, J. Geophys. Res., 86 (1981), p. 3951–3959.
- [64] A. T. WALDEN, *Improved low-frequency decay estimation using the multitaper spectral-analysis method*, Geophys. Prospect., 38 (1990), p. 61–86.
- [65] M. A. WIECZOREK, R. J. PHILLIPS, *Potential anomalies on a sphere : Applications to the thickness of the lunar crust*, J. Geophys. Res., 103 (1998), p. 1715–1724.
- [66] M. A. WIECZOREK, F. J. SIMONS, *Localized spectral analysis on the sphere*, Geophys. J. Int., (2004), in preparation.

A Considérations calculatoires

Ici nous présentons une brève description des méthodes numériques employées dans cette étude. Tous les calculs effectués l'ont été en arithmétique double précision. Les assertions faisant intervenir la précision machine sont valides selon une double précision, avec une erreur arrondie de $\sim 10^{-16}$.

A.1 Concentration dans une calotte polaire

Nous calculons les fonctions propres colatitudinales $g_1(\theta), g_2(\theta), \dots, g_{L-m+1}(\theta)$ d'une calotte polaire symétrique par rapport à l'axe $0 \leq \theta \leq \Theta$ en utilisant trois méthodes différentes. La première méthode est la diagonalisation numérique des matrices D de taille $(L - m + 1) \times (L - m + 1)$ dans l'équation (76).

Nous n'implémentons pas l'expression de Wigner 3- j (79) pour les éléments de la matrice $D_{ll'}$, mais utilisons à la place la quadrature de Gauss-Legendre [48] pour évaluer l'intégrale définissant (78) :

$$\begin{aligned} D_{ll'} &= \int_{\cos \Theta}^1 X_{lm}(\arccos \mu) X_{l'm}(\arccos \mu) d\mu \\ &\approx \sum_{j=1}^J w_j X_{lm}(\arccos \mu_j) X_{l'm}(\arccos \mu_j), \end{aligned} \quad (144)$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_J$ sont les racines des polynômes de Legendre $P_J(\bar{\mu})$, mises à l'échelle de $-1 \leq \bar{\mu}_j \leq 1$ vers $\cos \Theta \leq \mu_j \leq 1$, et $w_j = 2(1 - \bar{\mu}_j^2)^{-1} [P_J'(\bar{\mu}_j)]^{-2}$, $j = 1, 2, \dots, J$ sont les poids d'intégration associés. Seuls les éléments les plus hauts de la matrice triangulaire $D_{ll'}, l \leq l'$ sont calculés explicitement ; les éléments les plus bas sont complétés en utilisant la symétrie $D_{ll'} = D_{l'l}$.

L'ordre J de l'intégration de Gauss-Legendre est ajusté vers le haut jusqu'à ce que les $L - m + 1$ fonctions propres $g_1(\theta), g_2(\theta), \dots, g_{L-m+1}(\theta)$ du domaine spatial satisfassent les relations d'orthogonalité (83) à la précision permise par la machine. La même règle de quadrature de Gauss-Legendre pour les hauts degrés est utilisée pour évaluer les intégrales orthogonales. Les fonctions de Legendre $X_{lm}(\theta)$ sont calculées avec une haute précision à très haut degré ($l \approx 500$) en utilisant un algorithme récursif [34; 37].

La seconde méthode consiste à résoudre numériquement l'équation de Fredholm (89b). En utilisant la règle de quadrature de Gauss-Legendre pour discrétiser cette équation, nous obtenons

$$\sum_{j=1}^J w_j D(\mu_j, \mu'_j) h(\mu'_j) = \lambda h(\mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (145)$$

L'équation (145) peut être réécrite comme une équation algébrique symétrique de valeurs propres,

$$(\mathbf{W}^{1/2}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{W}^{1/2})(\mathbf{W}^{1/2}\tilde{\mathbf{h}}) = \lambda(\mathbf{W}^{1/2}\tilde{\mathbf{h}}), \quad (146)$$

où $\tilde{\mathbf{h}}$ est un vecteur colonne J -dimensionnel avec pour éléments $\tilde{h}_j = h(\mu_j)$, et où $\tilde{\mathbf{D}}$ et \mathbf{W} dénotent les matrices $J \times J$ d'éléments $\tilde{D}_{jj'} = D(\mu_j, \mu_{j'})$ et $W_{jj'} = w_j \delta_{jj'}$. Les valeurs propres λ et les vecteurs propres transformés $\mathbf{W}^{1/2}\tilde{\mathbf{h}}$ sont calculés par diagonalisation numérique de la matrice $\mathbf{W}^{1/2}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{W}^{1/2}$.

L'ordre d'intégration J est à nouveau choisi pour assurer une orthogonalité précise des fonctions propres du domaine spatial $h_1(\theta), h_2(\theta), \dots, h_{L-m+1}(\theta)$. Dans le cas zonal ($m = 0$), le choix $J = L+1$ rend à la fois les intégrations (144) et (145) exactes; pour $m \neq 0$, nous utilisons un ordre d'intégration élevé et conservatif J , puisque les intégrandes ne sont plus polynomiaux. Les puissances du spectre montrées dans la Figure 3 pour un ordre fixé sont calculées en transformant les fonctions propres du domaine spatial (55) vers le domaine spectral, en utilisant comme domaine pour le degré sphérique harmonique $m \leq l \leq 127$ qui est suffisant pour éviter les phénomènes d'aliasing⁵ [58].

Même pour des valeurs modérées du spectre de degré maximal L et une calotte de rayon Θ , les plus petites valeurs propres $\dots, \lambda_{L-m}, \lambda_{L-m+1}$ tombent en dessous de la précision machine.

Les fonctions propres associées, moins bien concentrées, calculées en utilisant soit l'une soit l'autre des deux méthodes directes sont dans ce cas des éléments orthogonaux essentiellement arbitraires d'un espace propre dégénéré numériquement, et ne sont plus assez précis [1]. À cause de cela, il n'est pas possible de trouver les fonctions propres optimalement exclues d'une petite calotte polaire, ou de façon équivalente, les fonctions propres optimalement concentrées d'une grande calotte, par diagonalisation soit de la matrice \mathbf{D} soit de $\tilde{\mathbf{D}}$. Heureusement, cette difficulté peut être surmontée dans la troisième méthode, qui est une diagonalisation de la matrice tridiagonale de Grünbaum (116). L'espacement grossièrement équidistant des valeurs propres de Sturm-Liouville $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{L-m+1}$ permet de calculer toutes les fonctions propres associées, à la précision permise par la machine. Les facteurs de concentration spatio-spectrale $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{L-m+1}$ sont calculés à la même précision, soit par une multiplication matricielle *a posteriori*, $\lambda = \mathbf{g}^T \mathbf{D} \mathbf{g}$, soit par une intégration de Gauss-Legendre de la relation spatiale équivalente (83).

À la fois les valeurs propres significatives et non significatives calculées en utilisant chacune des méthodes ci-dessus s'accordent selon la précision machine, fournissant une vérification numérique utile. La diagonalisation de la matrice tridiagonale \mathbf{G} est la seule manière numériquement stable de résoudre le problème de la concentration soit pour une grande calotte polaire soit pour un grand degré maximal L . Par une extension de l'analyse ci-dessus, il est même possible d'utiliser l'opérateur de Grünbaum \mathcal{G} pour calculer des fonctions propres à espace limité $h_{L-m+2}(\theta), h_{L-m+3}(\theta), \dots$ qui sont dans l'espace nul [40].

A.2 Concentration dans une région de forme arbitraire

On résout le problème de concentration spatio-spectral pour une région de forme arbitraire R par diagonalisation numérique de la matrice \mathbf{D} de taille $(L+1)^2 \times (L+1)^2$ et d'éléments $D_{lm,l'm'}$ définie par l'équation (40). Étant donnée la frontière lissée de R , nous trouvons d'abord les points le plus au nord et le plus au sud, de colatitudes θ_n et θ_s . Pour tout $\theta_n \leq \theta \leq \theta_s$, nous trouvons les points le plus à gauche et le plus à droite, de longitudes $\phi_e(\theta)$ et $\phi_w(\theta)$. Dans le cas d'une région non convexe

5. repliement de spectre : confusion par recouvrement de différentes parties qui donne un effet de moirage dans le cas spatial et un effet de distorsion (par exemple audio) dans le cas temporel.

avec des protubérances et des baies, il peut y avoir plusieurs points les plus à gauche et à droite, que nous indexerons avec un indice supplémentaire $i = 1, 2, \dots, I$. L'intégrale selon la longitude,

$$\Phi_{mm'}(\theta) = \sum_{i=1}^I \int_{\phi_{wi}}^{\phi_{ei}} \begin{Bmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos m'\phi \\ \sin m'\phi \end{Bmatrix} d\phi, \quad (147)$$

peut être calculée analytiquement, et nous utilisons la quadrature de Gauss-Legendre pour calculer l'intégrale restante sur la colatitude :

$$\begin{aligned} D_{lm,l'm'} &= \int_{\mu_n}^{\mu_s} X_{lm}(\arccos \mu) X_{l'm'}(\arccos \mu) \Phi_{mm'}(\arccos \mu) d\mu \\ &\approx \sum_{j=1}^J w_j X_{lm}(\arccos \mu_j) X_{l'm'}(\arccos \mu_j) \Phi_{mm'}(\arccos \mu_j). \end{aligned} \quad (148)$$

Comme dans le cas d'une calotte polaire, nous ajustons l'ordre d'intégration J vers le haut jusqu'à ce que les fonctions propres $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \dots, g_{(L+1)^2}(\hat{\mathbf{r}})$ satisfassent les relations d'orthogonalité (47) en accord avec la précision de la machine. Il n'y a pas d'analogue de l'opérateur de Grünbaum \mathcal{G} pour une région de forme arbitraire, si ce n'est que seules les fonctions propres associées aux valeurs propres qui sont au-dessus de la précision machine peuvent être calculées efficacement. Dans la plupart des applications pratiques, il n'y a pas de limitation, puisqu'on s'intéresse en général seulement aux fonctions propres bien concentrées et calculables $g_1(\hat{\mathbf{r}}), g_2(\hat{\mathbf{r}}), \dots, g_N(\hat{\mathbf{r}})$, qui sont associées aux valeurs propres numériquement significatives $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

A.3 Concentration dans une calotte non polaire

Une des applications principales des fonctions de Slepian sphériques en géophysique et en physique planétaire sera d'analyser les mesures dans une région circulaire symétrique centrée en un lieu géographique arbitraire θ_0, ϕ_0 [e.g., 29; 38; 51; 52]. La procédure la plus adaptée pour déterminer les fonctions propres optimalement concentrées requises consiste à d'abord calculer les coefficients harmoniques sphériques g_{lm} des fonctions propres (84) concentrées dans une calotte polaire $0 \leq \theta \leq \Theta$, et ensuite à les faire tourner vers le lieu désiré pour la calotte [3; 9; 12; 37]. Le fenêtrage réel des données pour des analyses ultérieures peut soit être effectué dans le domaine spectral [52], soit, plus simplement, par multiplication évidente après transformation des fonctions propres tournées vers le domaine spatial. Si l'on souhaite éviter la rotation sphérique harmonique, il est aussi possible de calculer les fonctions propres tournées directement, en effectuant l'intégration numérique dans l'équation (147) sur les limites analytiques prescrites d'une calotte de rayon Θ centrée en θ_0, ϕ_0 , données par

$$\phi_{w,e}(\theta) = \phi_0 \mp \Delta\phi(\theta) \quad \text{where} \quad \Delta\phi(\theta) = \frac{\arccos(\cos \Theta - \cos \theta \cos \theta_0)}{\sin \theta \sin \theta_0}. \quad (149)$$

B Concentration spatio-spectrale sur un plan

Dans l'un de ses nombreux articles étendant son analyse en une dimension, Slepian [53] a considéré le problème de la concentration spatio-temporelle dans un espace cartésien de dimension arbitraire. Nous présentons une brève revue du problème de concentration dans un espace cartésien à deux dimensions, pour établir une comparaison avec l'analyse asymptotique de la Terre plate présentée dans la Section 7.

Une fonction arbitraire à valeurs réelles de carré intégrable $f(\mathbf{r})$ dans le plan a la représentation de Fourier en deux dimensions, analogue à la représentation harmonique sphérique (23),

$$f(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{k}, \quad F(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}. \quad (150)$$

La relation d'orthonormalité de Fourier analogue à l'équation (16) est

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^2\mathbf{k} = \delta(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|) = \frac{\delta(\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{2\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}. \quad (151)$$

La relation de Parseval stipule que les puissances de toute fonction $f(\mathbf{r})$ dans les domaines spectral et spatial sont identiques

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mathbf{k})|^2 d^2\mathbf{k}. \quad (152)$$

L'équation (152) est l'analogie dans le plan de la relation sphérique $\|f\|_{\Omega}^2 = \|f\|_{\infty}^2$.

Nous utilisons $g(\mathbf{r})$ pour dénoter une fonction à bande limitée,

$$g(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\|\mathbf{k}\|\leq K} G(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{k}, \quad (153)$$

qui n'a pas de puissance excédant un nombre d'onde maximal K .

Par analogie avec le critère d'optimisation (38), nous cherchons à concentrer la puissance de $g(\mathbf{r})$ dans une région finie R :

$$\lambda = \frac{\int_R g^2 d^2\mathbf{r}}{\int_{-\infty}^{\infty} g^2 d^2\mathbf{r}} = \text{maximum}. \quad (154)$$

Les fonctions à bande limitée $g(\mathbf{r})$ qui maximisent le rapport λ dans l'équation (154) sont solutions de l'équation des valeurs propres dans le domaine de Fourier, analogue à l'équation (43),

$$\int_{\|\mathbf{k}'\|\leq K} D(\mathbf{k}, \mathbf{k}') G(\mathbf{k}') d^2\mathbf{k}' = \lambda G(\mathbf{k}), \quad \|\mathbf{k}\| \leq K, \quad (155)$$

où

$$D(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_R e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}. \quad (156)$$

Le problème correspondant dans le domaine spatial, analogue à l'équation (51), est

$$\int_R D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}' = \lambda g(\mathbf{r}), \quad |\mathbf{r}| \leq \infty, \quad (157)$$

où

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\|\mathbf{k}\|\leq K} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^2\mathbf{k}. \quad (158)$$

Les fonctions propres à espace limité $h(\mathbf{r})$, qui s'évanouissent en dehors de la région R , satisfont la même équation aux valeurs propres (157), mais avec le domaine de solution convenablement restreint :

$$\int_R D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') h(\mathbf{r}') d^2\mathbf{r}' = \lambda h(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in R. \quad (159)$$

La valeur propre associée $0 < \lambda < 1$ est une mesure à la fois de la concentration spatiale de $g(\mathbf{r})$ dans une région R et de la concentration spectrale de $h(\mathbf{r})$ dans le domaine suivant pour la longueur d'onde $\|\mathbf{k}\| \leq K$.

Pour qu'il y ait consistance avec (45), nous rangeons les valeurs propres de telle façon que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$. Les fonctions propres à bande et à domaine spatial limités $g_1(\mathbf{r}), g_2(\mathbf{r}), \dots$ peuvent être choisis de manière à être orthonormaux sur tout le plan $\|\mathbf{r}\| \leq \infty$ et orthogonaux sur la région R :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\alpha g_\beta d^2\mathbf{r} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \int_R g_\alpha g_\beta d^2\mathbf{r} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (160)$$

La somme des valeurs propres, ou nombre de Shannon, est donné par

$$N = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha = \int_{\|\mathbf{k}\| \leq K} D(\mathbf{k}, \mathbf{k}) d^2\mathbf{k} = \int_R D(\mathbf{r}, \mathbf{r}) d^2\mathbf{r} = K^2 \frac{A}{4\pi}, \quad (161)$$

où A est l'aire de la région de concentration R .

Les équations (160) et (161) sont les analogues planaires des relations sphériques (47) et (64).

La comparaison des équations (151) et (158) montre que le noyau du domaine spatial $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, comme sa contrepartie sphérique $D(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}')$, est une fonction delta à bande limitée.

En introduisant des coordonnées polaires et en intégrant selon l'angle, on peut réduire $D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à une formule rappelant celle de la représentation (127) :

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \int_0^K J_0(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) k dk = \frac{K J_1(K\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{2\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (162)$$

En introduisant des variables mises à l'échelle indépendantes et dépendantes analogues à (129),

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{4\pi}{A}} \mathbf{r}, \quad \mathbf{x}' = \sqrt{\frac{4\pi}{A}} \mathbf{r}', \quad \psi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{r}), \quad \psi(\mathbf{x}') = g(\mathbf{r}'), \quad (163)$$

on peut réécrire les équations (157) et (162) dans une forme identique à (131)–(132) et analogue à (6) :

$$\frac{K}{2\pi} \int_{R_*} \frac{J_1(K\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \psi(\mathbf{x}) = \lambda \psi(\mathbf{x}), \quad (164)$$

où R_* est l'image de la région de concentration R sous l'application (163).

Si la région de concentration R est un cercle de rayon Q , alors une représentation en coordonnées polaires, $\mathbf{r} = (q, \phi)$, analogue à (84),

$$g(q, \phi) = \begin{cases} \sqrt{2} g(q) \cos m\phi & \text{si } -L \leq m < 0 \\ g(q) & \text{si } m = 0 \\ \sqrt{2} g(q) \sin m\phi & \text{si } 0 < m \leq L, \end{cases} \quad (165)$$

peut être utilisée pour décomposer les équations (157) et (162) en une série de problèmes de valeurs propres d'ordre fixé analogues à (137)–(138) :

$$\int_0^Q D(q, q') g(q') q' dq' = \lambda g(q), \quad (166)$$

où

$$D(q, q') = K^2 \int_0^1 J_m(Kpq) J_m(Kpq') p dp. \quad (167)$$

Les transformations

$$x = q/Q, \quad x' = q'/Q, \quad \psi(x) = g(q), \quad \psi(x') = g(q') \quad (168)$$

convertissent les équations (166)–(167) en un problème de valeurs propres mis à l'échelle

$$4N \int_0^1 \int_0^1 J_m(2\sqrt{N}px) J_m(2\sqrt{N}px') p dp \psi(x') x' dx' = \lambda \psi(x), \quad (169)$$

qui est identique à (140)–(141), et dépendant seulement du nombre de Shannon $N = \frac{1}{4}K^2Q^2$.

Slepian [53] a remarqué que l'équation (169) est une version itérée de l'équation de “racine carrée” équivalente

$$2\sqrt{N} \int_0^1 J_m(2\sqrt{N}xx') \psi(x') x' dx' = \sqrt{\lambda} \psi(x). \quad (170)$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et les fonctions propres $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ de l'équation (169) peuvent être alternativement trouvées en résolvant l'équation équivalente (170).

Dans la limite asymptotique (121), à la fois les problèmes de concentration général et sphérique symétrique par rapport à l'axe sont vus comme identiques au problème de concentration correspondant dans un plan, avec un nombre d'onde maximal K remplacé par l'entier $L + 1$. Le problème planaire montre une mise à l'échelle du nombre de Shannon exacte analogue à celle du problème en une dimension (6), tandis que la mise à l'échelle du problème sphérique est seulement asymptotique. L'équation (142) donnant le nombre de valeurs propres significatives N_m associé à chaque ordre angulaire m est exact dans le cas du plan.